technische universität dortmund

PHYSIK A2

WS 2019/20

Zusatzvorlesung

Prof. Dr. Manfred Bayer

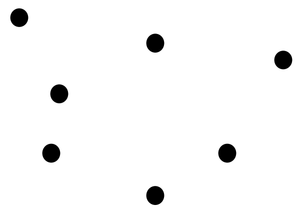
Inhalt der Zusatzvorlesung zur Physik A2

Vektoren & Vektorrechnung
Differential- und Integralrechnung
Gradient, Divergenz und Rotation: Differentialrechnung in 3D
Integralrechnung in 3D – Volumenintegrale
Berechnung von Trägheitsmomenten
Komplexe Zahlen
Einfache Differentialgleichungen
Die Wellengleichung
Vektorfelder
Gradient, Divergenz & Rotation
Der Fluß eines Vektorfeldes
Der Gauß'sche und der Stokes'sche Integralsatz
Allgemeine mathematische Wiederholung

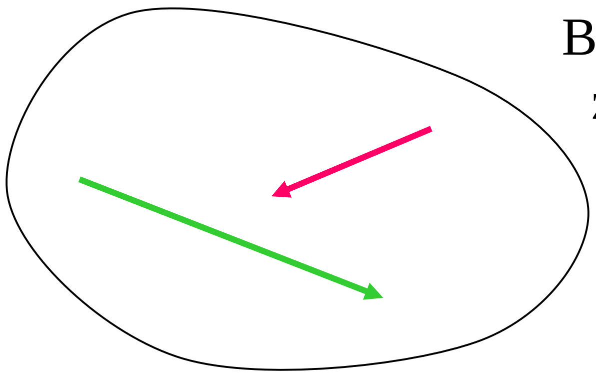
1. Vektoren & Vektorrechnung

1.1 Grundlagen

Punktraum

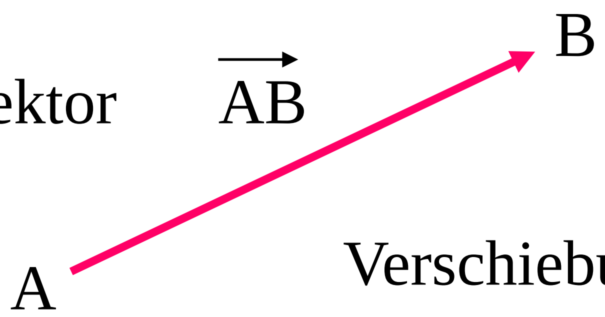


Vektorraum



Beziehung zwischen Punkten

Vektor $\overrightarrow{AB}$



Verschiebung

(i) Axiome eines linearen Vektorraums

$$\exists \text{ eine Addition}: \ \vec{a},\vec{b} \in V \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} \in V$$

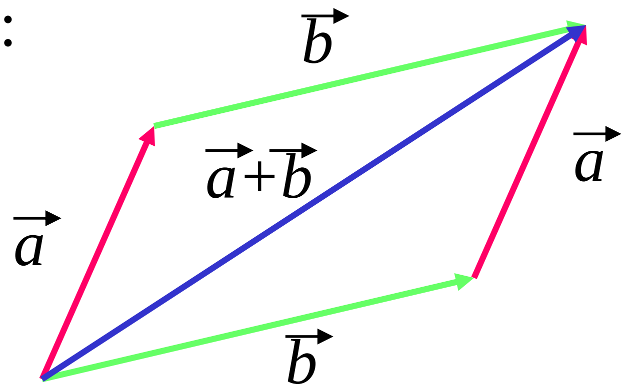
$$\text{A1:} \quad \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$

$$\text{A2:} \quad \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$$

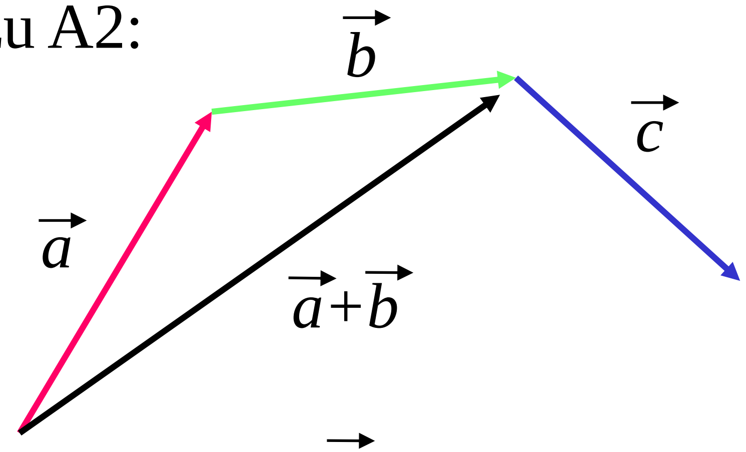
$$\text{A3:} \quad \exists \quad \underset{\text{Nullvektor}}{\vec{0}} \quad : \quad \vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$$

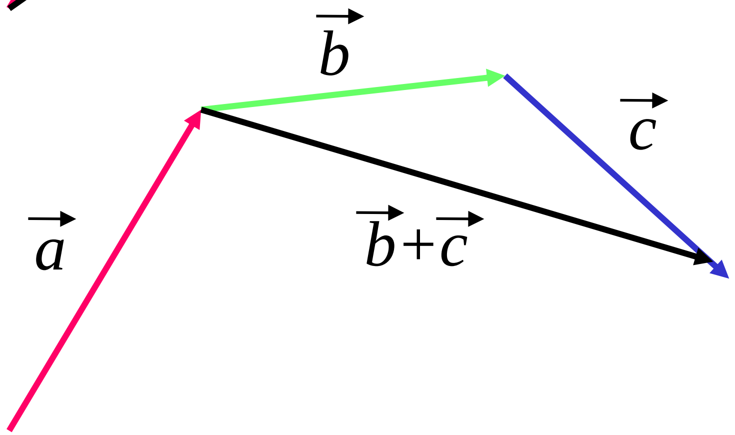
$$\text{A4:} \quad \exists\left(-\vec{a}\right): \ \vec{a}+\left(-\vec{a}\right) = \vec{0} \ \text{ für } \ \forall \vec{a} \in V$$

Zu A1:



zu A2:





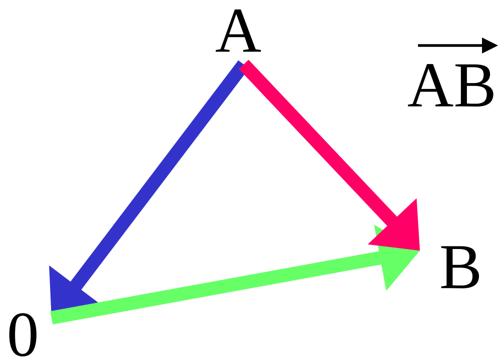
zu A3 & A4:

Nullvektor : $\overrightarrow{AA} \leftrightarrow \vec{0} \in V$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \rightarrow +\vec{a} \\ \overrightarrow{BA} \rightarrow -\vec{a} \end{array}\right\} \quad \text{Verschiebung}$$

(ii) Darstellung von Vektoren

Wähle einen Punkt 0 (Ursprung). Dann ist jedem Punkt A der Ortsvektor $\overrightarrow{0A}$ und einem Punkt B der Ortsvektor $\overrightarrow{0B}$ zugeordnet. Ein beliebiger Vektor $\overrightarrow{AB}$ kann immer durch diese Vektoren dargestellt werden:



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$$

Man benötigt also nur die Koordinaten des Punktes A um den Vektor $\overrightarrow{0A}$ darzustellen.

(iii) Komponentenschreibweise:

Vektoren werden durch mehrere Werte (Komponenten bzw. Koordinaten) festgelegt. Die übliche Schreibweise für Vektoren in 3D ist:

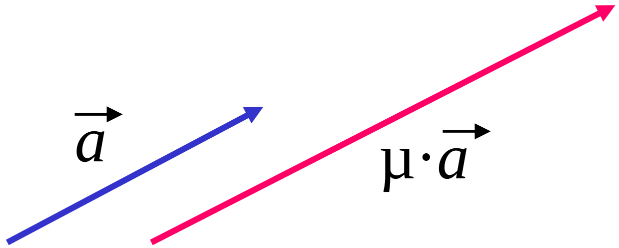
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

Die Vektoraddition in Komponenten-schreibweise lautet:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

(iv) Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

$$\vec{a} \in V, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \mu \cdot \vec{a} \in V$$



$$\text{M1}: \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$\text{M2}: \quad \alpha \cdot \left(\beta \cdot \vec{a}\right) = \left(\alpha \cdot \beta\right) \cdot \vec{a}$$

$$\text{M3}: \quad \alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

Multiplikation in Komponenten-schreibweise:

$$\mu \cdot \vec{a} = \mu \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \cdot a_x \\ \mu \cdot a_y \\ \mu \cdot a_z \end{pmatrix}$$

(v) Betrag eines Vektors

Der Betrag ist eine *reelle positive Zahl* und gibt die *Länge* eines Vektors an unabhängig von seiner Richtung.
In einem rechtwinkligen Koordinaten-system kann er aus den Komponenten berechnet werden nach:

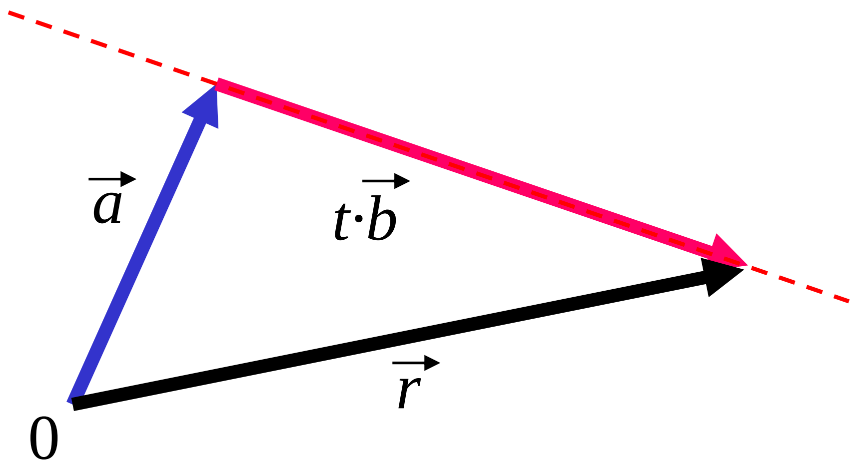
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Als Schreibweise hat sich auch etabliert:

$$\vec{a} - \text{Vektor}$$

$$a = |\vec{a}| - \text{Betrag}$$

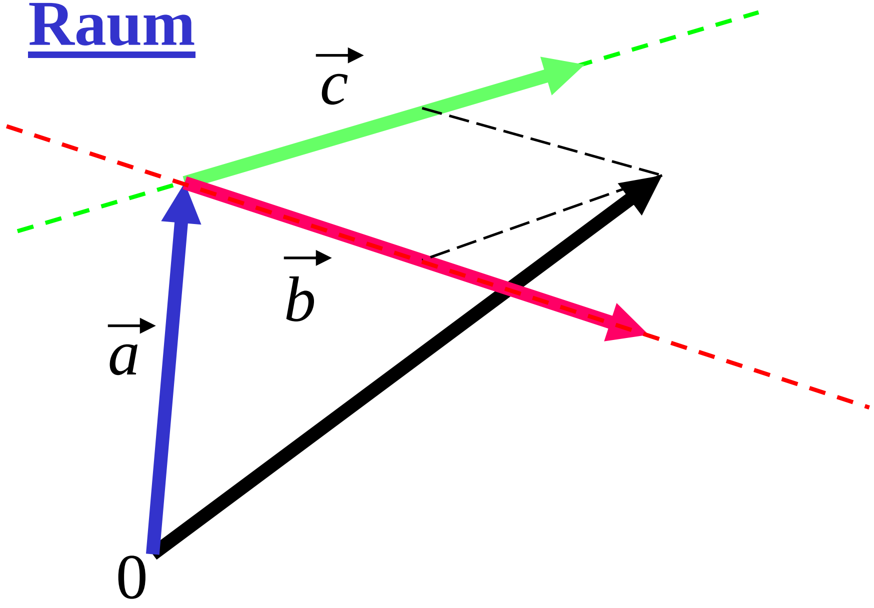
(vi) Die Punkte auf einer Geraden im Raum



Sei $\vec{a}$ ein Vektor zu einem Punkt auf einer Geraden und $\vec{b}$ ein Richtungsvektor, dann gilt für alle Punkte $\vec{r}$ auf der Graden:

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{b}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(vii) Die Punkte einer Ebene im Raum



Sei $\vec{a}$ ein Vektor zu einem Punkt, der in einer Ebene liegt. Seien ferner die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Richtungsvektorn, dann gilt für alle Punkte $\vec{r}$ in der Ebene:

$$\vec{r}(t_1, t_2) = \vec{a} + t_1 \cdot \vec{b} + t_2 \cdot \vec{c}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

(viii) Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Gegeben seien m Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$.

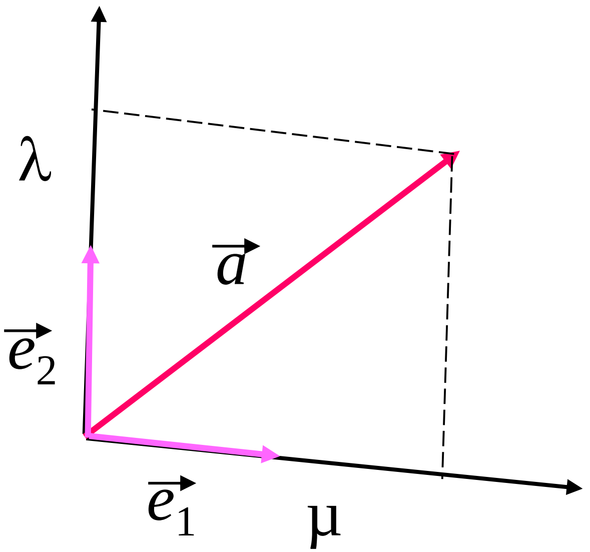
Die Vektoren heißen linear abhängig falls es m reelle Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, so dass gilt:

$$\mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \cdots + \mu_{m-1} \vec{a}_{m-1} = \mu_m \vec{a}_m$$

Andernfalls heißen die Vektoren linear unabhängig.

(ix) Basisvektoren

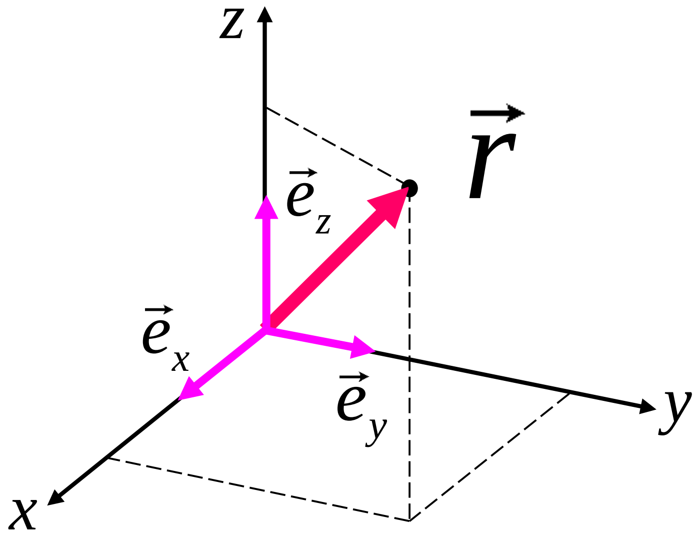
Jeder Vektor ist durch die *Basisvektoren* darstellbar. Ein 2D Beispiel lautet wie folgt:



Der Vektor $\vec{a}$ soll durch die Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ dargestellt werden:

$$\vec{a} = \mu\,\vec{e}_1 + \lambda\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Am einfachsten ist es, wenn die Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen und die Länge Eins haben.



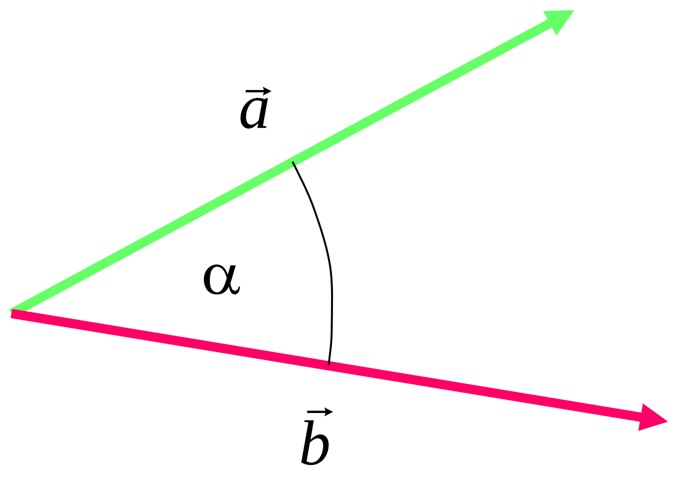
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$$

1.2 Skalarprodukt

"Vektor • Vektor = Zahl"

$$\vec{a},\vec{b} \in \mathrm{V} \quad \rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{a},\vec{b}\right) \in \mathbb{R}$$



Axiome:

S1: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

S2: $\vec{a}\cdot\lambda\vec{b} = \left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

S3: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

S4: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ für alle $\vec{a} \in \mathrm{V}$ ist

äquivalent zu $\vec{b} = 0$

Die Definition des Skalarprodukts

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

erfüllt alle Axiome. Daraus folgt:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$

und umgekehrt:

Falls $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ dann gilt:

$\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a} \perp \vec{b}$

Die skalare Multiplikation hat in Komponentenschreibweise die Form:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Aus der Definition

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

folgt außerdem

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Damit kann man den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen.

Beispiel: Wie groß ist der Winkel, den die beiden folgenden Vektoren miteinander einschließen?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 4.9 \\ -2.3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6.8 \\ 0.4 \\ 5.1 \end{pmatrix}$$

Die Beträge der Vektoren sind

$$|\vec{a}| = \sqrt{3.7^2 + 4.9^2 + 2.3^2} = 6.557$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{6.8^2 + 0.4^2 + 5.1^2} = 8.509$$

Andererseits ergibt das direkte Ausrechnen des Skalarproduktes:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 4.9 \\ -2.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6.8 \\ 0.4 \\ 5.1 \end{pmatrix}$$

$$= -3.7\cdot 6.8 + 4.9\cdot 0.4 - 2.3\cdot 5.1$$

$$= -34.93$$

Damit folgt sofort:

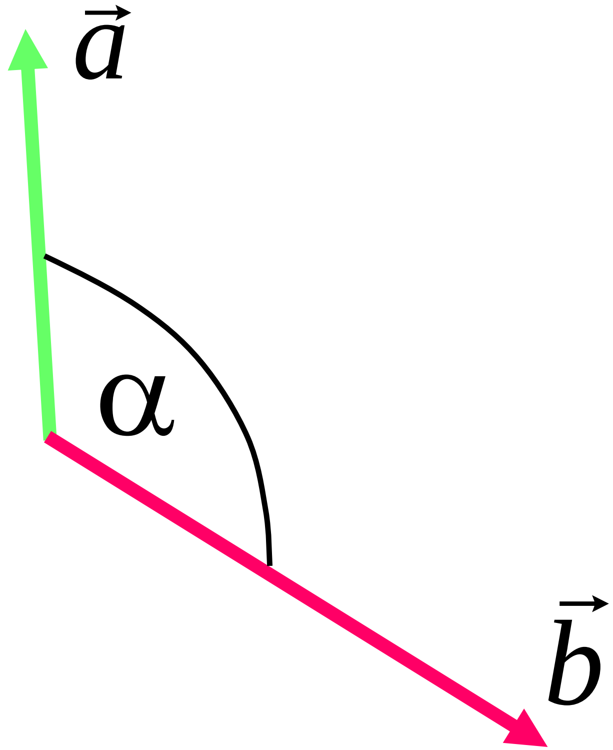
$$\cos\alpha = \frac{-34.93}{6.557\cdot 8.509} = -0.6261$$

Der Winkel zwischen den Vektoren ist also:

$$\alpha = \arccos(-0.6261)$$

$$= 128.76°$$

Die Vektoren sehen also so aus:



1.3 Vektorprodukt

"Vektor × Vektor = Vektor"

$$\vec{a},\vec{b} \in \mathrm{V} \quad \rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b} = [\vec{a},\vec{b}] \in \mathrm{V}$$

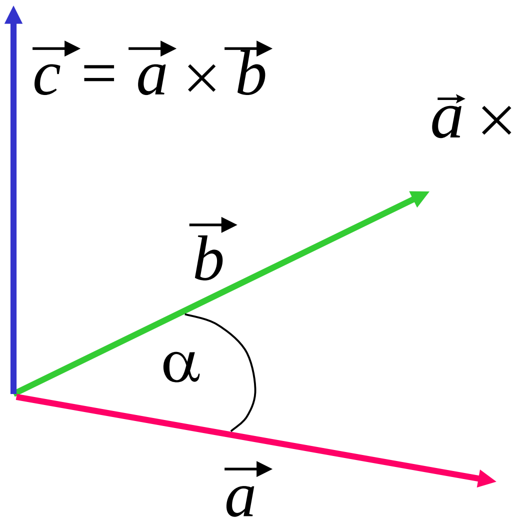
Axiome:

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$ mit:

(i) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

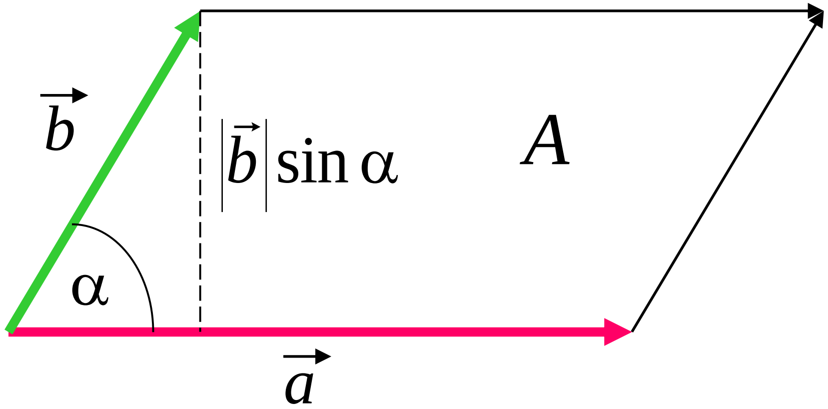
(ii) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bilden ein "Rechtssystem"

(iii) $|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$



$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha\right)\vec{n}$$

mit $\vec{n} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$



Fläche des Parallelogramms

$$A = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = |\vec{a}\times\vec{b}|$$

Eigenschaften:

V1: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

V2: $\vec{a}\times\lambda\vec{b} = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

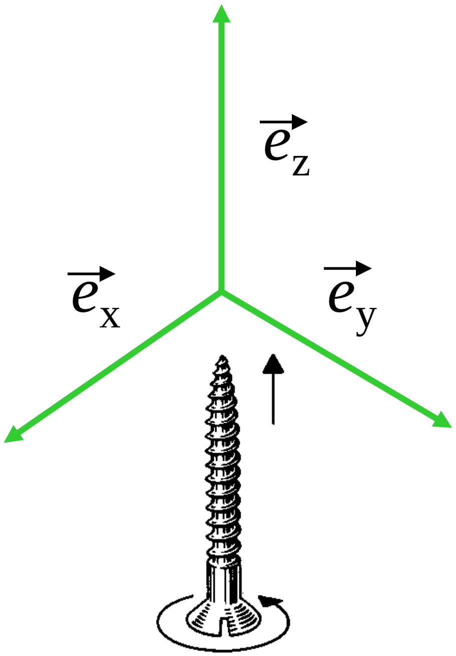
V3: $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

V4: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ falls $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$

oder $\vec{a} \parallel \vec{b}$

V5: $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

Basisvektoren



$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ bilden ein Rechtssystem

$\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y$ "

$\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_x$ "

$\vec{e}_x, \vec{e}_z, \vec{e}_y$ bilden ein Linkssystem

„zyklische Vertauschung"

Vektorprodukt der Basisvektoren:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0}$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \qquad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\vec{e}_j \times \vec{e}_i$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \qquad \text{für} \quad i, j = x, y, z$$

Vektorprodukt beliebiger Vektoren:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = {} & a_x b_y (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + a_x b_z (\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \\ & + a_y b_x (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + a_y b_z (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) \\ & + a_z b_x (\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + a_z b_y (\vec{e}_z \times \vec{e}_y)\end{aligned}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_y \vec{e}_z - a_x b_z \vec{e}_y$$
$$- a_y b_x \vec{e}_z + a_y b_z \vec{e}_x$$
$$+ a_z b_x \vec{e}_y - a_z b_y \vec{e}_x$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x$$
$$+ (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y$$
$$+ (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z$$

Darstellung als Determinante

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

In Komponentenschreibweise:

$$\text{"Kreuzprodukt":}\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

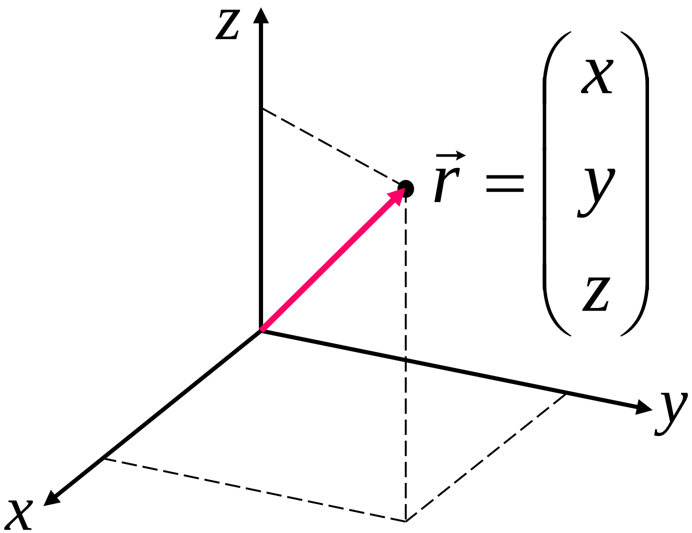
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ \boxed{a_x b_y - a_y b_x} \end{pmatrix}$$

$$\text{Beispiel :}\qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 6 - 3\cdot 5 \\ 3\cdot 4 - 1\cdot 6 \\ 1\cdot 5 - 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ +6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1.4 Koordinatensysteme

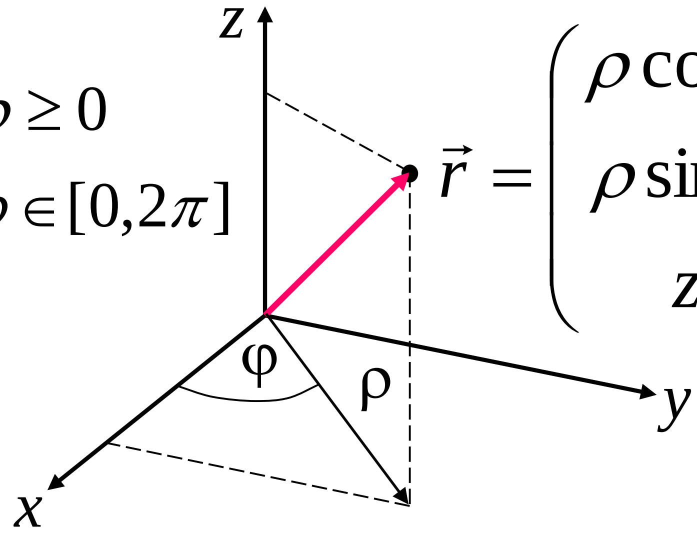
kartesische Koordinaten (*x*, *y*, *z*)



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten (ρ, φ, *z*)

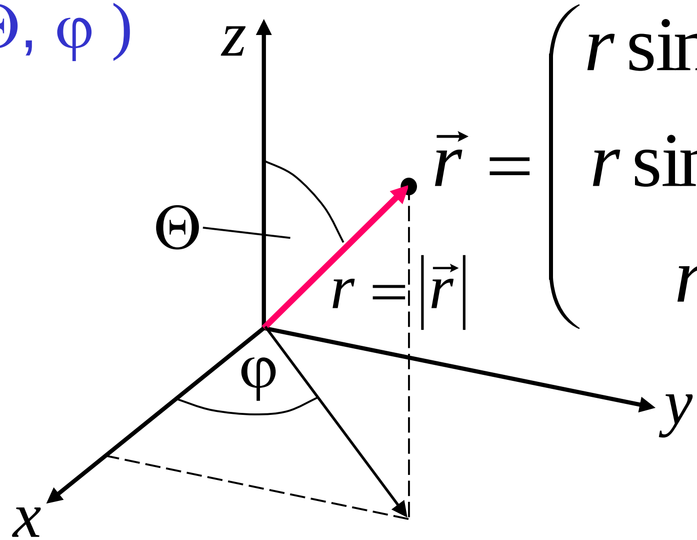
$$\rho \geq 0$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

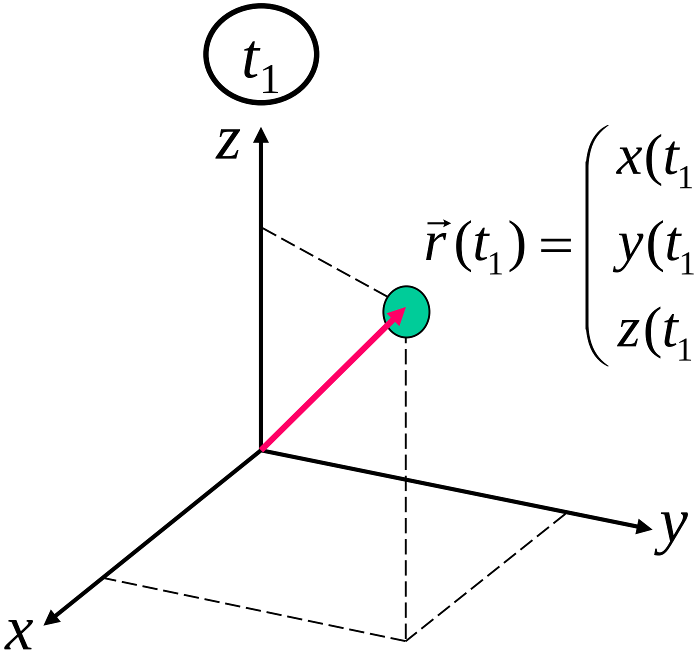
Kugelkoordinaten (*r*, Θ, φ)

$$r \geq 0$$
$$\Theta \in [0, \pi]$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

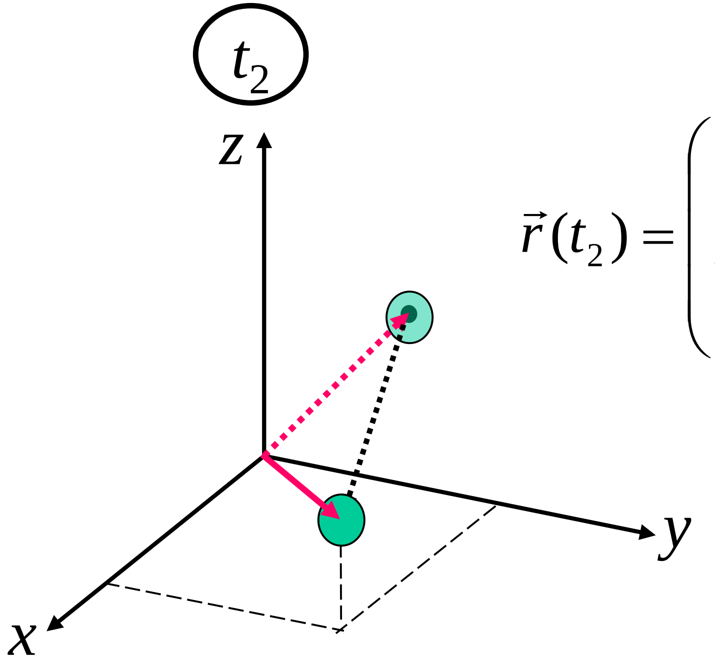


$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \Theta \cdot \cos \varphi \\ r \sin \Theta \cdot \sin \varphi \\ r \cos \Theta \end{pmatrix}$$

1.5 Beschreibung von Bewegungen im 3D Raum



$$\vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \\ z(t_1) \end{pmatrix}$$



$$\vec{r}(t_2) = \begin{pmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \\ z(t_2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Eine Bewegung im dreidimensionalen Raum kann durch einen Vektor dargestellt werden, dessen Komponenten Funktionen der Zeit sind.

Alle Punkte, die dieser Vektor mit der Zeit erreicht, beschreiben die Bahnkurve eines Massepunktes im Raum.