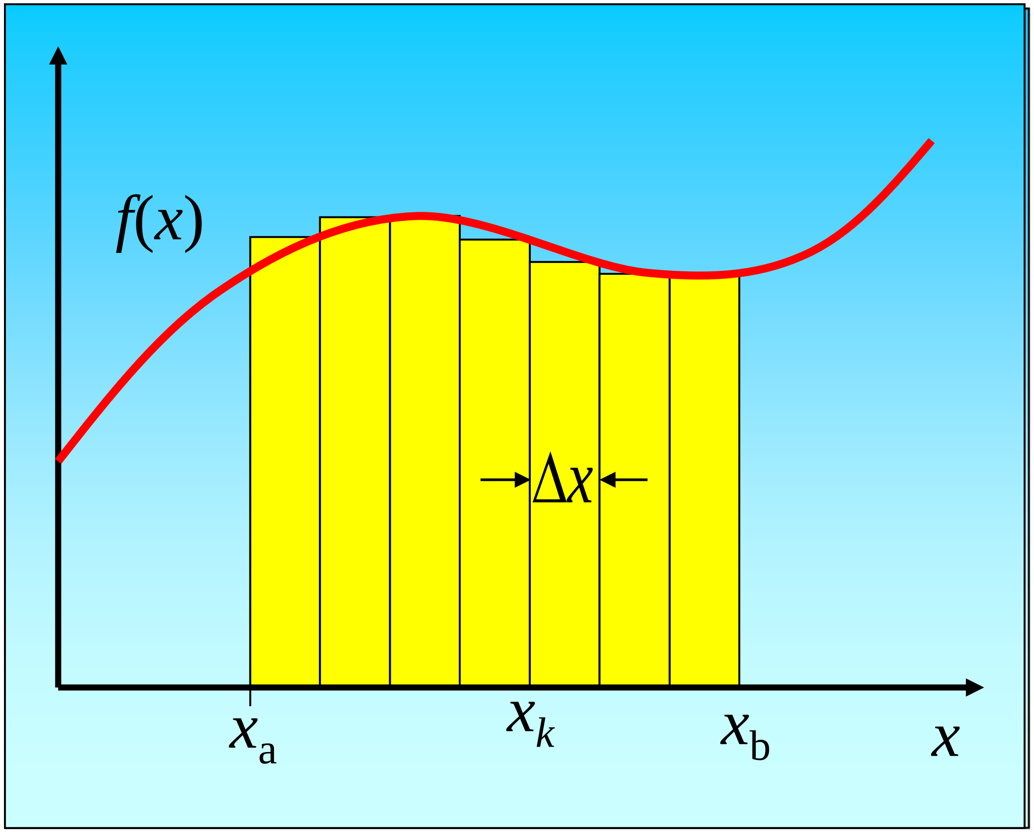
2.5 Integralrechnung in 1D

(i) Problemstellung und Definition

Wie groß ist die Fläche unter einer Kurve $f(x)$ zwischen den Grenzen x_a und x_b ?



Man teilt die Fläche in n schmale Streifen der Breite:

$$\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n}$$

Die Höhe jedes Streifens ist:

$$f(x_k) \quad \text{mit} \quad x_k = x_a + k \cdot \Delta x$$

Dann kann man die Fläche schreiben in der Form:

$$S = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\,dx$$

Den rechten Ausdruck bezeichnet man als „*bestimmtes Integral*“ der Funktion $f(x)$ in den Grenzen $\{ x_a , x_b \}$.

Beispiel:

Es soll das Integral der Funktion

$$f(x) = x$$

zwischen den Grenzen x_a und x_b berechnet werden. Die Summation liefert

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} x_k\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} (x_\mathrm{a} + k\,\Delta x)\frac{x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a}}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_\mathrm{a}\frac{x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a}}{n} + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a}}{n}\right)^2 = x_\mathrm{a}\frac{x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a}}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \left(\frac{x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a}}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k$$

Es ist:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Also folgt:

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(x_\mathrm{a}(x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a}) + \frac{n(n+1)}{n^2}\frac{1}{2}(x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a})^2 \right)$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

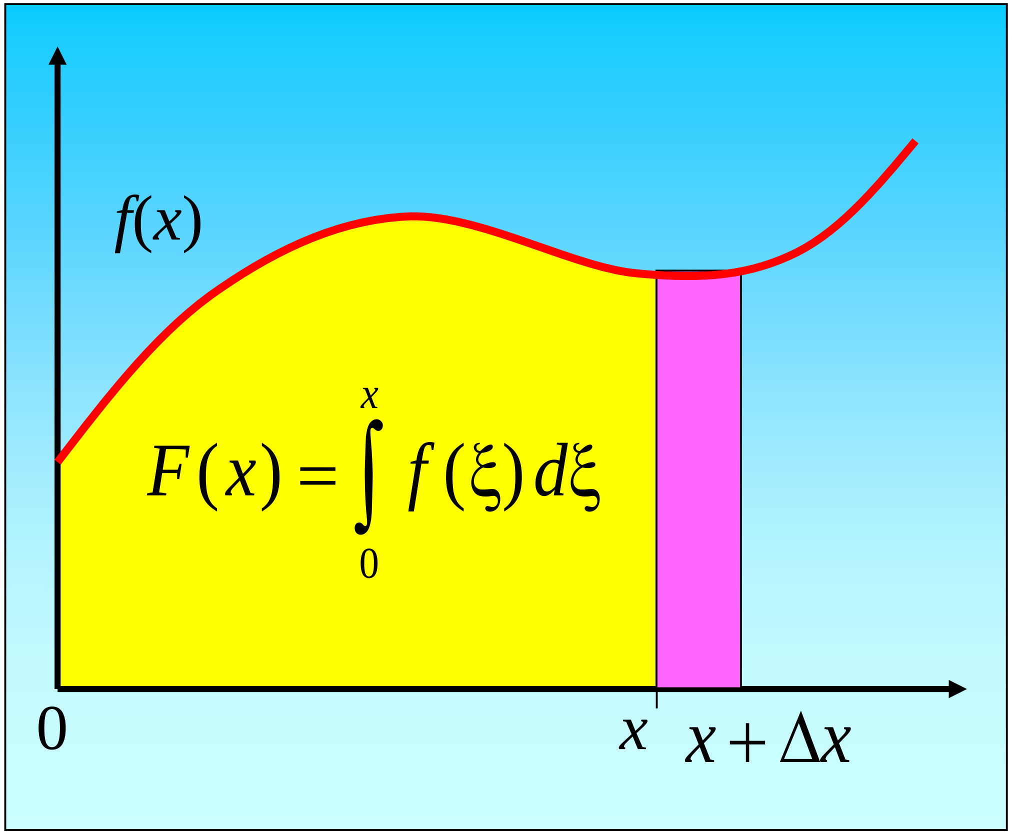
Damit ergibt sich:

$$S = \frac{1}{2}\left(2x_{\mathrm{a}}x_{\mathrm{b}} - 2x_{\mathrm{a}}^2 + x_{\mathrm{b}}^2 - 2x_{\mathrm{a}}x_{\mathrm{b}} + x_{\mathrm{a}}^2\right) = \frac{1}{2}\left(x_{\mathrm{b}}^2 - x_{\mathrm{a}}^2\right)$$

Später sehen wir, dass die folgende Schreibweise für diese Formel sinnvoll ist:

$$S = \int_{x_{\mathrm{a}}}^{x_{\mathrm{b}}} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_{\mathrm{a}}}^{x_{\mathrm{b}}} = \frac{1}{2}x_{\mathrm{b}}^2 - \frac{1}{2}x_{\mathrm{a}}^2$$

(ii) Berechnung des unbestimmten Integrals (Stammfunktion)



Wir betrachten jetzt ein Integral mit variabler oberer Grenze *x*. Dadurch wird eine Funktion *F*(*x*) definiert. Für kleine Δ*x* gilt dann:

$$F(x+\Delta x) = \int_0^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi$$

$$\approx \int_0^x f(\xi)\,d\xi + f(x)\,\Delta x$$

F ist eine Funktion von *x*, die differenziert werden kann.

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\int_0^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi - \int_0^x f(\xi)\,d\xi \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\int_0^x f(\xi)\,d\xi + f(x)\Delta x - \int_0^x f(\xi)\,d\xi \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} f(x)\,\Delta x = f(x)$$

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung: *Die Integration ist die Umkehrung der Differentation*

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Eine Funktion $F(x)$ ist eine *Stammfunktion* zu der Funktion $f(x)$ falls gilt:

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

Mit einer Stammfunktion kann ein bestimmtes Integral sofort berechnet werden:

$$\int_{x_\mathrm{a}}^{x_\mathrm{b}} f(x)\, dx = F(x_\mathrm{b}) - F(x_\mathrm{a}) = \left[F(x)\right]_{x_\mathrm{a}}^{x_\mathrm{b}}$$

Eine Stammfunktion $F(x)$ zu einer Funktion $f(x)$ ist bis auf eine Konstante C bestimmt. Daher schreibt man auch das sog. „*unbestimmte Integral*“ (d.h. das Integral ohne Grenzen) in der Form:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Beispiel:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = x$$

$$\Rightarrow \int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\int_{x_a}^{x_b} x\, dx = \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{x_a}^{x_b} = \frac{1}{2} x_b^2 - \frac{1}{2} x_a^2$$

(iii) Die Stammfunktion von elementaren Funktionen

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$
2. $\int e^x dx = e^x$
3. $\int \cos x \, dx = \sin x$
4. $\int \sin x \, dx = -\cos x$
5. $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3$
6. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$

(iv) Regeln zur Integration von zusammengesetzten Funktionen

Es gelten die folgenden Regeln:

(i) Transformation der Grenzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(ii) Linearität: α und β sind beliebige Zahlen

$$\int_a^b \left(\alpha f(x) \pm \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \pm \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel)

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x)dx = f(x)g(x) - \int \frac{dg(x)}{dx} f(x)dx$$

Beispiele :

(i) $$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx, \quad \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3} = -\int_2^0 x^2 dx$$

(ii) $$\int_0^1 \left(4x^2 + 5x\right)dx = 4\int_0^1 x^2 dx + 5\int_0^1 x dx = 4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + 5\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{5}{2} = \frac{23}{6}$$

(iii) $$\int x\cos x\, dx = ?$$

$$g(x) = x \Rightarrow \frac{dg(x)}{dx} = 1, \qquad f(x) = \sin x \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \cos x$$

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx = x\sin x - (-\cos x)$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\, dx = x\sin x + \cos x$$

(iv) Die Substitutionsregel (Umkehrung der Kettenregel)

Sei eine Funktion $f(g)$ gegeben, deren Argument $g(x)$ selbst eine Funktion des Arguments x ist, dann gilt

$$f(x) = f\left(g(x)\right)$$

Es soll jetzt die Kettenregel

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

umgekehrt werden. Dies soll zunächst anhand eines Beispiels verdeutlicht werden. Das folgende Integral ist gesucht:

$$\int x \cos(x^2)\, dx = ?$$

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{1}{2} du = x dx$$

$$\Rightarrow \int x \cos(x^2) dx = \int \cos(u) \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \sin(u) = \frac{1}{2} \sin(x^2)$$

Allgemein ergibt sich somit die „*Substitutionsregel*“:

$$\int f\left(g(x)\right) \frac{dg(x)}{dx} dx = \int f(u) du$$

$$\text{mit:} \quad g(x) = u$$

2.6 Integration von Vektoren

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\begin{pmatrix} dx(t)/dt \\ dy(t)/dt \\ dz(t)/dt \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung des Ortsvektors.

$$\Rightarrow \vec{r}(t)=\int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau+\vec{r}_0=\begin{pmatrix} \int_0^t v_x(\tau)d\tau \\ \int_0^t v_y(\tau)d\tau \\ \int_0^t v_z(\tau)d\tau \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} 5t^3 \\ 7t \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}(t)=\int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau=\int_0^t \begin{pmatrix} 5\tau^3 \\ 7\tau \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau=\begin{pmatrix} 5\cdot 1/4\ t^4 \\ 7\cdot 1/2\, t^2 \\ -\cos(t)+1 \end{pmatrix}$$

2.7 Beispiel: Quantitative Fehlerrechnung

Alle Messungen in der Physik sind mit Fehlern behaftet.

1. Systematische Fehler:

- keine Methode der Behandlung
- werden oft nicht erkannt
- sind schwer abzuschätzen

Ursachen: Fehler der Mess-instrumente, nicht optimale Auslegung des Experiments in Bezug auf die Fragestellung.

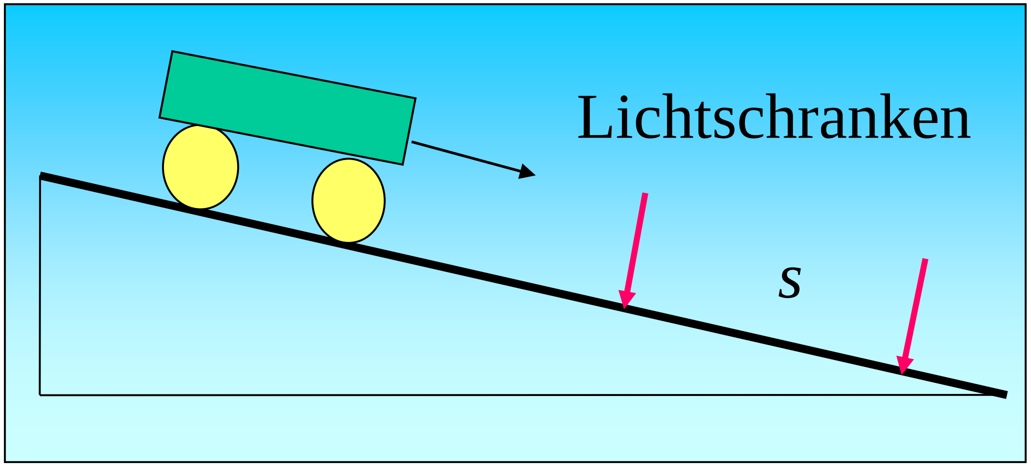
2. Statistische Fehler:

Schwankungen der Meßwerte bei Meßreihen.

Angabe eines Wertes:

$$x \pm \Delta x_{\text{sys}} \pm \Delta x_{\text{stat}}$$

Beispiel: Statistischer Fehler



Es werden n Messungen der Durch-laufzeit vorgenommen:

$$t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n$$

Wahrscheinlichster Wert (Mittelwert):

$$\langle t \rangle = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

Damit ist noch nichts über die Güte einer Messung ausgesagt.

1. Versuch: Maß für den Meßfehler

$$\langle \Delta t \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \langle t \rangle\right)$$

$$= \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} t_i}_{=\langle t \rangle} - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle t \rangle}_{=\langle t \rangle} = 0$$

2. Versuch:

$$\sigma^2 = \left\langle (\Delta t)^2 \right\rangle = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\Delta t_i)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \langle t \rangle\right)^2$$

Ein Meßwert hat also immer die Form:

$$\boxed{t = \langle t \rangle \pm \sigma}$$

Wert = Mittelwert ± Standardabweichung

Ideale Messung: $t = \langle t \rangle$ und $\sigma = 0$

Die Güte der Messung, d.h. der relative Fehler, ist durch $\sigma/\langle t \rangle$ gegeben.

Beispiel:

Meßergebnisse:

Nr.	Zeit t [s]
1	1.34
2	1.29
3	1.31
4	1.33
5	1.28

Für das Beispiel ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{5} t_i = 1.34s + 1.29s + 1.31s + 1.33s + 1.28s = 6.55s \quad \Rightarrow \quad \langle t \rangle = \frac{6.55s}{5} = 1.31s$$

$$\sum_{i=1}^{5} \left(t_i - \langle t \rangle\right)^2 = (0.03s)^2 + (-0.02s)^2 + 0^2 + (0.02s)^2 + (-0.03s)^2 = 0.0026s^2$$

Daraus folgt für die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\langle (\Delta t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{0.0026s^2}{4}} = 0.0255s \approx 0.03s$$

Meßwert: $\quad t = (1.31 \pm 0.03)\,\mathrm{s}$

Relativer Fehler: $\quad \dfrac{\Delta t}{t} = \dfrac{\sigma}{\langle t \rangle} = 0.02 = 2 \cdot 10^{-2}$

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein gemessener Wert im Intervall $t, \ldots, t + \Delta t$?

Beispiel: Im vorigen Beispiel war $\langle t \rangle = 1.31\,\mathrm{s}$ und $\sigma = 0.03\,\mathrm{s}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Meßwert im Intervall $\langle t \rangle - \sigma \ldots \langle t \rangle + \sigma$, also 1.28s, ….. , 1.34s liegt?

Definition der Häufigkeit von Meßwerten im Intervall $t, \ldots, t + \Delta t$:

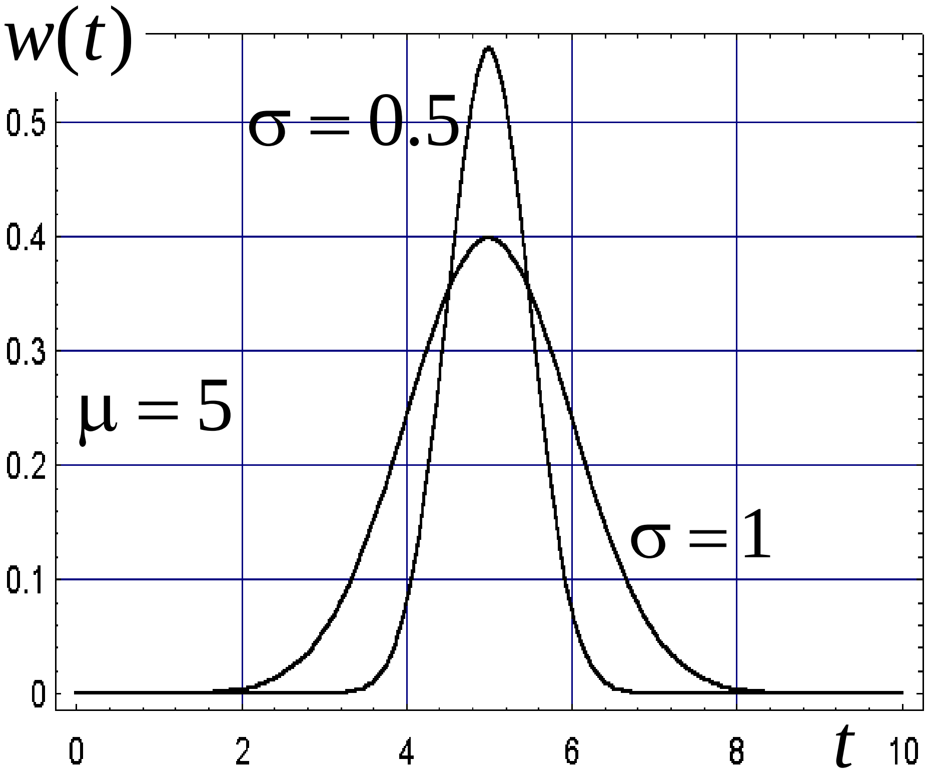
$$\text{Häufigkeit}(t) = \frac{\text{Anzahl der Meßwerte im Intervall}\,(t, \ldots, t + \Delta t)}{\text{Gesamtzahl aller Messungen}} = \frac{\Delta N}{N}$$

Für $N \to \infty$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Meßwert im endlichen Intervall $(t, \ldots, t + \Delta t)$ liegt.

Für „differentielle Intervalle“ dt wird die Häufigkeitsverteilung pro Intervalllänge definiert:

$$h(t) = \frac{\text{Anzahl der Meßwerte im Intervall}\,(t,...,t+dt)}{\text{Gesamtzahl aller Messungen} \cdot \text{Intervallänge}} = \frac{dN}{Ndt} = \frac{dn}{dt}$$

Für $N \to \infty$ ergibt sich die *Wahrscheinlichkeitsdichte* $w(t)$ dafür, dass ein Meßwert im differentiellen Intervall $(t,....,t+dt)$ liegt.



In der Physik spielt die ***Gauß‘sche Normalverteilung*** eine zentrale Rolle:

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

μ – Mittelwert, $\mu = \langle t \rangle$

σ – Streuung, $\sigma^2 = \langle (t-\mu)^2 \rangle$

0,4
f(x)
0,3
0,2
0,1
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
x
0
1
2
3
4
5
6
μ − σ
μ
μ + σ
DN9522851A7
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
ZEHN DEUTSCHE MARK
DN9522851A7

Es muß die Normierungsbedingung erfüllt sein:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\,dt = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Meßwert *t* die Größe *a* nicht über-steigt ist

$$p(t<a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{a} \exp\left(-\frac{(t-\langle t\rangle)^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Meßwert in dem Intervall

$$\langle t\rangle - \Delta t_1 \le t \le \langle t\rangle + \Delta t_2$$

liegt, ist:

$$p = p(t < \langle t\rangle + \Delta t_2) - p(t < \langle t\rangle - \Delta t_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\langle t\rangle-\Delta t_1}^{\langle t\rangle+\Delta t_2} \exp\left(-\frac{(t-\langle t\rangle)^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

Speziell ergibt sich:

$$p(\langle t\rangle \pm \sigma) = p(t<\langle t\rangle+\sigma) - p(t<\langle t\rangle-\sigma)$$

$$= 0.683$$

d.h. ein Meßwert befindet sich mit 68.3% iger Wahrscheinlichkeit im Intervall einer Standardabweichung um den Mittelwert. Bei zwei Standard-abweichungen gilt bereits:

$$p(\langle t\rangle \pm 2\sigma) = p(t<\langle t\rangle+2\sigma) - p(t<\langle t\rangle-2\sigma)$$

$$= 0.954 = 95.4\%$$

Fehlerfortpflanzung:

Häufig werden in der Physik Meßergebnisse aus mehreren verschiedenen Größen gewonnen, aus deren Einzelmeßfehlern sich ein Gesamtmeßfehler ergibt.

Beispiel für Fehlerfortpflanzung:

$$s = \frac{1}{2} g\, t^2$$

g – Erdbeschleunigung

t – Fallzeit, s – Fallweg

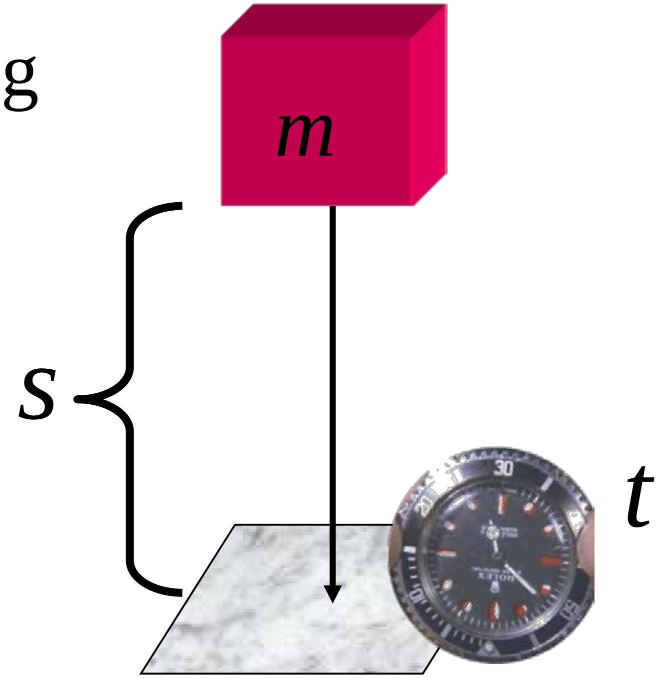
$$g = \frac{2s}{t^2}$$

Meßwerte: $s = (2.12 \pm 0.02)\mathrm{m}$

$t = (0.66 \pm 0.12)\mathrm{s}$

$$\langle \mathrm{g} \rangle = \frac{2\langle \mathrm{s} \rangle}{\langle t \rangle^2} = \frac{2 \cdot 2.12}{0.66^2} = 9.73 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Messung der Erdbeschleunigung



Der Gesamtfehler σ_g für g berechnet sich aus den Einzelfehlern σ_s und σ_t wie folgt:

$$\boxed{\sigma_g^2 = \left(\left. \frac{\partial g(s,t)}{\partial s} \right|_{\substack{s=\langle s\rangle \\ t=\langle t\rangle}} \right)^2 \sigma_s^2 + \left(\left. \frac{\partial g(s,t)}{\partial t} \right|_{\substack{s=\langle s\rangle \\ t=\langle t\rangle}} \right)^2 \sigma_t^2}$$

Mit $g(s,t) = \dfrac{2s}{t^2}$ ergibt sich: $\dfrac{\partial g}{\partial s} = \dfrac{2}{t^2}$ $\quad \dfrac{\partial g}{\partial t} = -\dfrac{4s}{t^3}$

Einsetzen von $\langle s\rangle = 2.12\mathrm{m}$ und $\sigma_s = 0.02\mathrm{m}$ sowie $\langle t\rangle = 0.66\mathrm{s}$ und $\sigma_t = 0.12\mathrm{s}$ ergibt für den Gesamtfehler σ_g von g :

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{2}{0.66^2\mathrm{s}^2}\right)^2 \cdot (0.02\mathrm{m})^2 + \left(-\frac{4\cdot 2.12\mathrm{m}}{0.66^3\mathrm{s}^3}\right)^2 \cdot (0.12\mathrm{s})^2}$$

$$= \sqrt{0.008431\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4} + 12.52825\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}} = 3.54\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \Rightarrow \qquad g = (9.7 \pm 3.5)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Allgemein gilt für den Meßfehler σ einer Größe $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die aus den n Meßwerten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Einzelfehlern $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ zusammengesetzt ist:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} \right|_{\substack{x_1 = \langle x_1 \rangle \\ \vdots \\ x_n = \langle x_n \rangle}} \right)^2 \sigma_k^2$$

Manchmal wird der Gesamtfehler auch anders definiert:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \left| \left. \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} \right|_{\substack{x_1 = \langle x_1 \rangle \\ \vdots \\ x_n = \langle x_n \rangle}} \right| \sigma_k$$