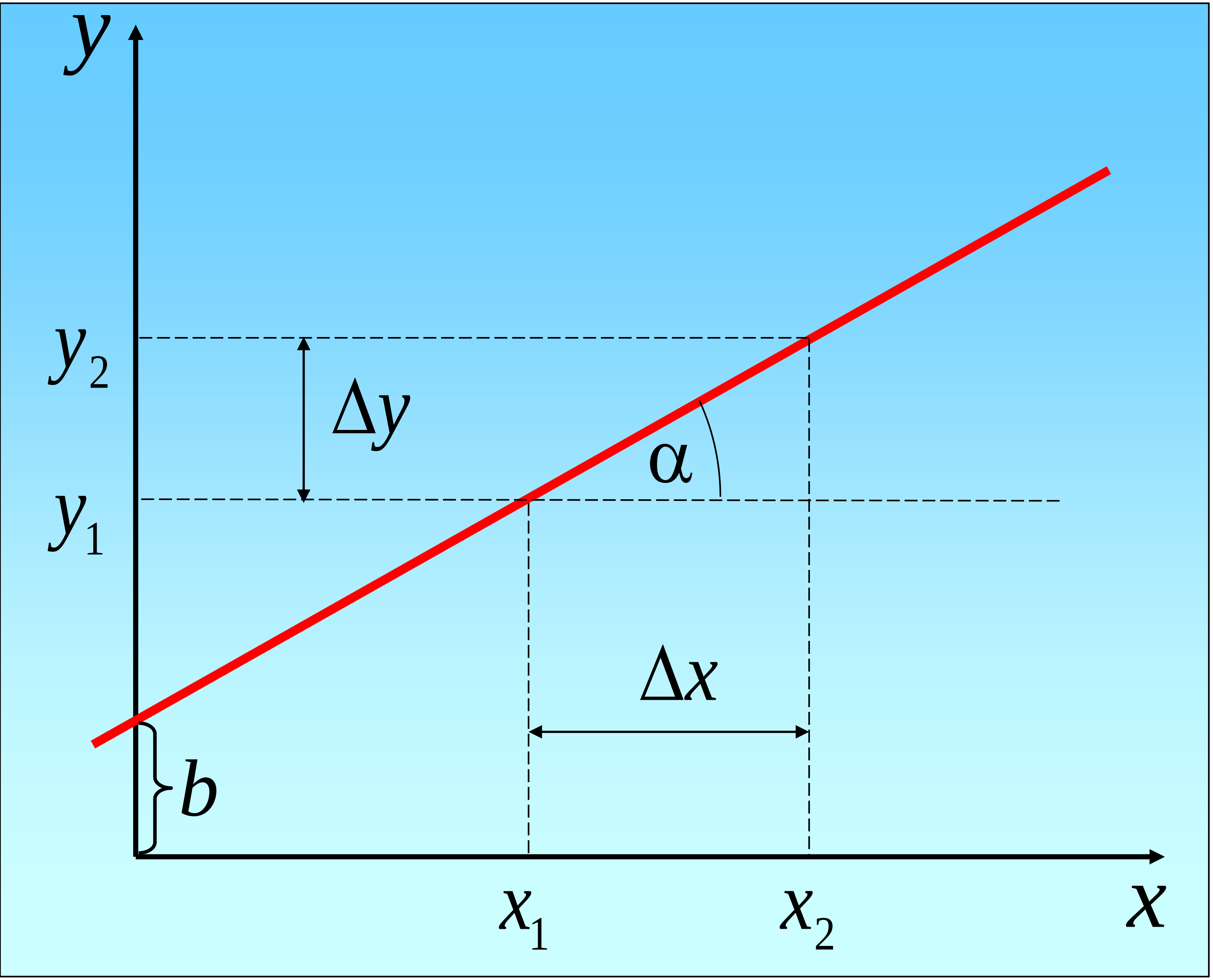
2. Differential- und Integralrechnung

2.1 Differentialrechnung in 1D



(i) Die Steigung einer Geraden

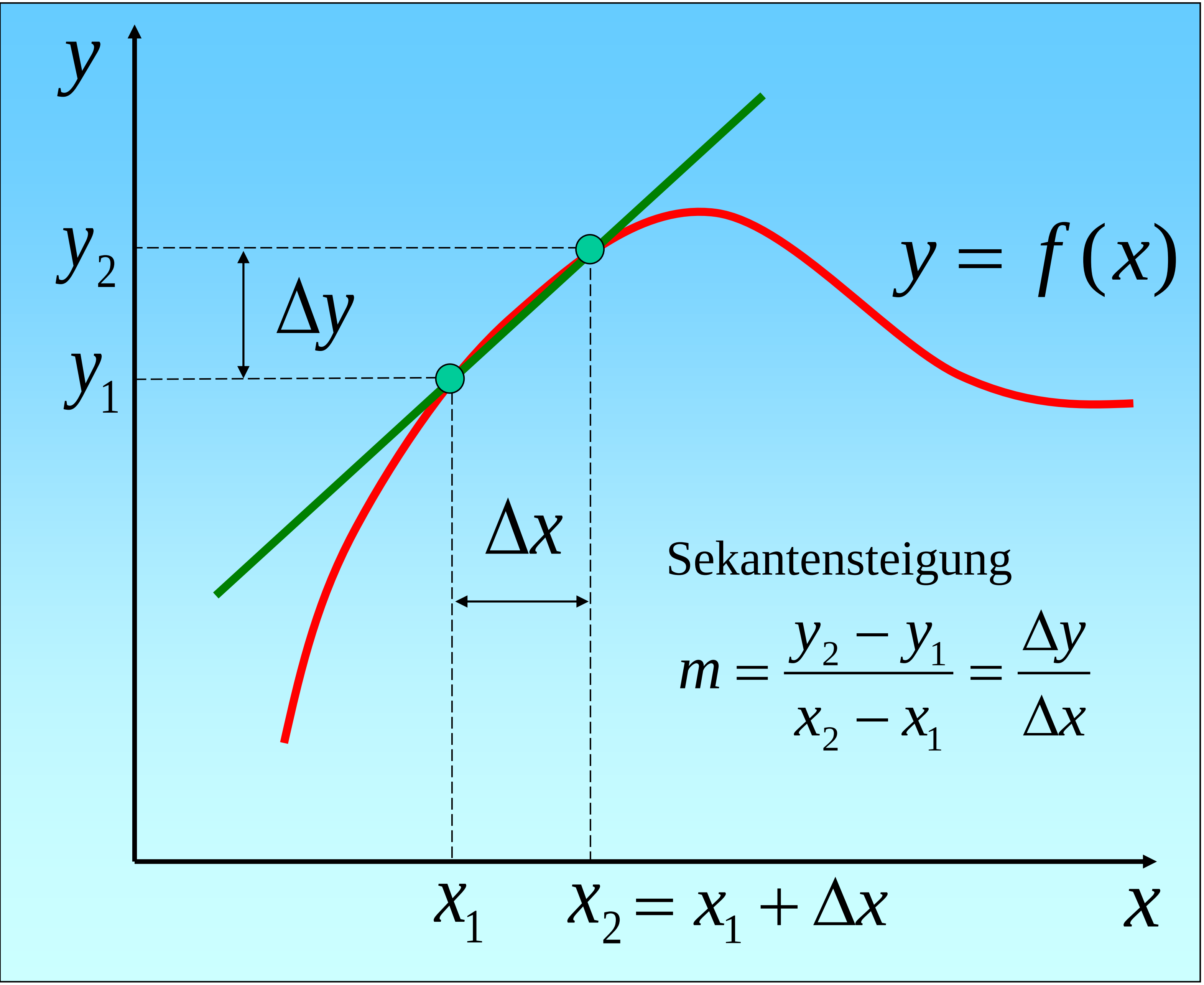
Geradengleichung:

$$y(x) = m \cdot x + b$$

Die *Steigung* einer Geraden ist definiert als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$

Ihr Wert ist überall gleich.

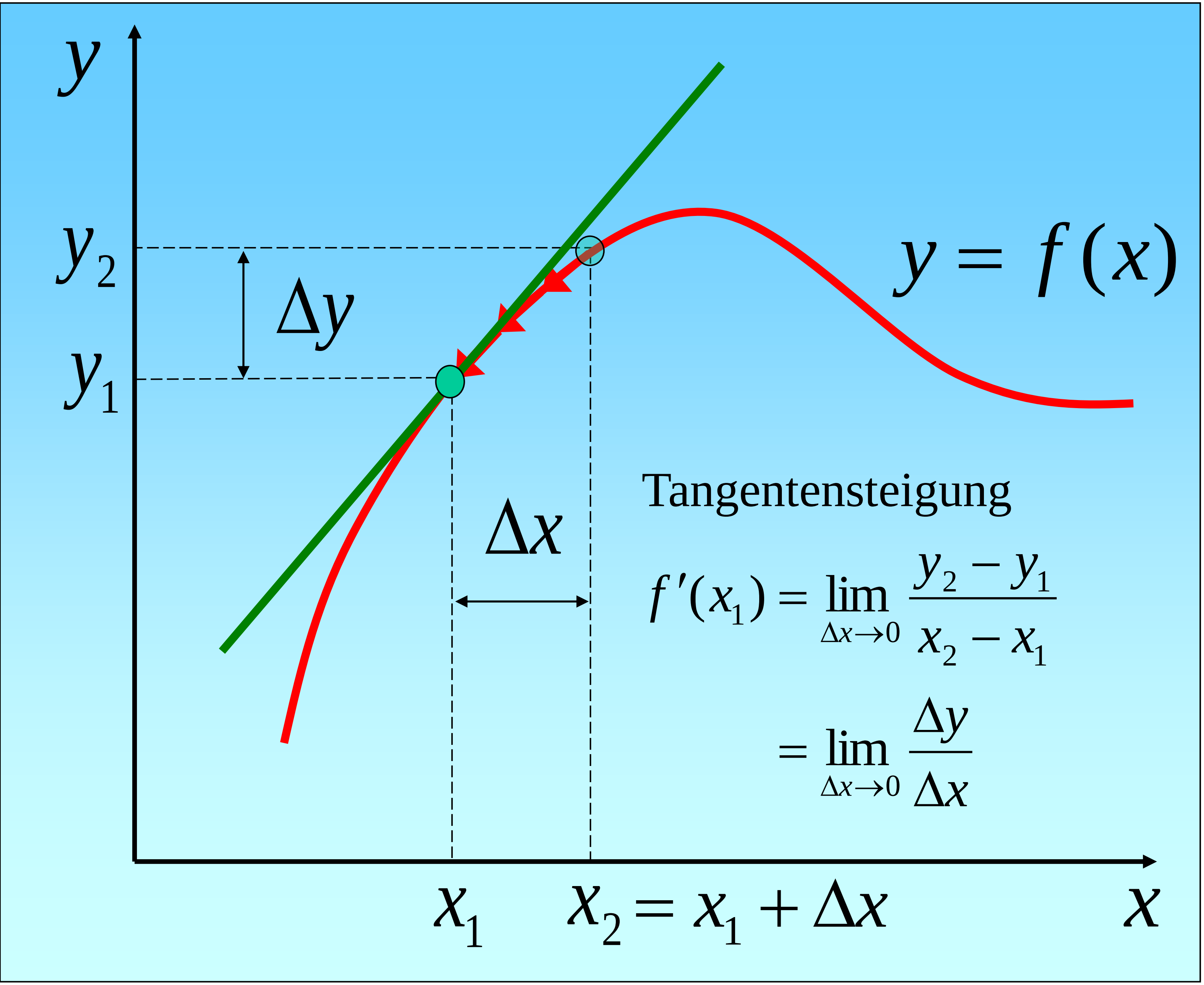


(ii) Die Steigung einer beliebigen Funktion – Die Ableitung

Bei nichtlinearen Funktionen ändert sich die Steigung abhängig vom Argument *x*.

Hier muß die Steigung als Grenzwert in einem Punkt angegeben werden.

Definition der Ableitung



Die Steigung der Funktion $f(x)$ im Punkt x_1 heißt *Ableitung* $f'(x_1)$. Die Ableitung ist der Grenzwert der Sekanten-steigungen für $\Delta x \to 0$. Die Ablei-tung ist also die Steigung der Tangente der Funktion $f(x)$ im Punkt x_1.

Beispiel:

Berechnung der Ableitung der Funktion:

$$y = f(x) = a x^2$$

Der Differenzenquotient ist:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_1 + \Delta x)^2 - a x_1^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{a\left(x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - x_1^2\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{a\left(2x_1\Delta x + \Delta x^2\right)}{\Delta x}$$

Dann muß der Grenzübergang erfolgen, wobei $x_1 = x$ gesetzt wird:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\left(2x\Delta x + \Delta x^2\right)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2ax + a\Delta x\right)$$

$$= 2ax + \lim_{\Delta x \to 0} \left(a\Delta x\right)$$

$$= 2ax + 0$$

$$f(x) = a x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 a x$$

Die Ableitung ist auch wieder eine Funktion, die sog. Ableitungs-funktion oder 1. Ableitung.

Allgemein kann man zeigen, dass bei beliebigen Potenzen *n* die Steigung der Funktion an der Stelle *x* gegeben ist durch

$$f(x) = a\, x^n$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = a\, n\, x^{n-1}$$

Der Differenzenquotient geht nach dem Grenzübergang in den *Differentialquotienten* über:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Leibniz-Schreibweise:

$$y' = f'(x) = \frac{d\,y}{d\,x}$$

Man schreibt deshalb auch häufig die Ableitung einer Funktion in der Form:

$$\frac{d}{dx}\left(a\,x^2\right) = 2\,a\,x$$

(iii) Die Ableitung von elementaren Funktionen

1. $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\,x^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $\frac{d}{dx}\left(\sin x\right) = \cos x$
4. $\frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = -\sin x$
5. $\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = \frac{1}{x}$
6. $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$

(iv) Ableitungsregeln

Für zwei beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und beliebige Zahlen a und b gilt:

(i) Linearität:
$$\frac{d}{dx}\left(a\,f(x) \pm b\,g(x)\right) = a\frac{df(x)}{dx} \pm b\frac{dg(x)}{dx}$$

(ii) Produktregel:
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

(iii) Quotientenregel:
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}}{\left[g(x)\right]^2}$$

Beipiele :

(i) $f(x) = 5x^7 + 6\sin(x) \Rightarrow f'(x) = 5\cdot 7x^6 + 6\cdot\cos(x) = 35x^6 + 6\cos(x)$

(ii) $f(x) = x^2\cdot\sin(x) \Rightarrow f'(x) = 2x\cdot\sin(x) + x^2\cdot\cos(x)$

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x\cdot\left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$

(iv) Kettenregel:
Sei eine Funktion $f(g)$ gegeben, deren Argument $g(x)$ selbst eine Funktion des Arguments x ist, dann gilt:

$$f(x) = f\left(g(x)\right)$$

Die Ableitung dieser Funktion ist in Leibniz‘scher Schreibweise

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Beispiel:

(iv a)

$$f(x) = e^{x^2+1}$$

Zusammengesetzte Funktion

$$f(g) = e^g, \quad g(x) = x^2 + 1$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$= \underset{\frac{df}{dg}}{e^g} \cdot \underset{\frac{dg}{dx}}{2x} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

(iv b) $\quad x(t) = x_0 \sin(\omega t)$

Zusammengesetzte Funktion

$$x(g) = x_0 \sin(g), \quad g(t) = \omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} = x_0 \cos(g) \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t)$$

(v) Die Exponentialfunktion

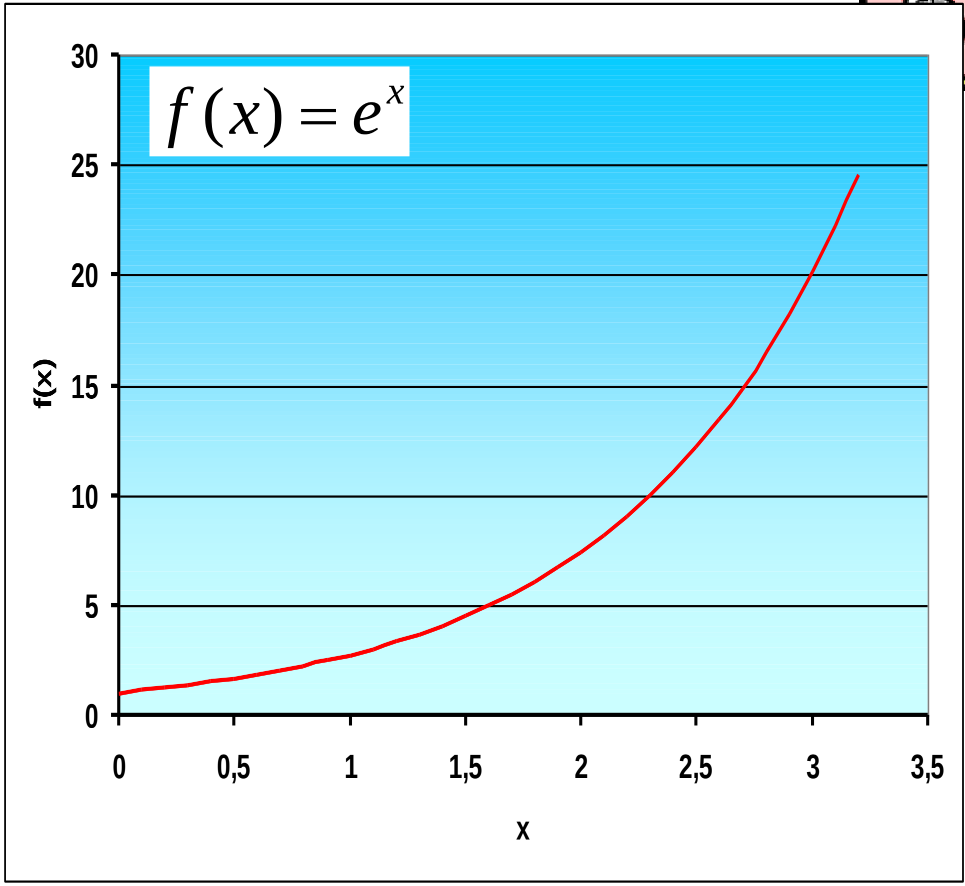
Die Ableitung der Exponentialfunktion ist identisch mit der Funktion selbst:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right) = e^{x}$$

Diese Eigenschaft hat nur die Funktion:

$$f(x) = ae^{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = ae^{x}$$

Dies ist für die Lösung von sog. „Differentialgleichungen“ fundamental, die für die Physik sehr wichtig sind. Naturgesetze sind häufig in Form von Differentialgleichungen formuliert, z.B. das 2. Newton‘sche Axiom (⇒ Abschnitt 2.2.4 der Vorlesung)

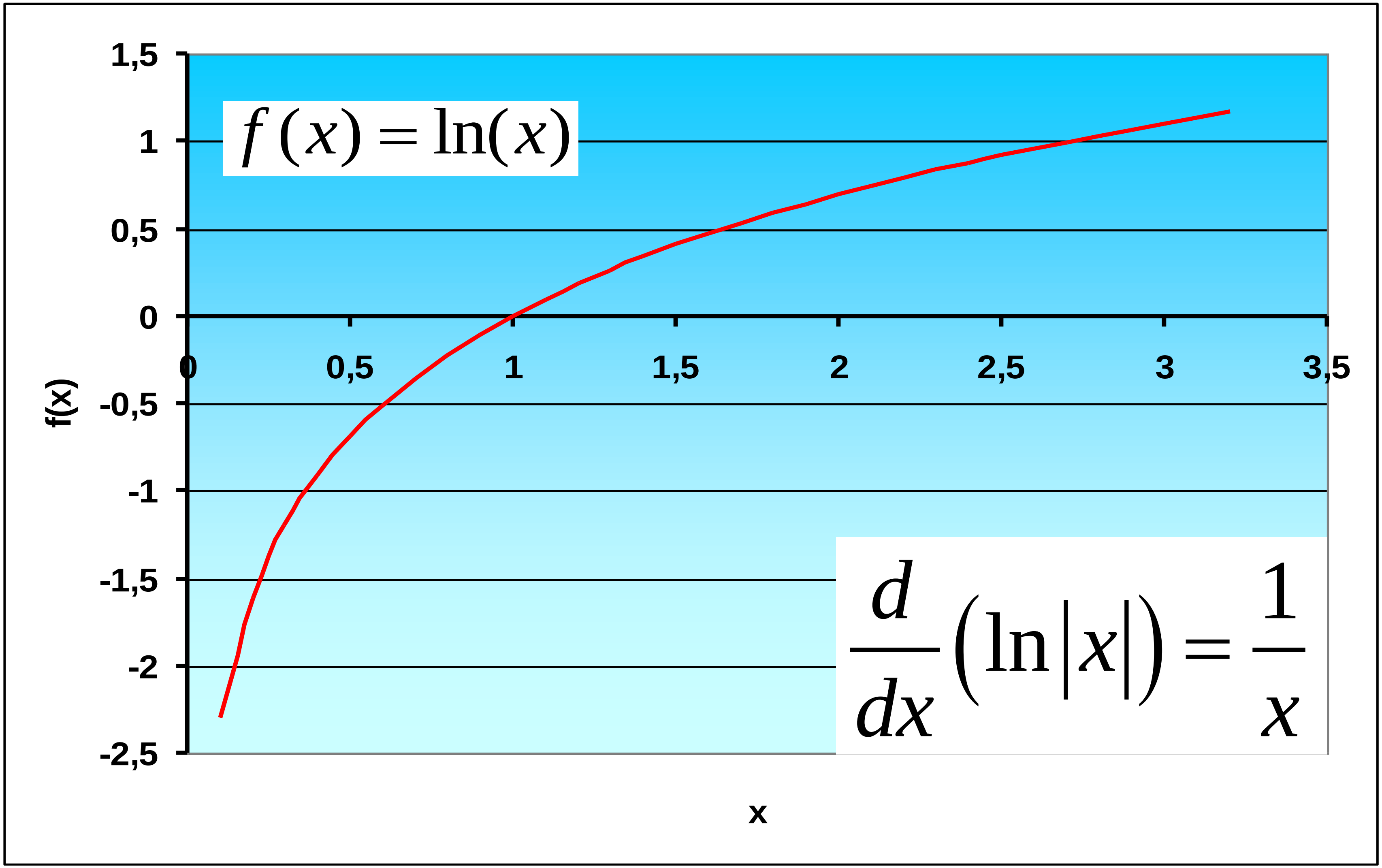


Die Basis der Exponentialfunktion ist die Euler‘sche Zahl e = 2.71818... . Die Exponentialfunktion hat die wesentliche Eigenschaft:

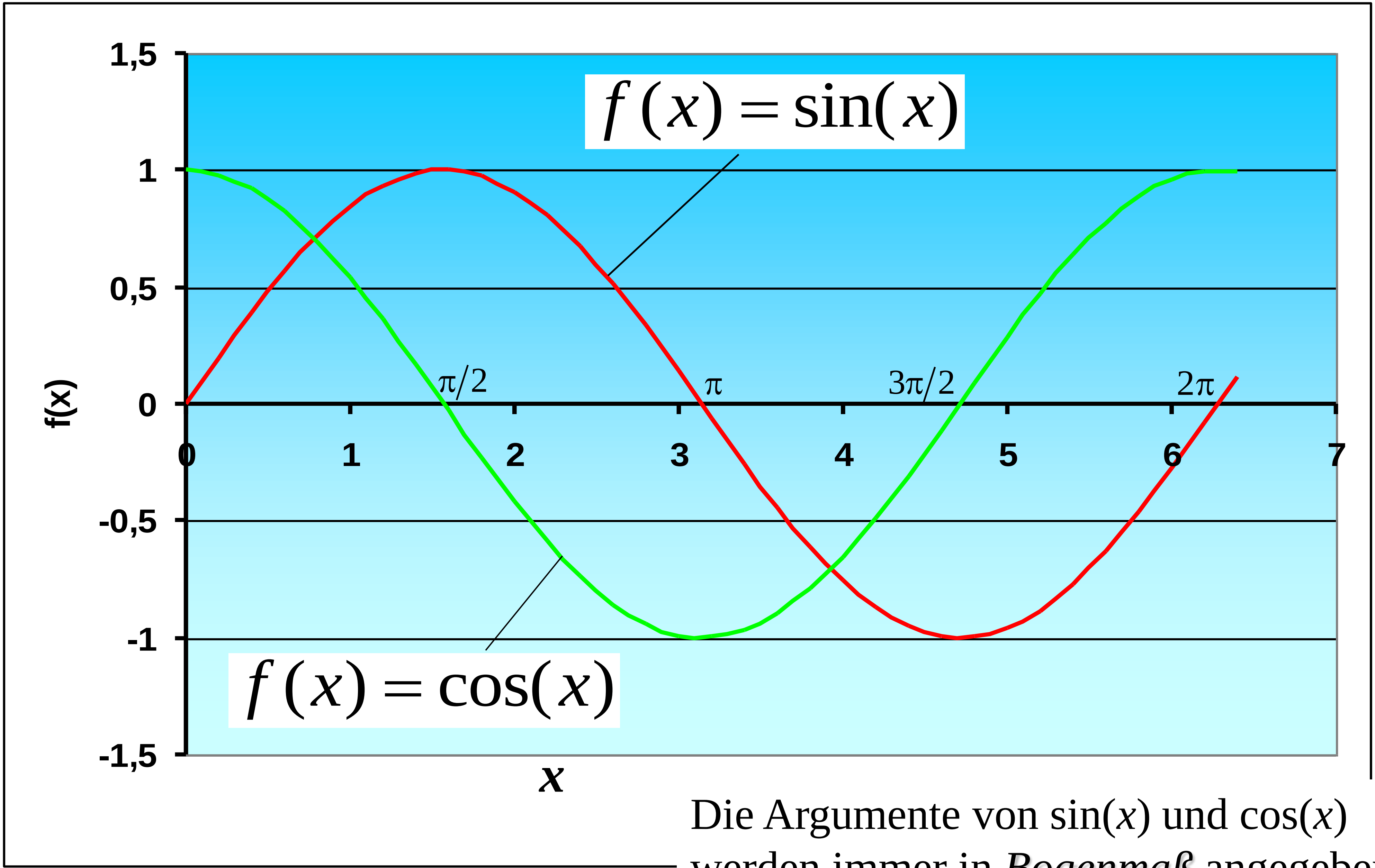
$$e^{x+y} = e^{x} \cdot e^{y}$$

(vi) Die Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion von e^x ist der *„natürliche Logarithmus"* (zur Basis *e*), also $f(x) = \ln(x)$ mit $x = \ln(e^x)$ und $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$



(vii) Sinus- & Cosinusfunktion



Die Argumente von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ werden immer in *Bogenmaß* angegeben.

Für die Ableitungen gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\right) = +\cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x)\right) = -\sin(x)$$

Die zweifache Ableitung von sin (x) und cos(x) führt bis auf das Vorzeichen wieder zu derselben Funktion:

$$\frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\right)}_{\cos(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x)\right)$$

$$= -\sin(x)$$

Schreibweise: $\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

Damit folgt:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin(x)\right) = -\sin(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\cos(x)\right) = -\cos(x)$$

Das ist für die Lösung der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators fundamental:

$x(t)$ – Auslenkung der Masse an einer Feder aus der Ruhelage:

$$\Rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

Lösung: $x(t) = \sin(\omega t)$

2.2 Reihenentwicklungen

Es ist immer möglich, eine Funktion $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

in eine „Reihe“ zu entwickeln. Dazu muß man die Koeffizienten a_n berechnen. Für diese Koeffizienten gilt die Tayler-Formel:

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0)$$

mit $$f^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0}$$

und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (n-Fakultät)

Oft wird die Reihe bei $n = 1$ (lineare Approximation) oder $n = 2$ (quadratische Approximation) abgebrochen.

Beispiele :

(i) $f(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{0!} \cdot f(0) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{1!} \cdot f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) \approx a_0 + a_1 x = x$$

$$\Rightarrow \sin(x) \approx x \quad \text{für} \quad x \ll 1$$

(ii) $f(x) = \cos(x)$

$$\Rightarrow \cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2} x^2 \quad \text{für} \quad x \ll 1$$

Allgemein gilt:

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\approx x$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\approx 1-\frac{1}{2}x^2$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\approx 1+x$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\approx x$$

Derartige Formeln werden z.B. von elektronischen Rechnern zur Bestimmung der Funktionswerte verwendet. Bei den Formeln für sin(x) und cos(x) ist zu beachten, dass x in Bogenmaß gewählt werden muß !!

2.3 Partielle Ableitungen

Häufig gibt es in der Physik Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen, z.B. die Gravitationskraft

$$F_G(m_1, m_2, r) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Man kann derartige Funktionen „*partiell*" nach jeweils einer Variablen ableiten, indem alle anderen Variablen konstant gehalten werden:

$$\left(\frac{\partial F_G}{\partial m_1}\right)_{m_2, r = \text{const}} = \gamma \frac{m_2}{r^2}$$

$$\left(\frac{\partial F_G}{\partial m_2}\right)_{m_1, r = \text{const}} = \gamma \frac{m_1}{r^2}$$

$$\left(\frac{\partial F_G}{\partial r}\right)_{m_1, m_2 = \text{const}} = -2\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}$$

Der Operator für die partielle Ableitung wird mit dem geschwungenen ∂ bezeichnet. Allgemein gilt für partielle Ableitungen einer Funktion $f(x,y,z)$, die von drei Variablen x, y, z abhängt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

Beispiel :

$$f(x,y,z) = x^5 \cdot e^{y \cdot z^2} + \ln(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 \cdot e^{y \cdot z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^5 \cdot z^2 \cdot e^{y \cdot z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^5 \cdot y \cdot 2z \cdot e^{y \cdot z^2} + \frac{1}{z}$$

2.4 Ableitung von Vektoren

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Eine Bewegung im dreidimensionalen Raum kann durch einen Ortsvektor dargestellt werden, dessen Komponenten Funktionen der Zeit sind.

Alle Punkte, die dieser Ortsvektor mit der Zeit erreicht, beschreiben die Bahnkurve eines Massepunktes im Raum. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit also:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} dx(t)/dt \\ dy(t)/dt \\ dz(t)/dt \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 5t^3 \\ 7t \\ \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3t^2 \\ 7 \cdot 1 \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15t^2 \\ 7 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$