Inhalt der Vorlesung A1

2. Teilchen

A. Einzelne Teilchen

B. Mehrteilchensysteme

Starrer Körper - Bewegung

- Translation
- Rotation

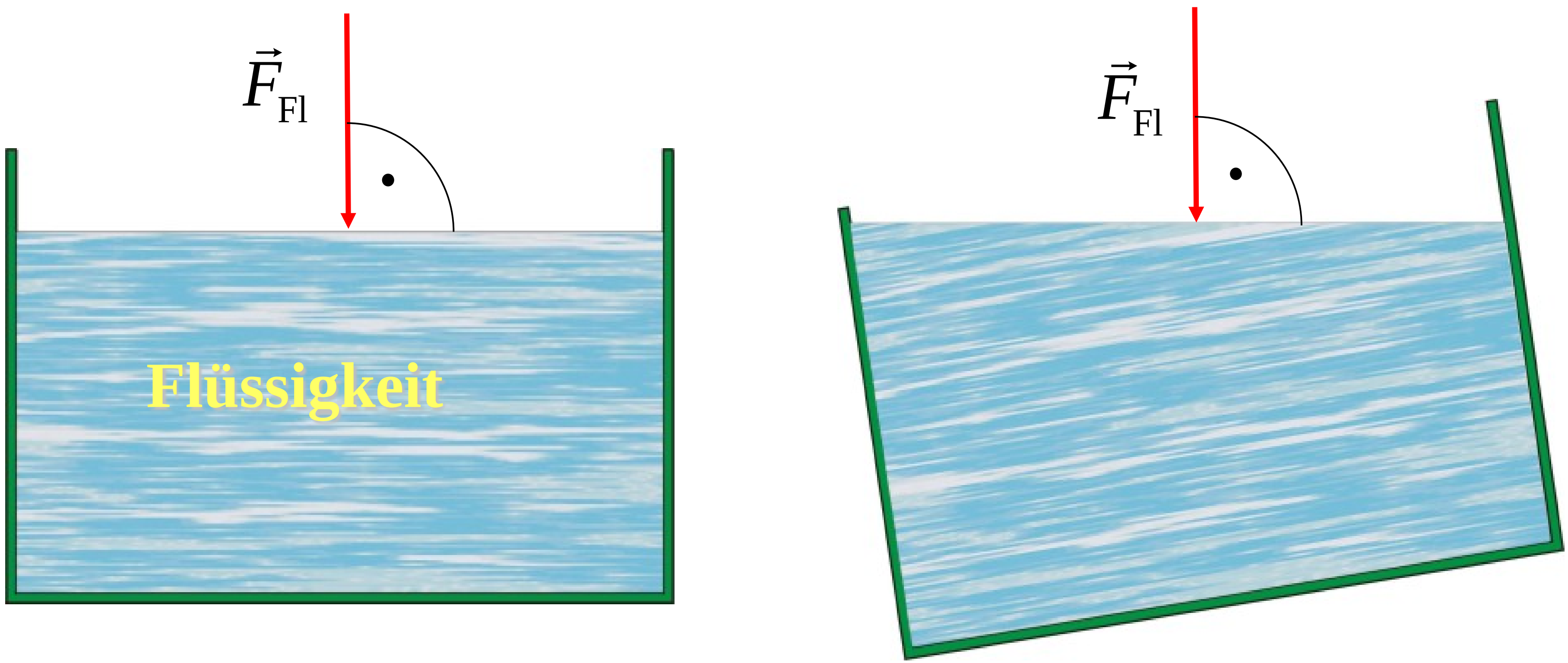
Flüssigkeiten

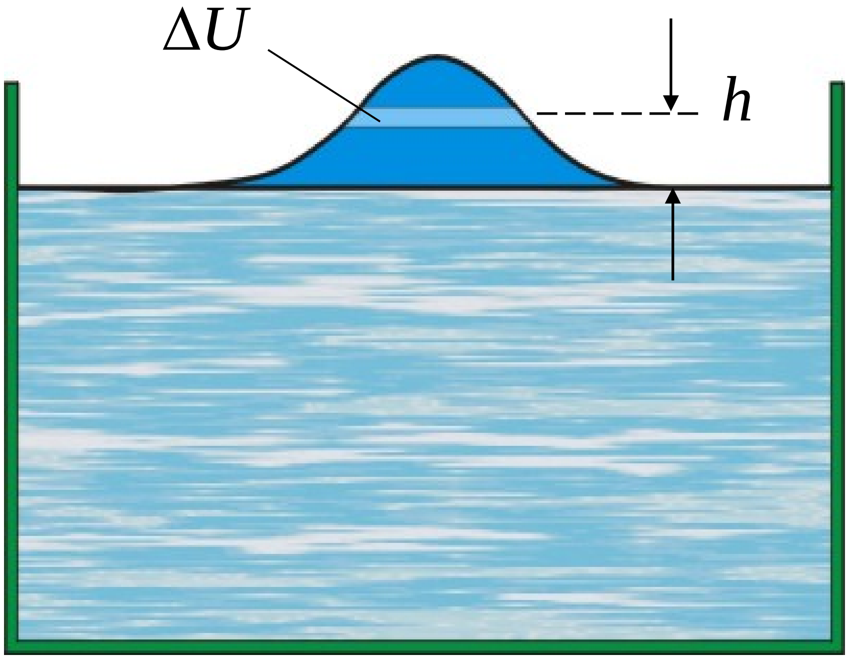
- Hydrostatik
- Hydrodynamik

Hydrostatik

Flüssigkeitsoberflächen

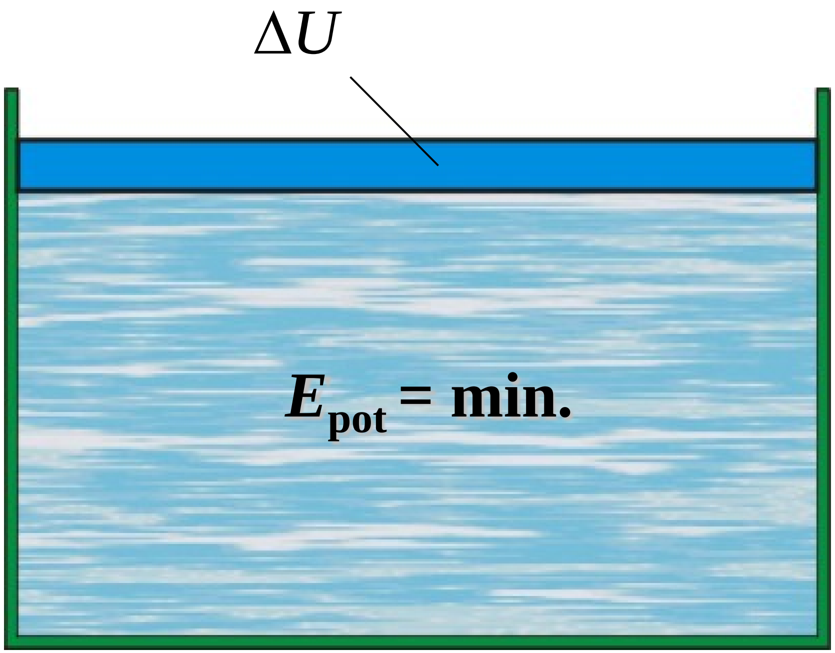
Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist immer senkrecht zu der Richtung der auf sie wirkenden Kraft.





Würde sich ein Flüssigkeitshügel bilden, dann hätte er eine höhere potentielle Energie als seine Umgebung.

Um sie zu minimieren, versuchen alle Flüssigkeitsvolumina die tiefst-möglichen Positionen einzunehmen.

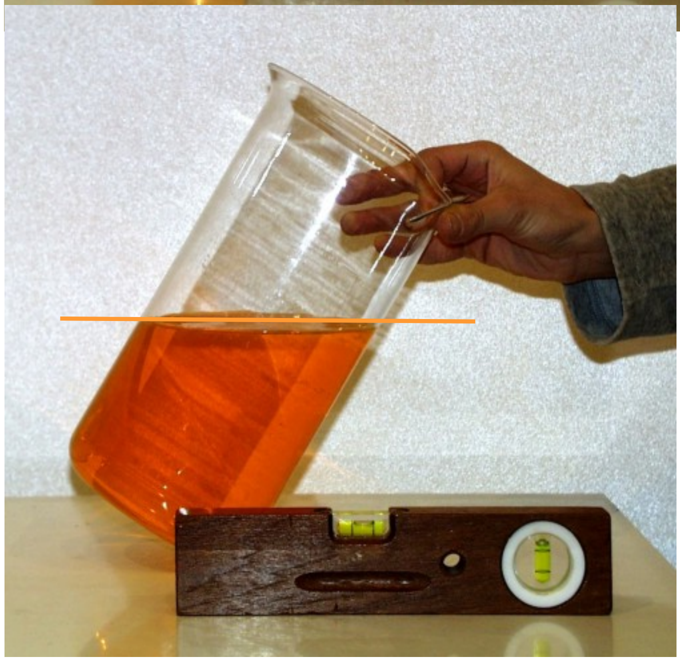


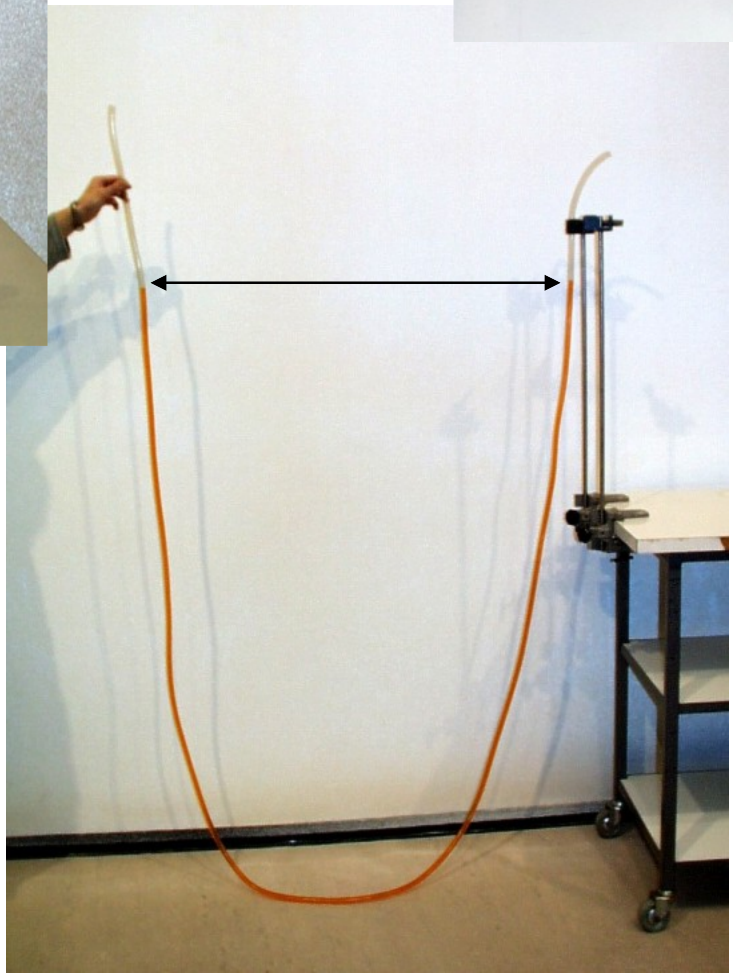
Dies ist erfüllt, wenn die Oberfläche eine horizontale Ebene bildet.

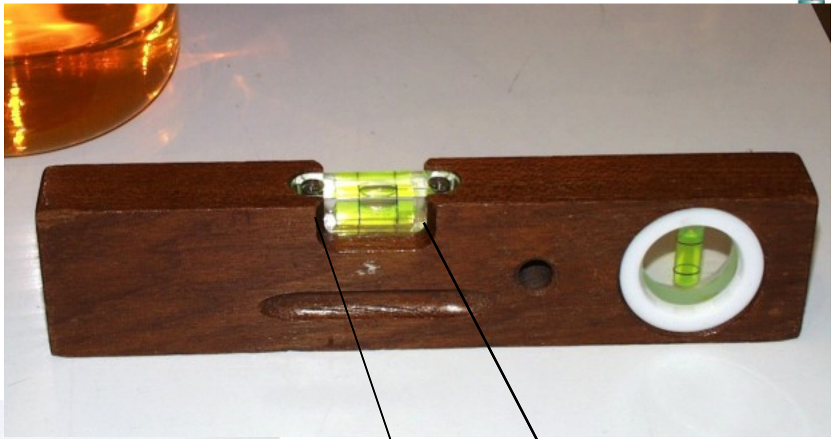
Bei Festkörpern wird dieses „Zerfließen“ durch Reibung oder innere Kräfte verhindert.

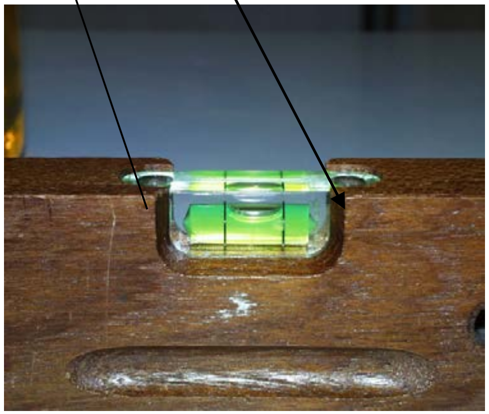
Versuch: Ebener Wasserspiegel

Der Wasserspiegel ist immer eben







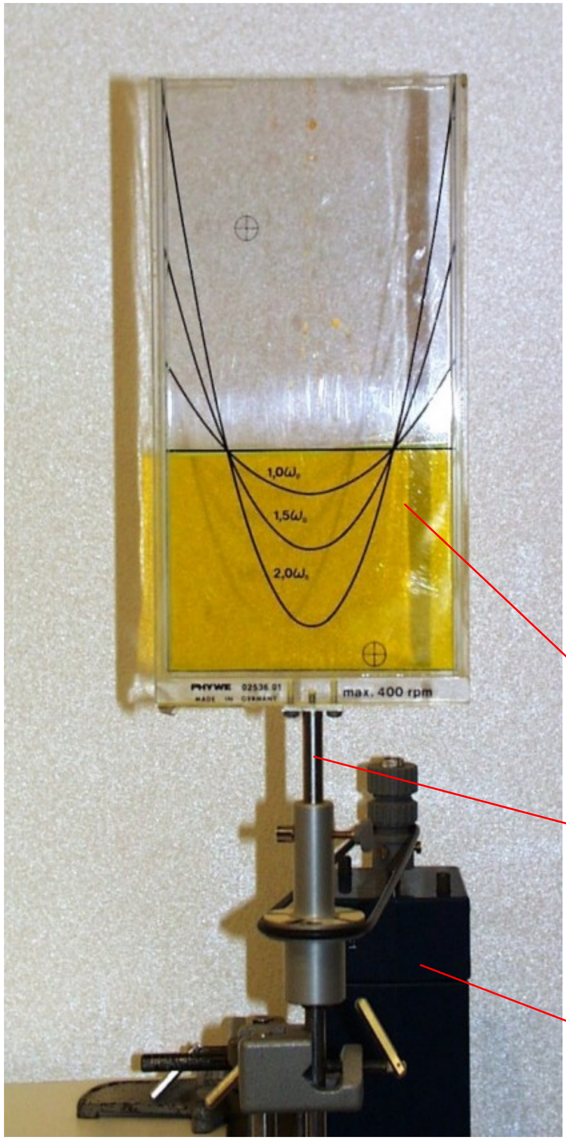


Anwendungen:

Wasserwaage ⇑

⇐ Schlauchwaage

Versuch: Zentrifugalküvette („Newton‘scher Eimer“)



Bei ruhender Küvette ist der Wasserspiegel eben.

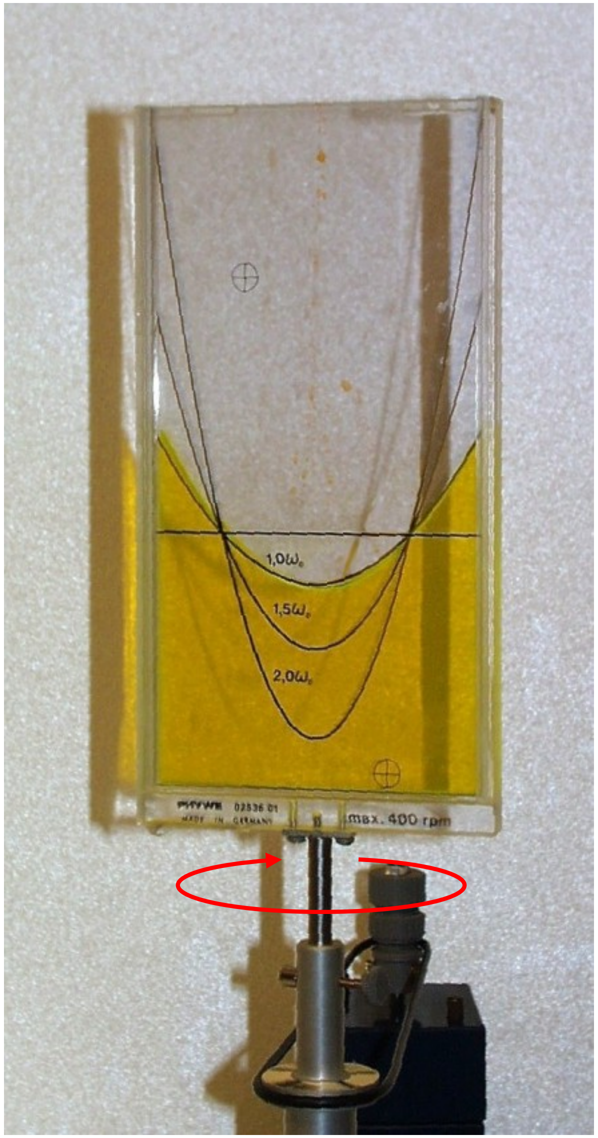
⇐

Bei Rotation nimmt er eine parabolische Form an. ⇒

Küvette

Drehachse

Motor



Der Newton'sche Eimer

In einem zylindrischen Behälter wird eine Flüssigkeit in Rotation versetzt.

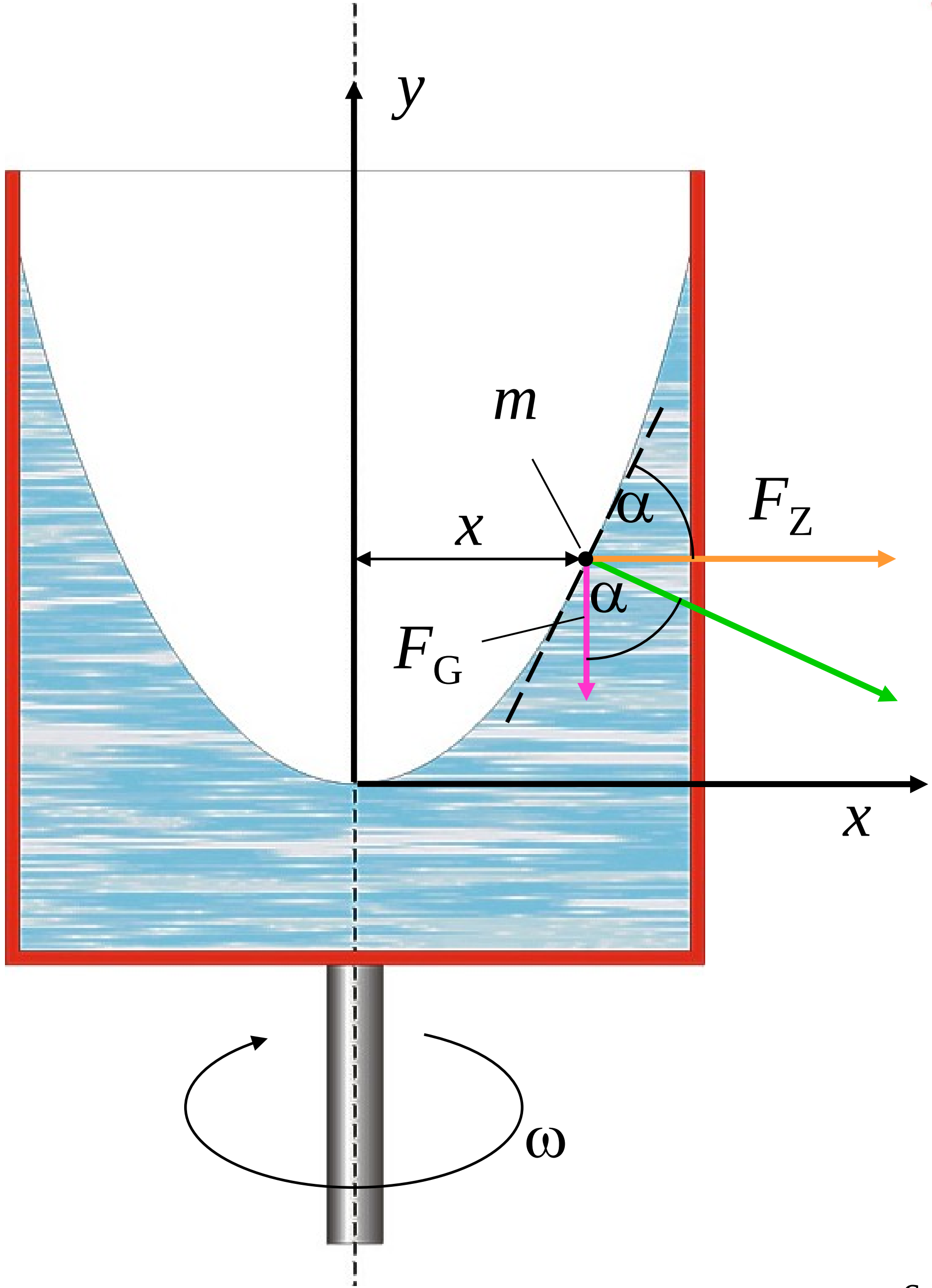
Auf ein Volumenelement an der Oberfläche mit der Masse *m* wirken die Kräfte:

$$\text{Gewichtskraft:} \quad F_G = m\,g$$

$$\text{Zentrifugalkraft:} \quad F_Z = m\,x\,\omega^2$$

Die Steigung der Oberfläche im Abstand *x* bei der Höhe *y* ist dann:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\,x\,\omega^2}{m\,g} = \frac{\omega^2}{g}\,x$$



Die Oberfläche $y(x)$ ergibt sich dann durch Integration zu:

$$y(x) = \frac{\omega^2}{g}\int_0^x \xi \, d\xi = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\left[\xi^2\right]_0^x$$

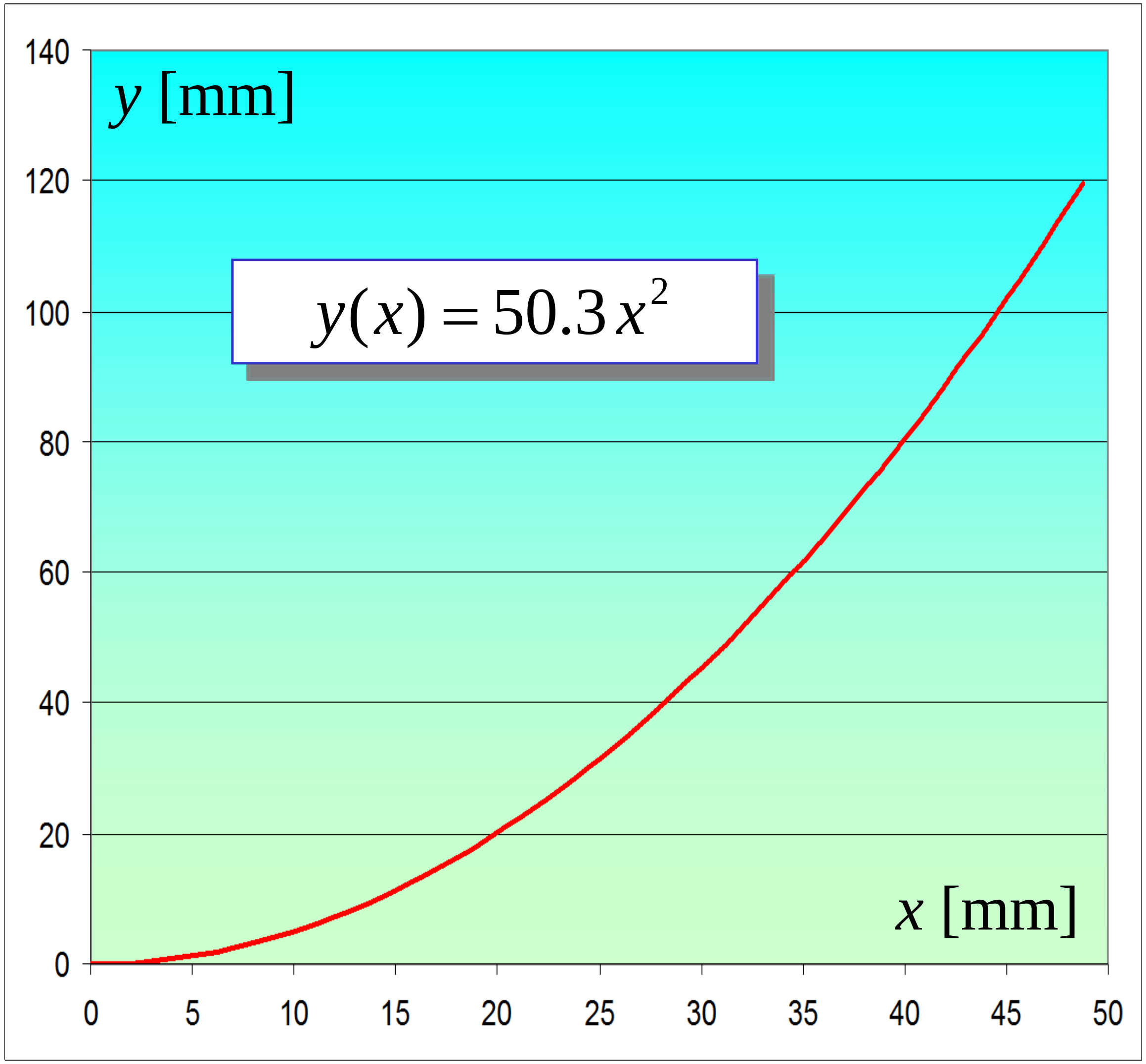
$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} x^2$$

Die Oberfläche nimmt also die Form einer Parabel an mit:

$$y(x) = a\, x^2$$

__Beispiel:__

$$f = 5\,\frac{\text{Umdr.}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f = 31.4\,\text{s}^{-1}$$



Druck

Als Druck p bezeichnet man den Quotienten aus dem Betrag der senkrecht zu einer Fläche wirkenden Kraft $F_\perp$ und der Größe A dieser Fläche:

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \qquad p = \frac{F_\perp}{A}$$

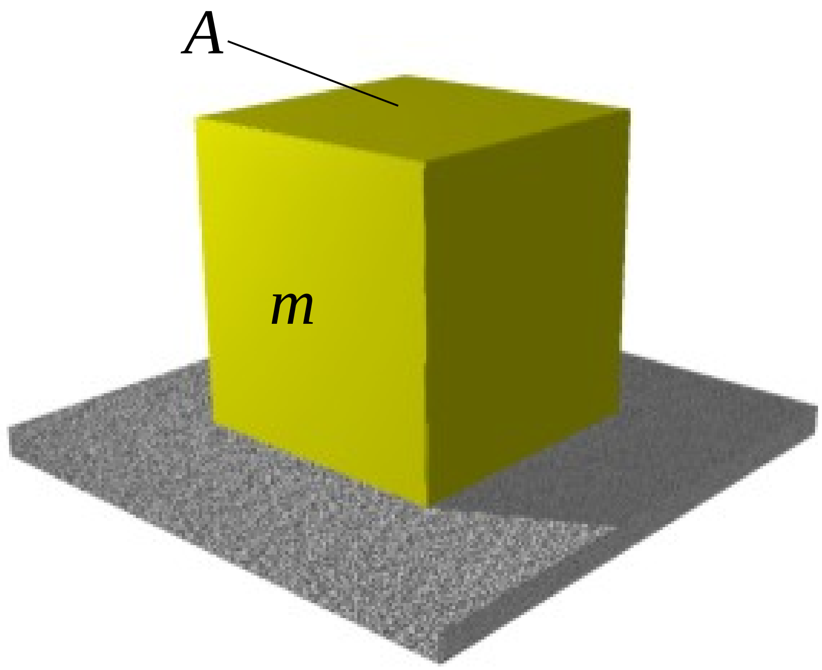
Die SI-Einheit des Drucks ist *Pascal* (Pa):

$$1\,\text{Pa} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^{-5}\,\text{bar}$$

$$1\,\text{Pa} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$$

Beispiel:

Ein Körper mit der Fläche A liegt auf einer Unterlage. Es wirkt die Schwerkraft:



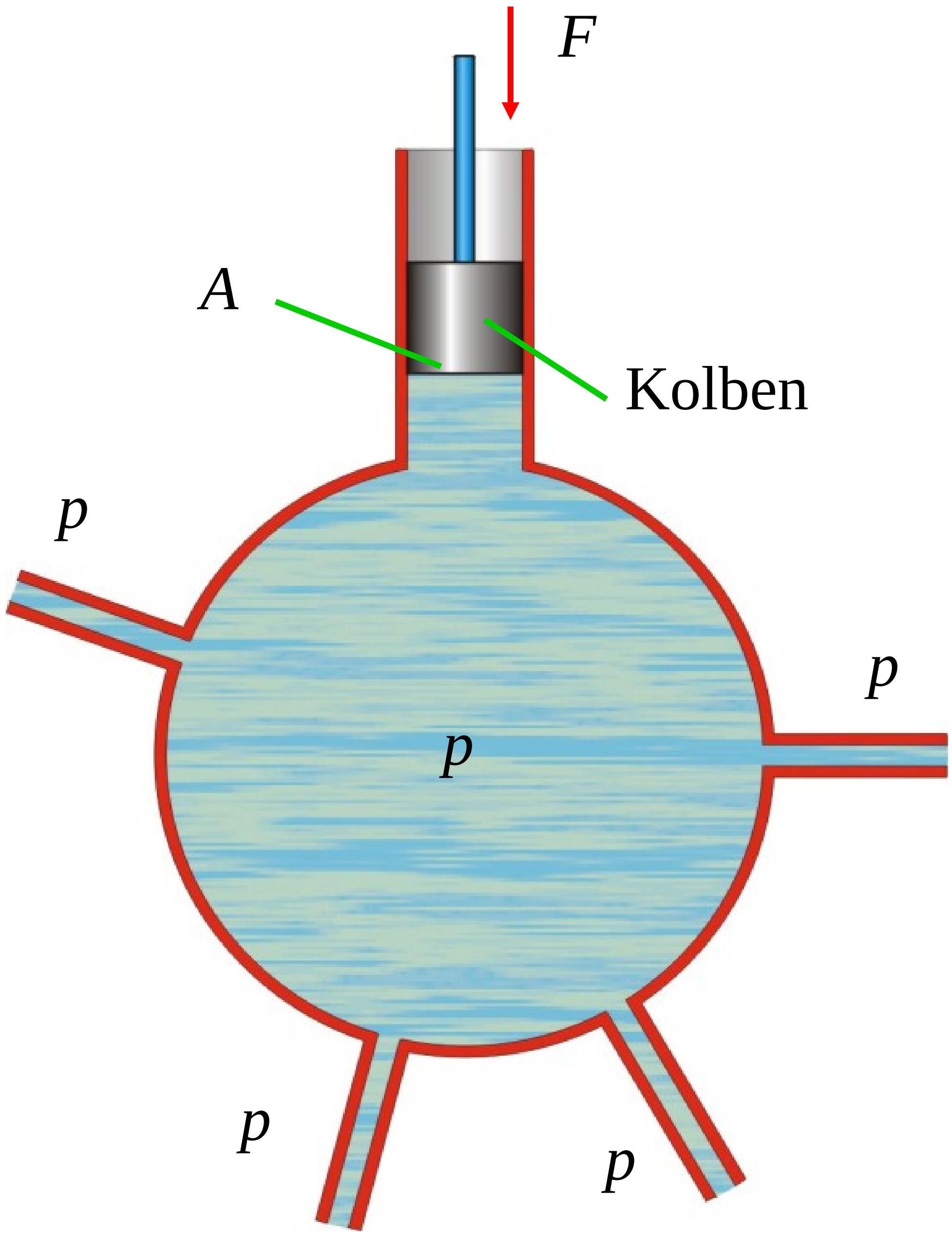
$$\text{Druck:} \qquad p = \frac{F_\perp}{A} = \frac{m\,g}{A}$$

In einem geschlossenen Volumen breitet sich der Druck gleichmäßig in einer Flüssigkeit aus.

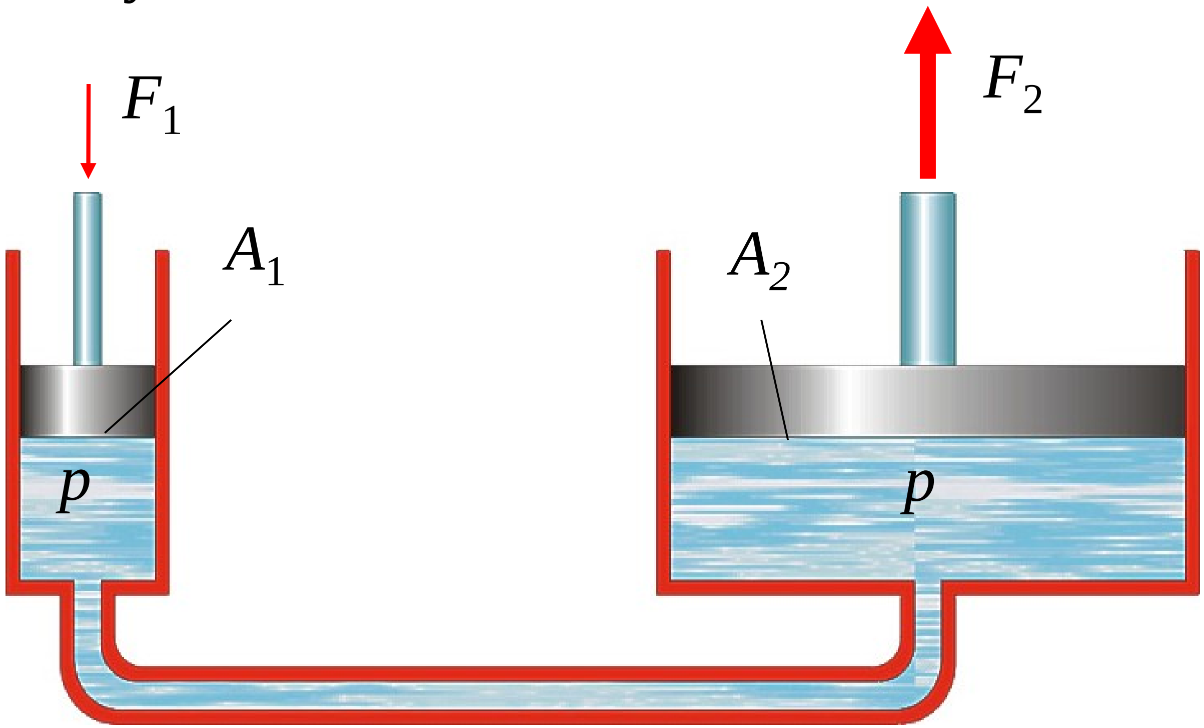
Der Druck ist

$$p = \frac{F}{A}$$

p ist an allen Auslässen des Behälters gleich groß !



Anwendung: Die hydraulische Presse



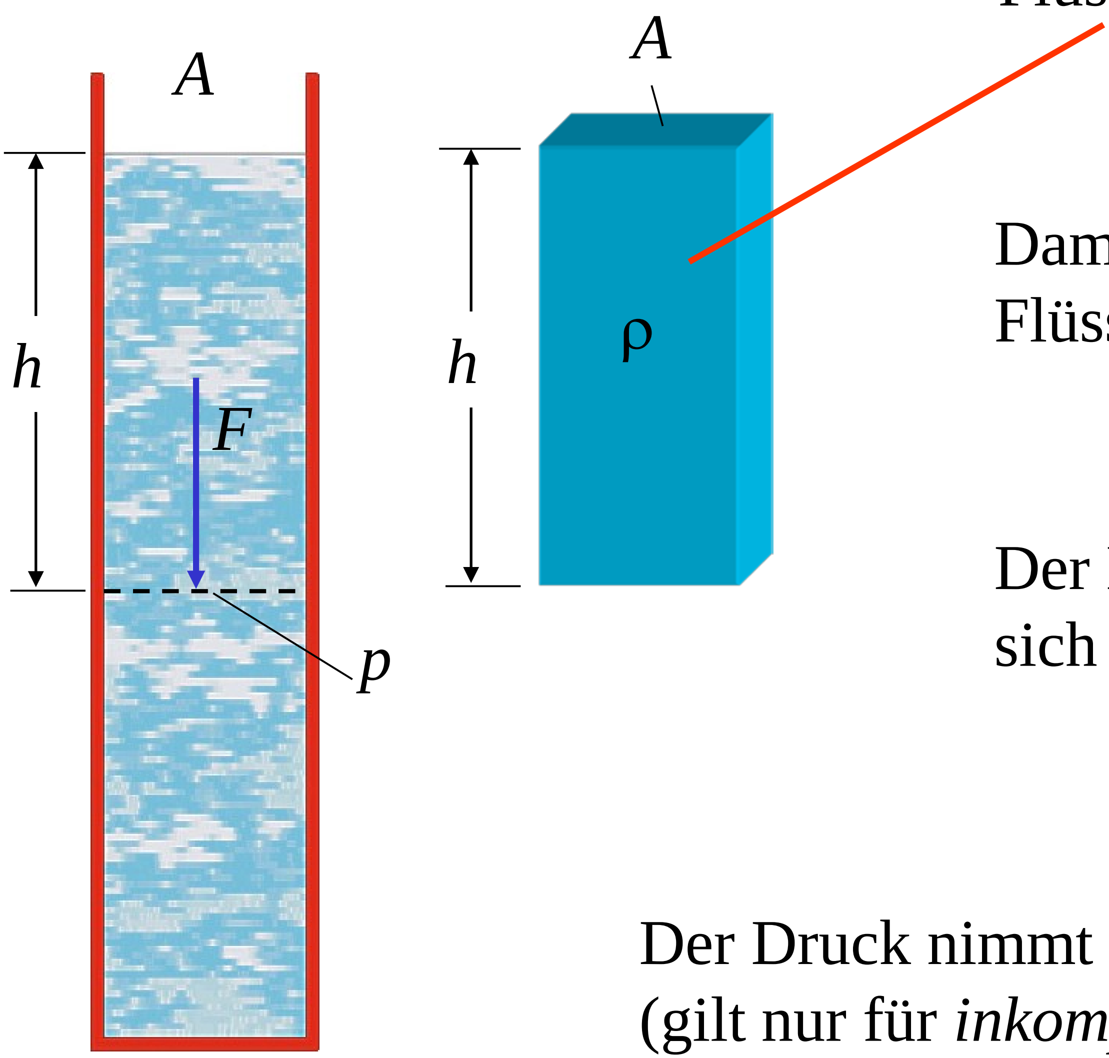
Da der Druck überall gleich groß ist, gilt bei den Kolben jeweils:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

Das bedeutet: $A_2 \gg A_1 \quad \Rightarrow \quad F_2 \gg F_1$

Der Schweredruck (hydrostatischer Druck)

Der Druck in einer Flüssigkeit nimmt mit zunehmender Tiefe zu.



Die Masse der darüberliegenden Flüssigkeitssäule ist

$$m = \rho V = \rho\, h\, A$$

Damit ist das Gewicht einer Flüssigkeitssäule der Höhe *h*

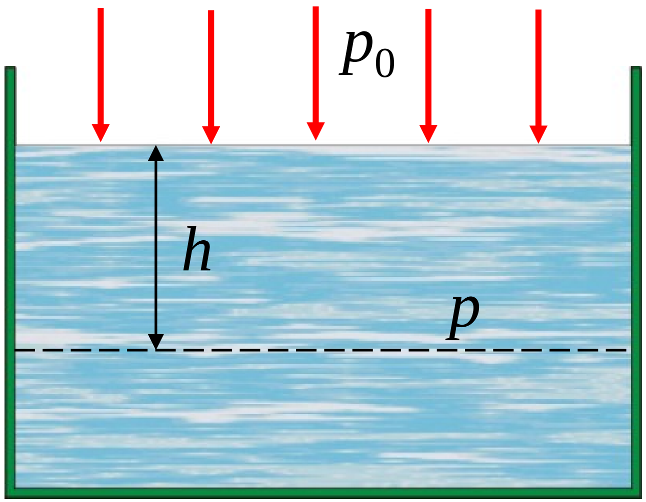
$$F_{\mathrm{G}} = \rho\, h\, A\, g$$

Der Druck in der Tiefe *h* ergibt sich sofort zu:

$$p = \frac{F_{\mathrm{G}}}{A} = \rho\, g\, h$$

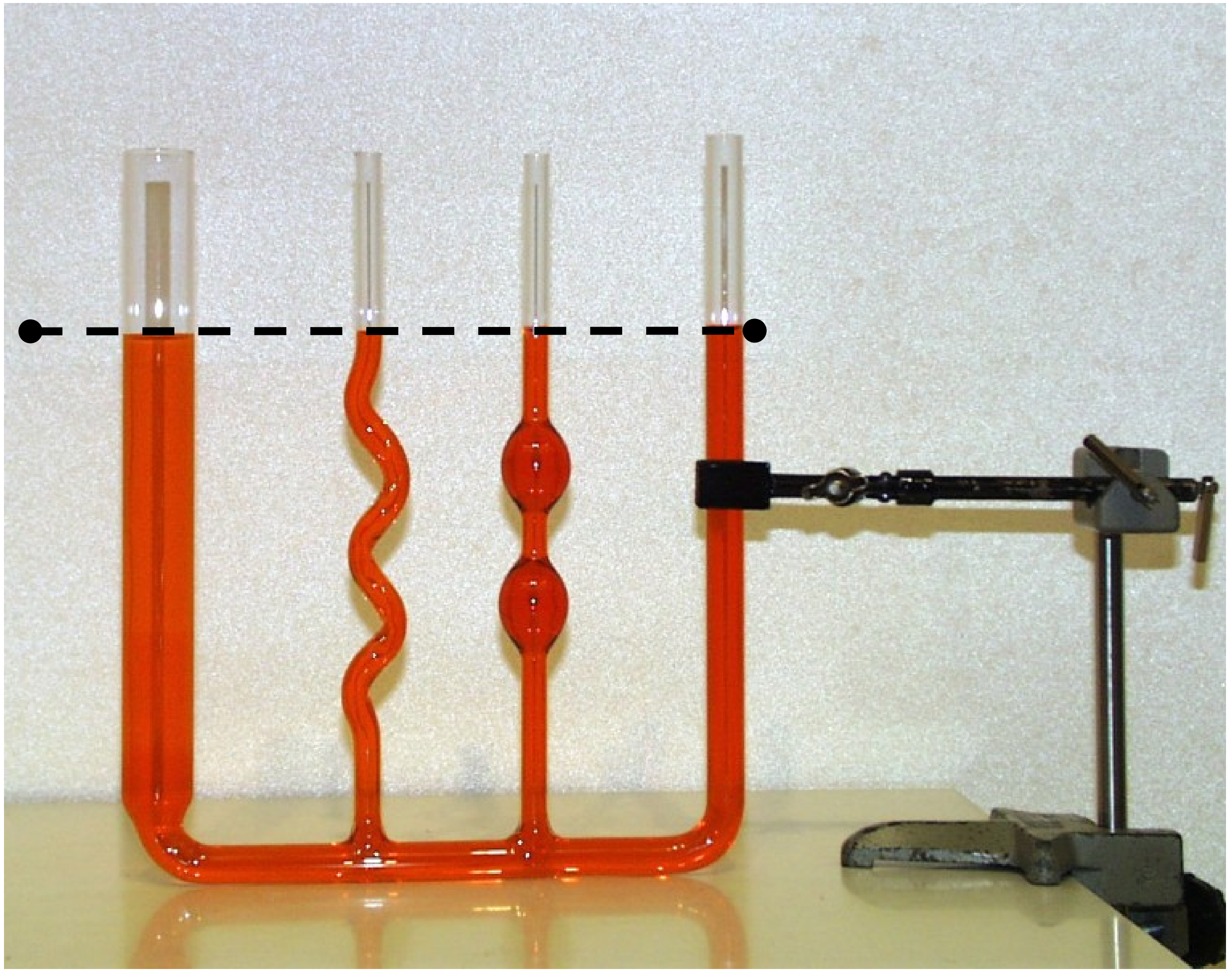
Der Druck nimmt linear mit der Tiefe *h* zu (gilt nur für *inkompressible* Flüssigkeiten).

Versuch: Kommunizierende Röhren



Wenn über der Flüssigkeit der Luftdruck p_0 herrscht, dann ist in der Tiefe h der Druck:

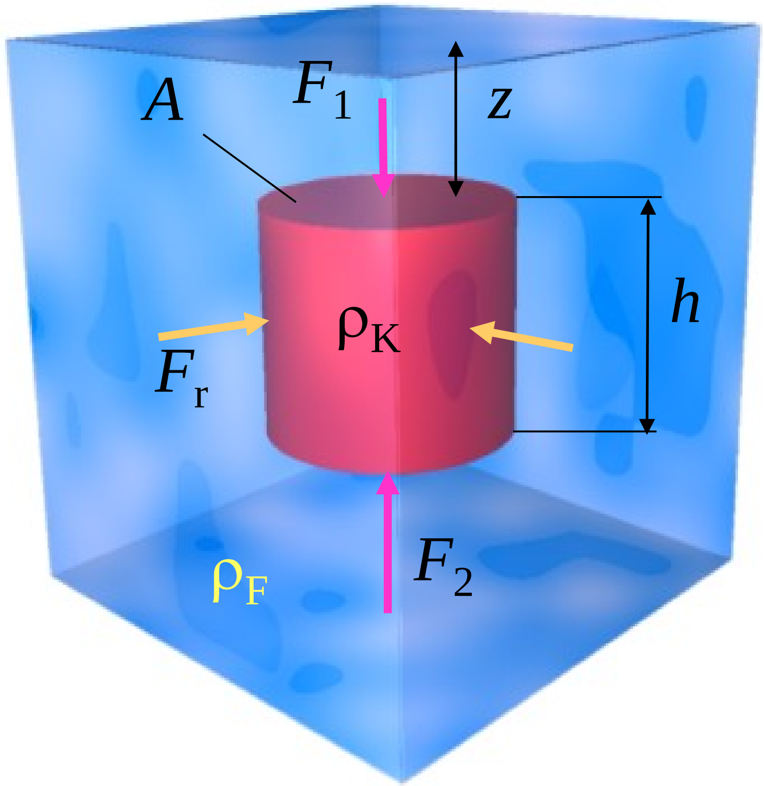
$$p = p_0 + \rho\, g\, h$$



Der Druck hängt nur von der Höhe der Flüssigkeitssäule ab. Die Form des Gefäßes spielt keine Rolle! Daher steht die Flüssigkeit in den verschieden geformten Röhren überall gleich hoch („Hydrostatisches Paradoxon“).

Der Auftrieb

Ein fester Körper der Dichte ρ_K wird in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_F getaucht. Alle horizontalen Kräfte F_r heben sich auf, da der Druck in der horizontalen Ebene überall gleich ist.



Die Kraft auf den Körper ist damit:

$$\begin{aligned} F_A &= F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A \\ &= \rho_F g\,(h+z)\,A - \rho_F g\, z\, A \\ &= \rho_F g\, h\, A = g\, \rho_F V = g\, m_F \end{aligned}$$

Diese Kraft wirkt nach oben, da $F_2 > F_1$. Ihr wirkt die Gewichtskraft

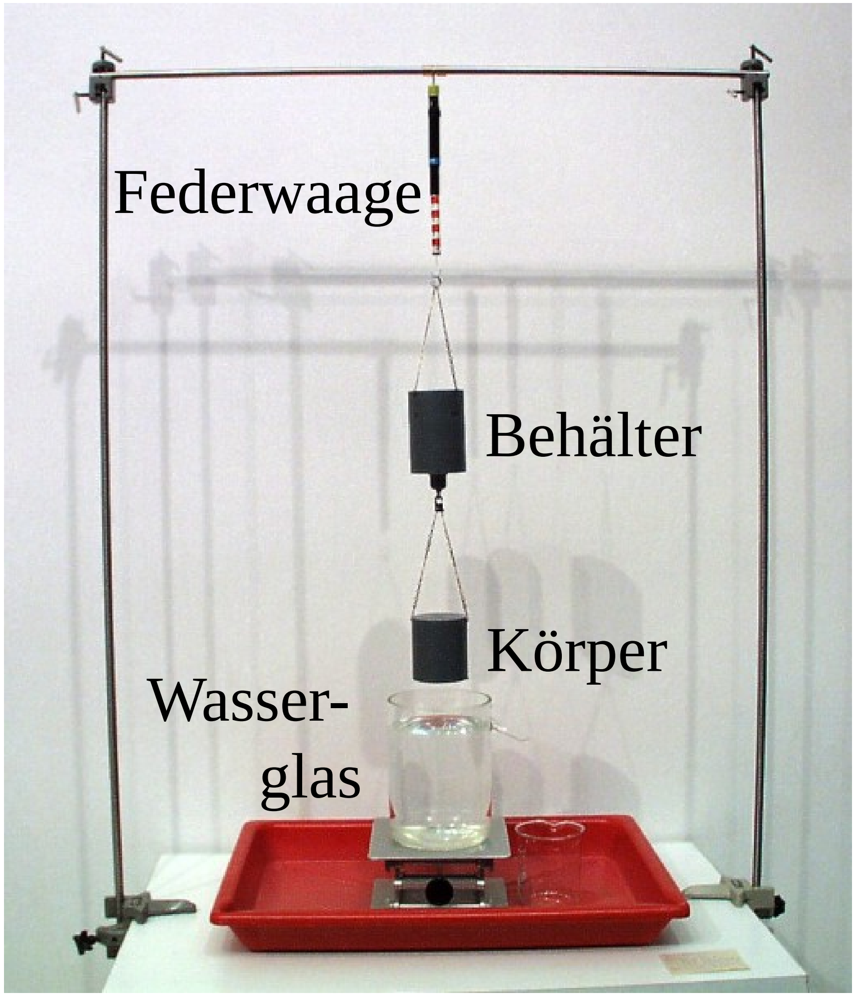
$$F_G = m_K\, g$$

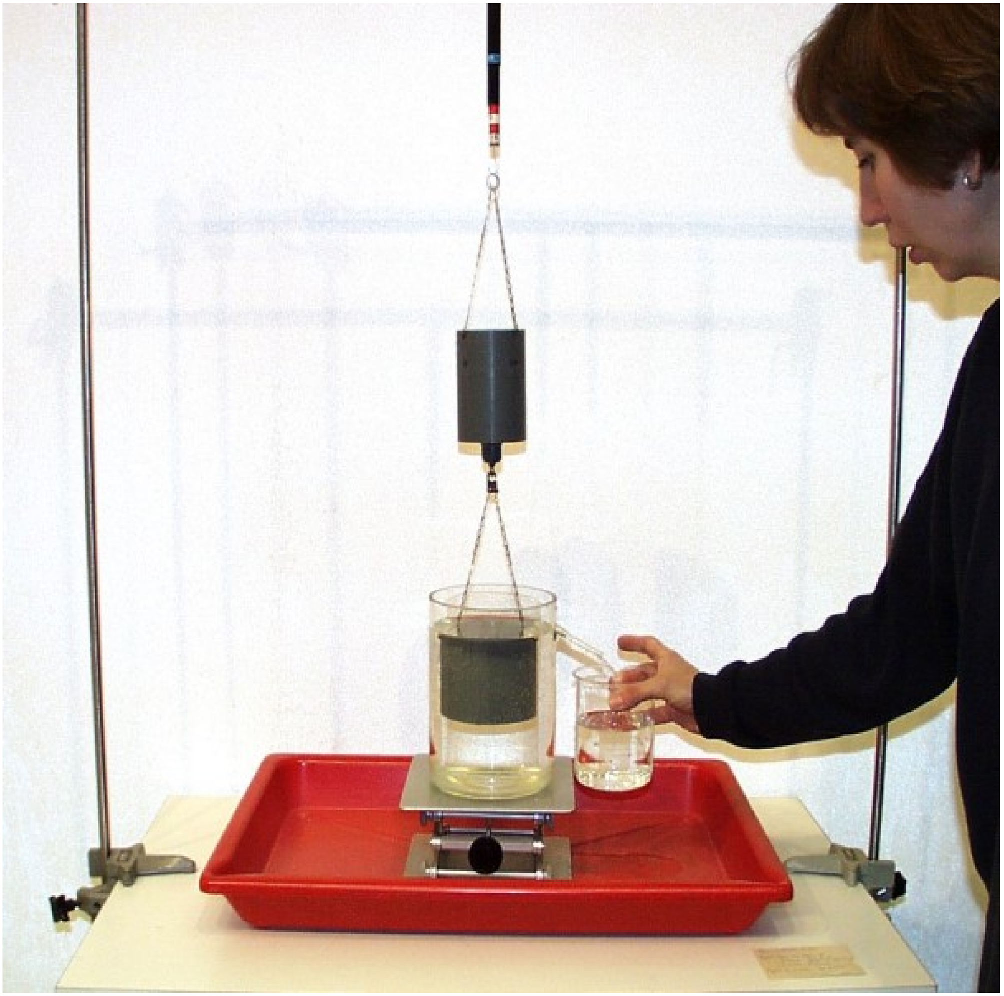
entgegen. Also ist die Gesamtkraft:

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_G - F_A = (m_K - m_F)\,g \\ &= (\rho_K - \rho_F)\,V\, g \end{aligned}$$

Die Gewichtskraft reduziert sich um das Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Dieses Phänomen nennt man *Auftrieb*.

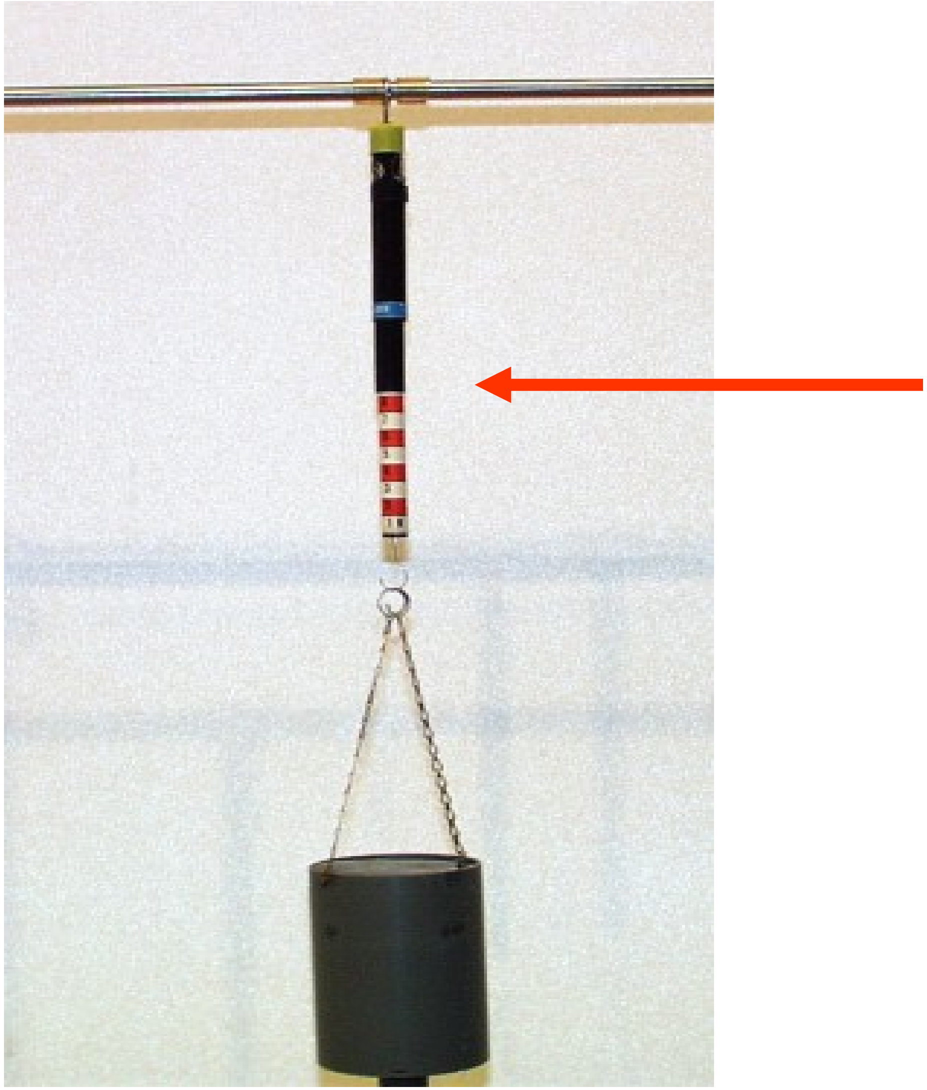
Versuch: Auftrieb einer Masse im Wasser



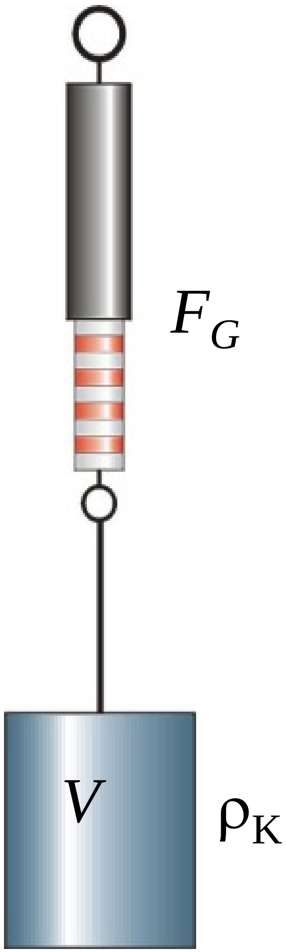


Der Körper wird in das Wasser getaucht. Die verdrängte Wassermenge läuft in einen Glasbehälter (siehe rechts). Die Federwaage zeigt wegen des Auftriebs ein geringeres Gewicht an.

Das übergelaufene Wasser wird in den Behälter gefüllt (links). Die Federwaage zeigt wieder das ursprüngliche Gewicht an (rechts), da das Wasser im Behälter den Auftrieb kompensiert.

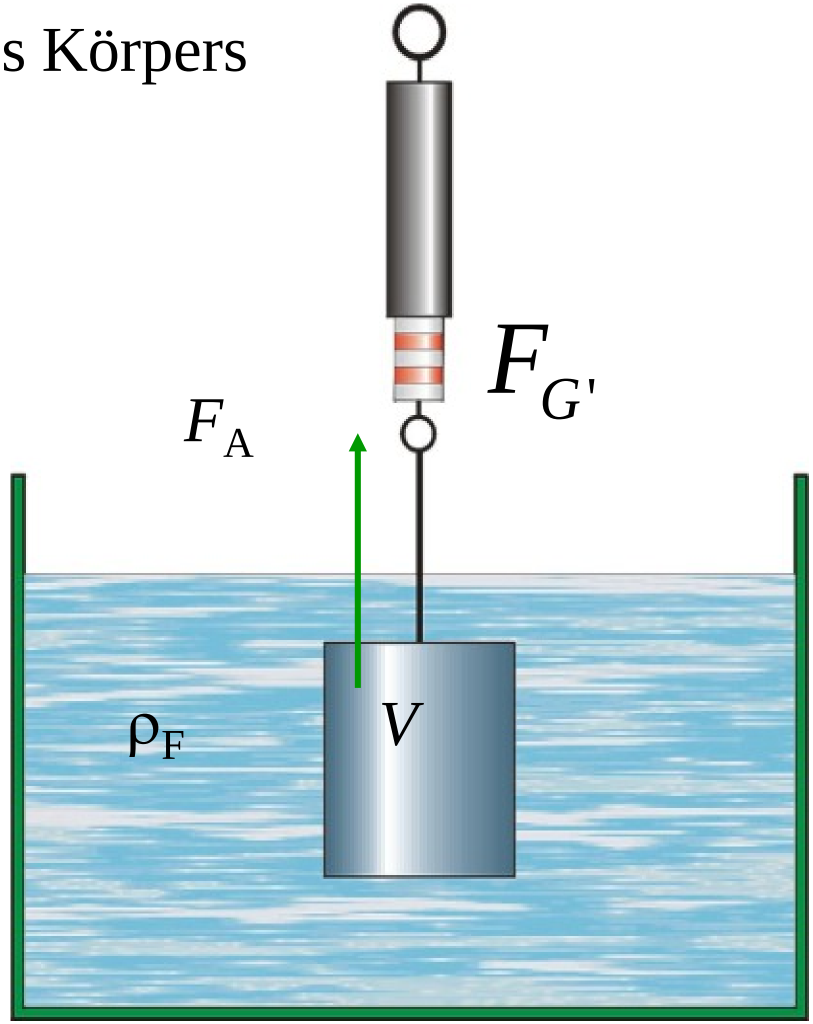


<u>Anwendung:</u> Bestimmung der Dichte eines Körpers



Ein Körper mit dem Volumen V und der Dichte ρ_K hat im Vakuum (in guter Näherung auch in Luft) das Gewicht:

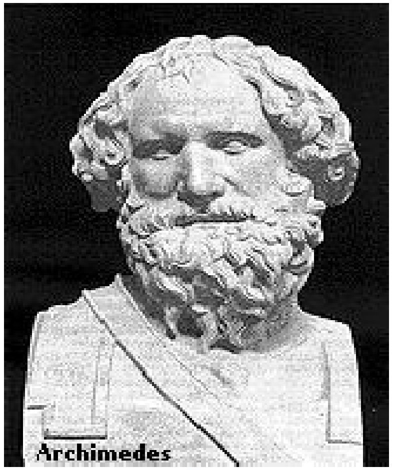
$$F_G = m\,g = \rho_K\, V\, g$$



Taucht man ihn in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_F, dann reduziert sich das Gewicht durch den Auftrieb zu: $F_{G'} = F_G - F_A = (\rho_K - \rho_F)\, g\, V$

Das Verhältnis der Gewichte liefert:

$$\frac{F_{G'}}{F_G} = \frac{\rho_K - \rho_F}{\rho_K}$$



Umstellen ergibt:

$$\rho_K \left(1 - \frac{F_{G'}}{F_G} \right) = \rho_F$$

Die unbekannte Dichte des Körpers ist damit:

$$\rho_K = \rho_F \frac{1}{1 - F_{G'} / F_G}$$

Dieses Prinzip geht auf *Archimedes* (287 - 212 v.Chr.) zurück. Er bestimmte für den König Heron II die Dichte des Metalls seiner Krone.

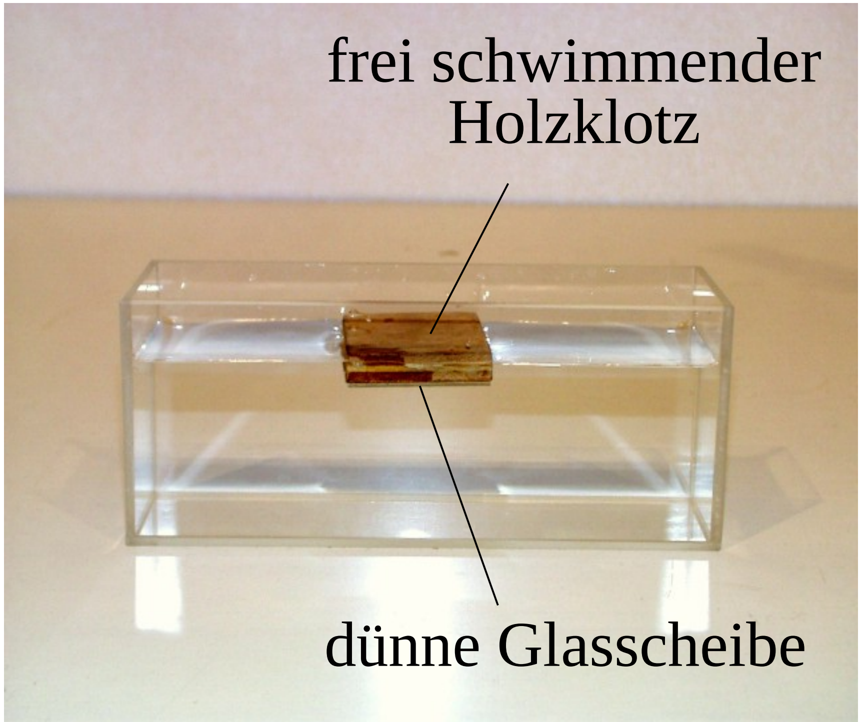
<u>Beispiel:</u>

Ein Körper wiegt in Luft F_G = 13.5 N. In Wasser (ρ_F = 1000 kg/m^3) wird das Gewicht $F_{G'}$ = 12.214 N ermittelt.

$$\rho_K = \frac{1000}{1 - 12.214/13.5} = 10498 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 10.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

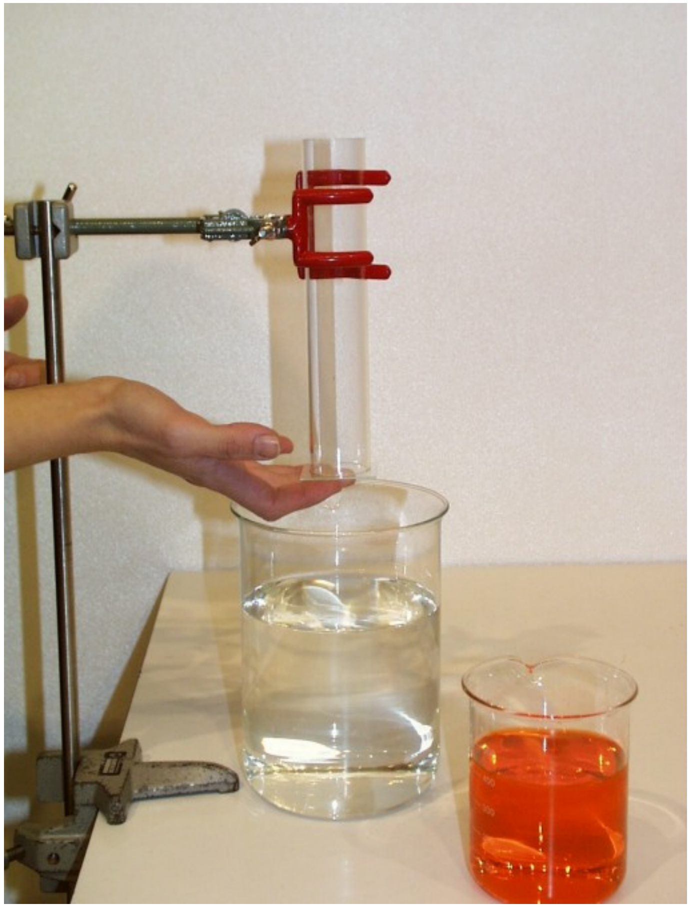
$\Rightarrow$ Der Körper ist aus Silber !

Versuch: Hydrostatischer Druck (Holzklotz mit Diaglas)



Der an der unteren Fläche mit einer dünnen, glatten Glasscheibe versehene Holzklotz schwimmt im Wasser. Wenn man den Holzklotz so auf den Boden drückt, daß die Glasscheibe mit der glatten Bodenfläche des Gefäßes eng im Berührung kommt, wird dadurch das Wasser verdrängt und die Auftriebskraft verschwindet. Der Holzklotz bleibt am Boden liegen.

Versuch: Hydrostatischer Druck (Glasplatte)

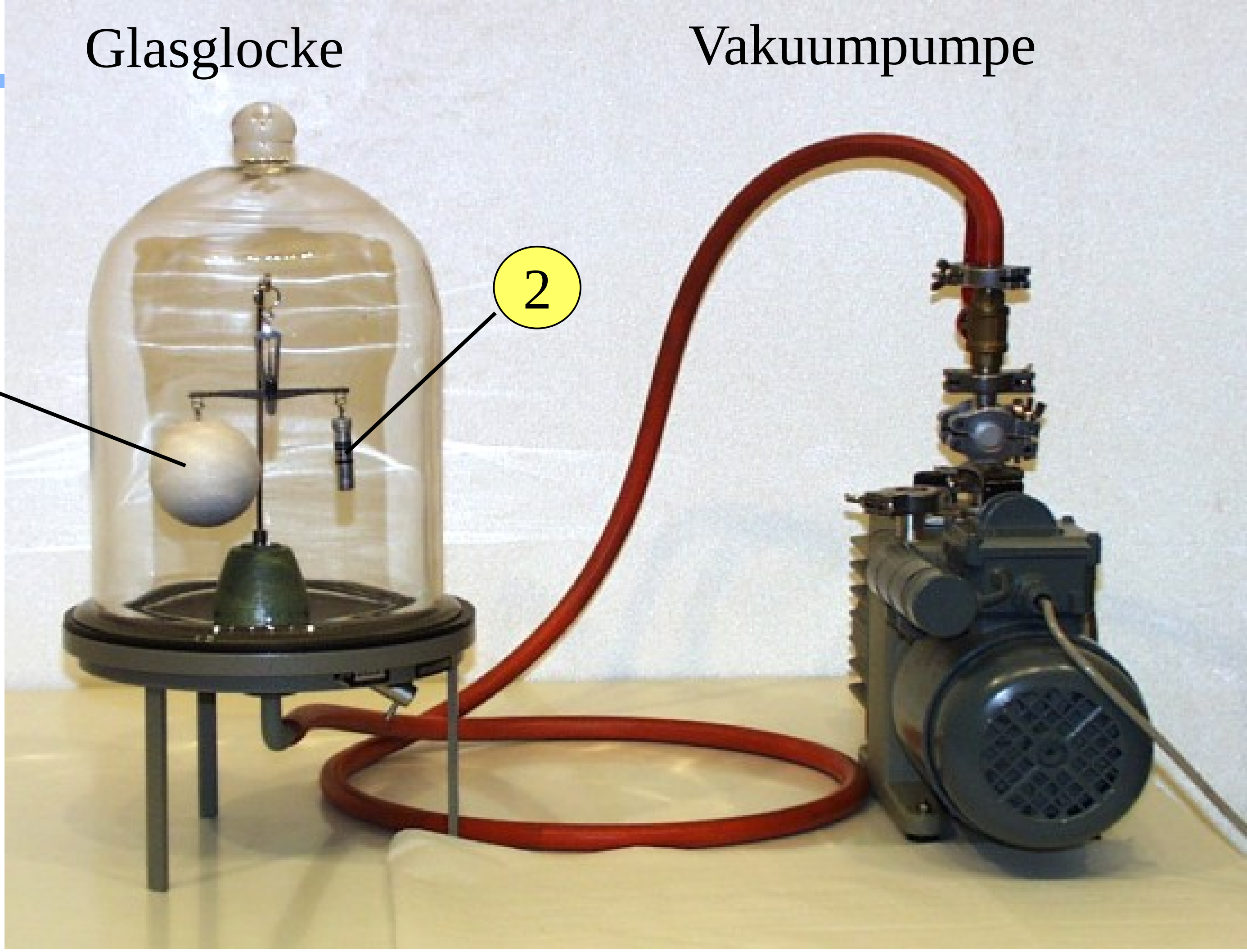


Eine Glasscheibe wird unten an das offene Glasrohr gedrückt. Dann taucht man das ganze in das Wasser.

Der Wasserdruck preßt die Scheibe an das Rohr und verhindert das Eindringen des Wassers.

Wenn man von innen in das Rohr Wasser füllt (hier gefärbt), dann erhöht sich der Innendruck, bis die Scheibe fällt.

Versuch:
Auftriebswaage

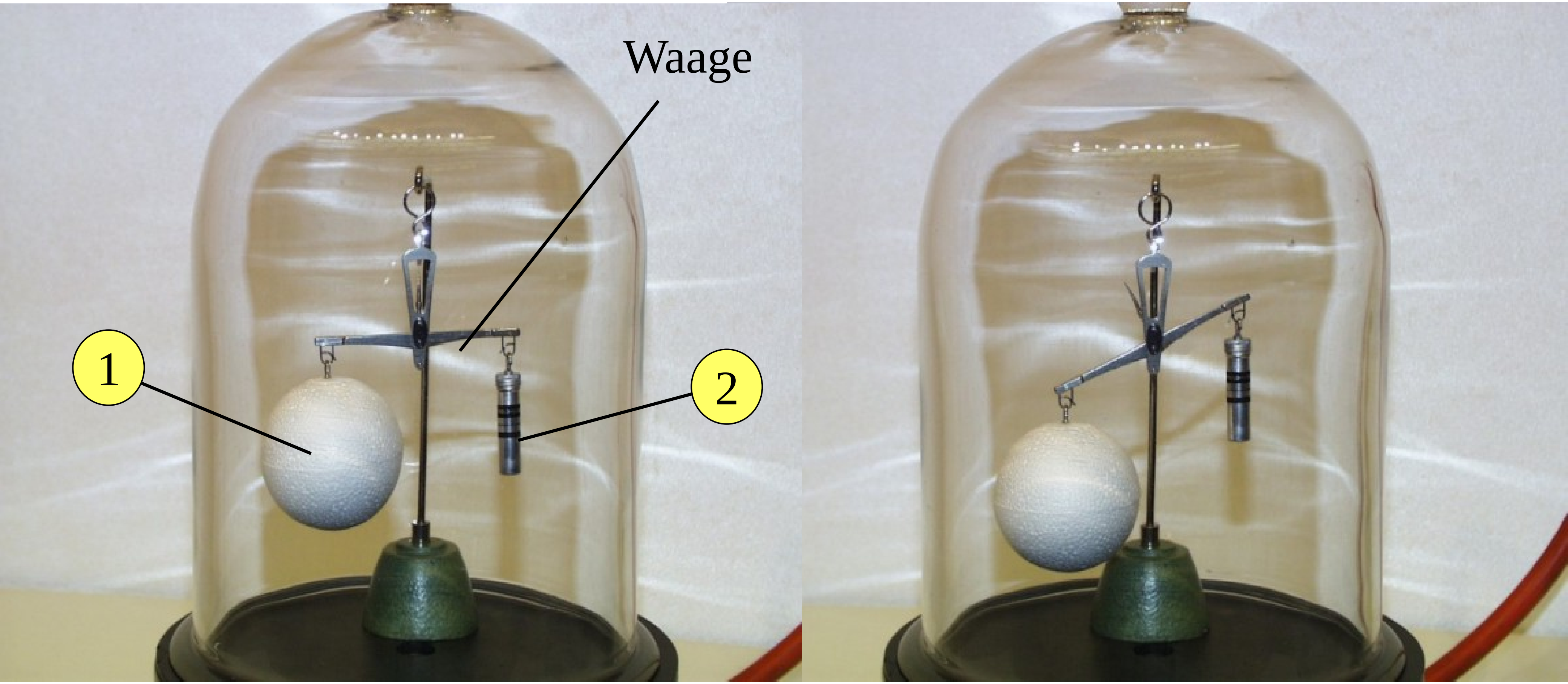


Auftrieb gibt es auch in Gasen. Er ist dort allerdings wesentlich schwächer.

In Luft sind die große Styroporkugel (1) und der kleine Metallzylinder (2) im Gleichgewicht. Wegen des großen Volumens wirkt auf die Styroporkugel eine größere Auftriebskraft. Das Kräftegleichgewicht ergibt:

$$F_G^{(1)} - F_A^{(1)} = F_G^{(2)} - F_A^{(2)} \quad \text{mit} \quad F_A^{(1)} > F_A^{(2)} \Rightarrow F_G^{(1)} > F_G^{(2)}$$

Pumpt man die Luft aus der Vakuumglocke, verschwindet der Auftrieb und die schwerere Styroporkugel sinkt.

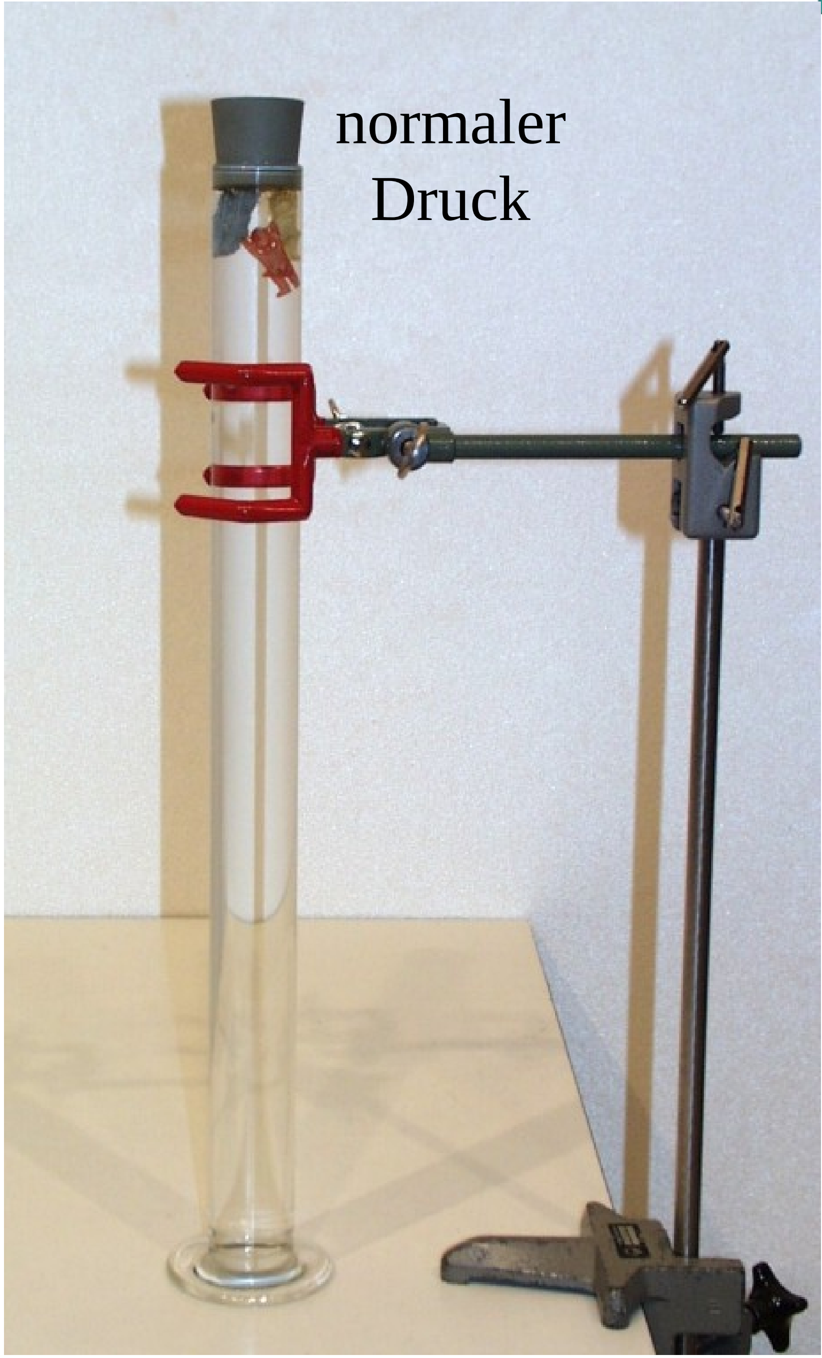


Luftdruck

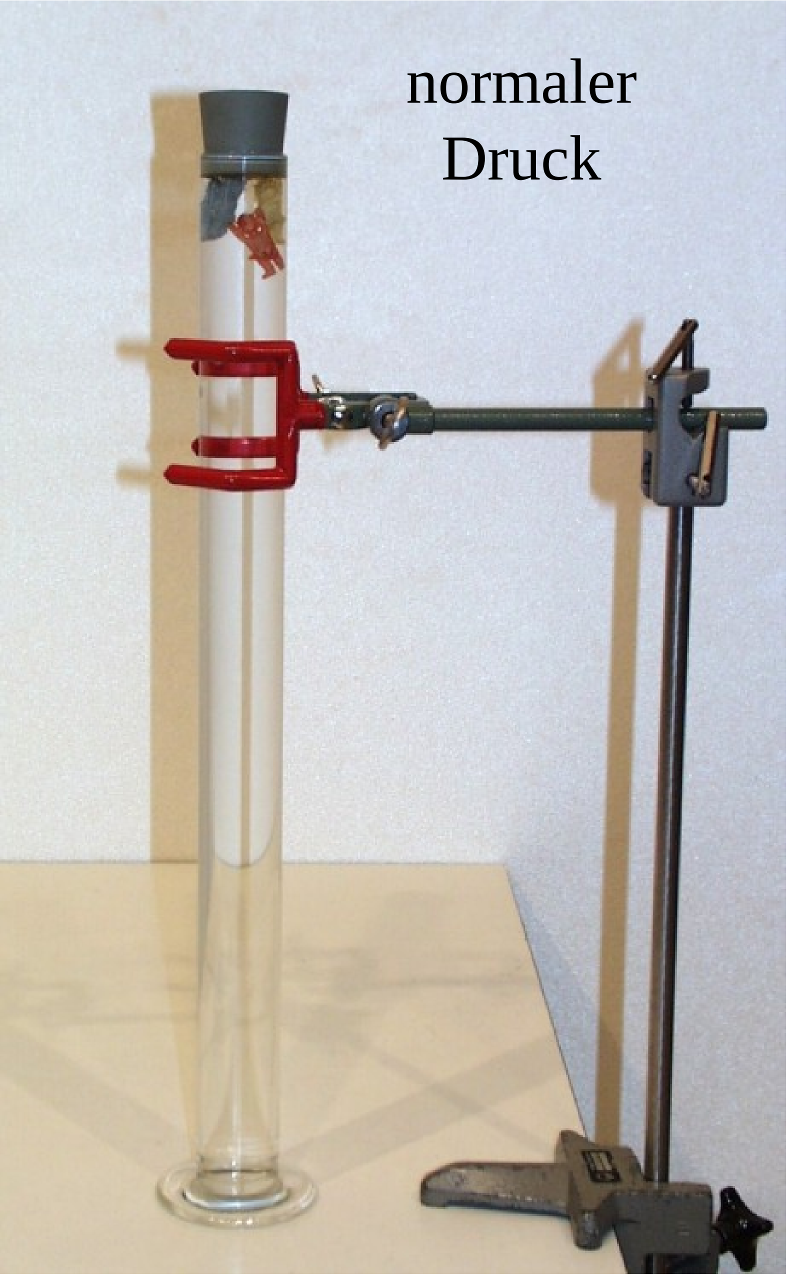
Vakuum

Versuch: Cartesischer Taucher

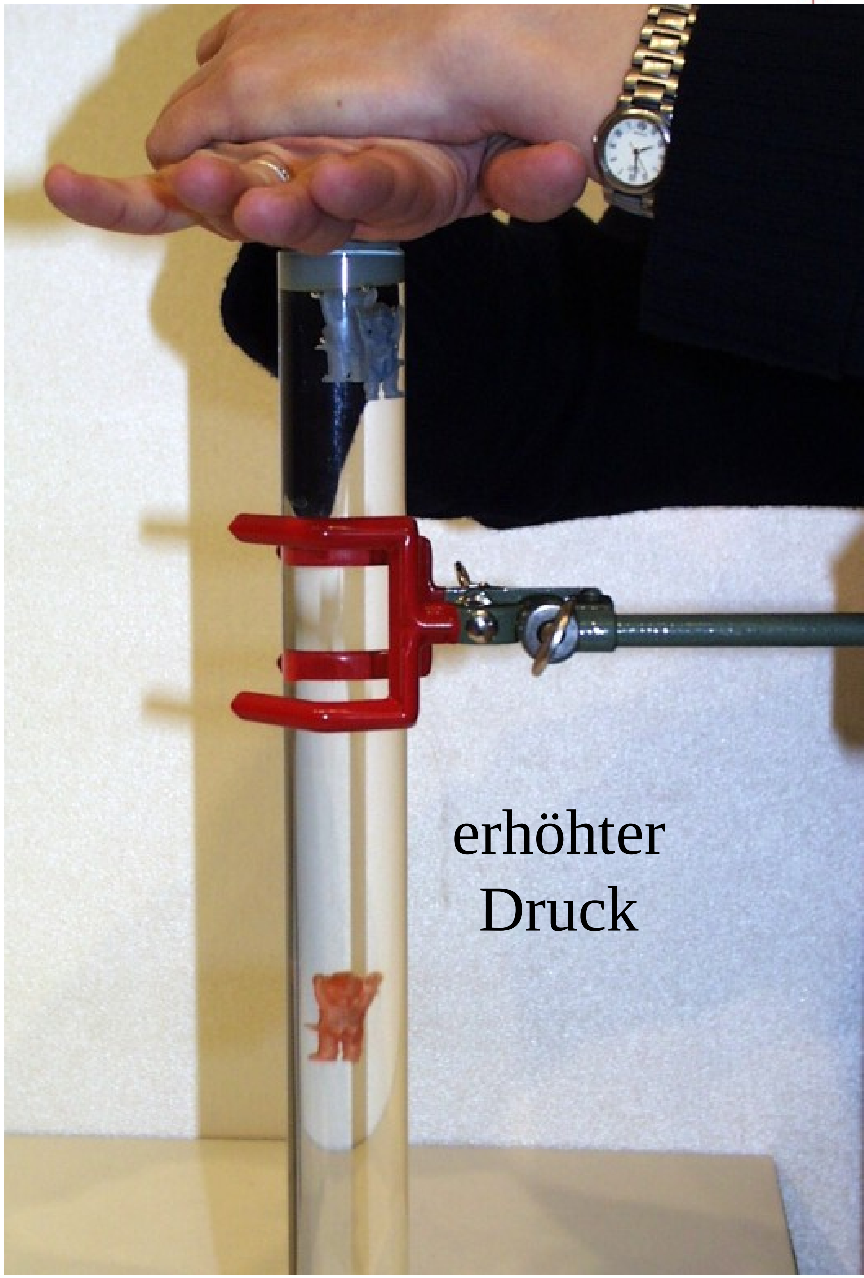
Die Taucherfiguren sind hohl und mit Luft gefüllt. Ihre effektive Dichte ist somit $\rho < \rho_{Wasser}$ mit $\rho_{Wasser} = 1\ g/cm^3$. Daher schwimmen die Taucher.



normaler Druck



Erhöht man den Druck auf die Wassersäule, dringt Wasser durch das Loch in die Taucherfigur, bis die effektive Dichte auf $\rho > 1\ g/cm^3$ steigt. Der Taucher sinkt.



Schwimmende Körper

Ein zylindrischer Körper der Dichte ρ_K und der Höhe h tauche bis zu einer Höhe h‘ in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_F ein.

Für die Gesamtkraft auf den Körper in einer Flüssigkeit gilt dann:

$$F_{\text{ges}} = F_G - F_{\text{A}} = \left(m_{\text{K}} - m_{\text{F}}\right) g$$
$$= \left(\rho_{\text{K}} - \rho_{\text{F}}\right) V\, g$$

Wenn $F_{\text{ges}} > 0$ ist, dann sinkt der Körper in der Flüssigkeit, andern-falls schwimmt er.

Es ist also:

- $F_{\text{G}} > F_{\text{A}} \Rightarrow \rho_{\text{K}} > \rho_{\text{F}} \;\Rightarrow$ sinken
- $F_{\text{G}} = F_{\text{A}} \Rightarrow \rho_{\text{K}} = \rho_{\text{F}} \;\Rightarrow$ schweben
- $F_{\text{G}} < F_{\text{A}} \Rightarrow \rho_{\text{K}} < \rho_{\text{F}} \;\Rightarrow$ schwimmen

Beispiel: Schwimmender Eiswürfel

$$F_G = \rho_{\text{Eis}} V\, g = \rho_{\text{Eis}} A h g$$
$$F_A = \rho_{\text{Wasser}} V' g = \rho_{\text{Wasser}} A h' g$$
$$F_G = F_A \Rightarrow \rho_{\text{Eis}}\, h = \rho_{\text{Wasser}}\, h'$$

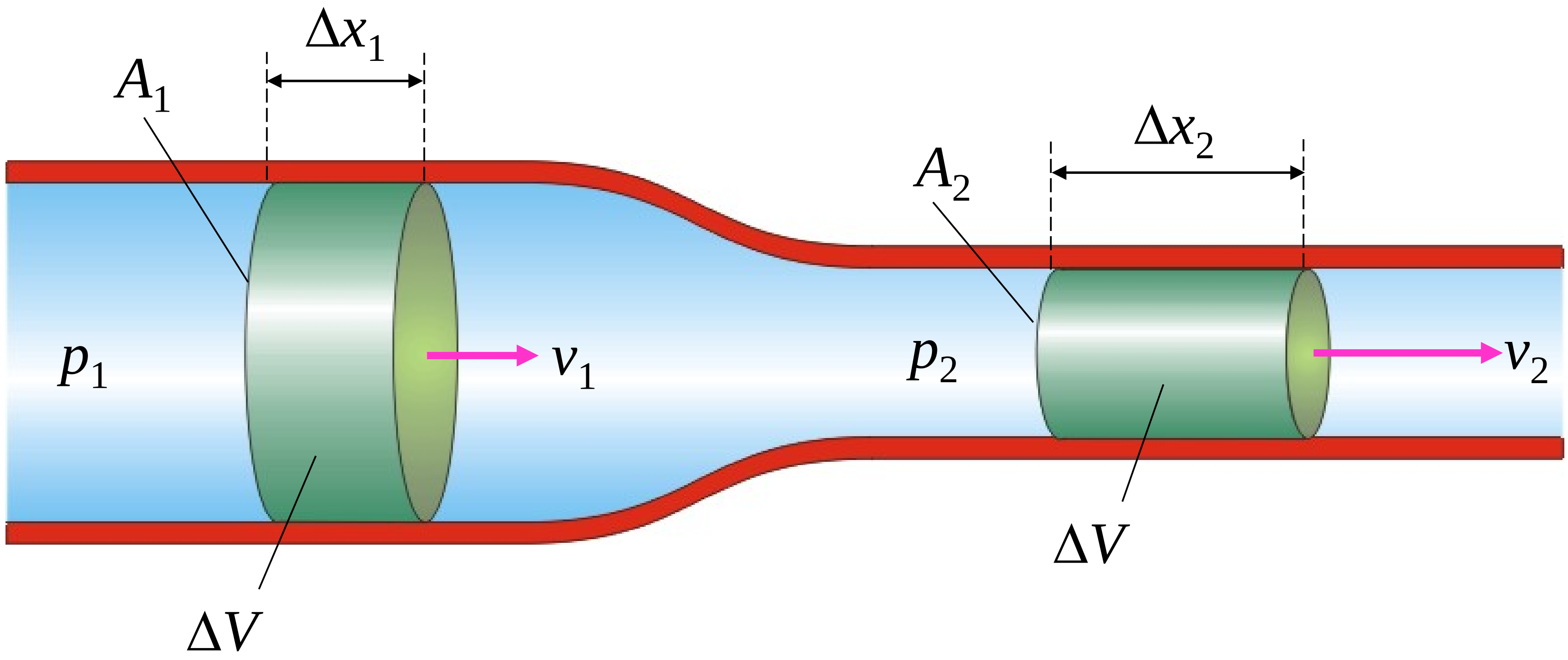
$$\Rightarrow \text{Eintauchtiefe}: \; h' = \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{Wasser}}} h$$

$$\rho_{\text{Wasser}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \text{ und } \rho_{\text{Eis}} = 0.92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\Rightarrow \quad h' = 0.92\, h \approx \frac{10}{11} h$$

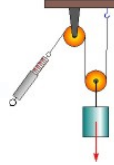
Strömung idealer, inkompressibler Flüssigkeiten

Durch ein sich verjüngendes Rohr strömt reibungsfrei eine Flüssigkeit.



Die Flüssigkeit sei inkompressibel. Dann gilt für das Teilvolumen ΔV :

$$\Delta V = A_1\,\Delta x_1 = A_2\,\Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t}\Delta t = A_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t}\Delta t$$



Daraus folgt für infinitesimale Zeitintervalle Δt die *Kontinuitätsgleichung* :

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.}$$

In der strömenden Flüssigkeit liefert die Energiebilanz:

$$\Delta E_{\text{pot}} = p_2 A_2 \Delta x_2 - p_1 A_1 \Delta x_1 = (p_2 - p_1)\Delta V$$

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2}\rho_{\text{F}} \Delta V \left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Daniel Bernoulli
(1700-1792)

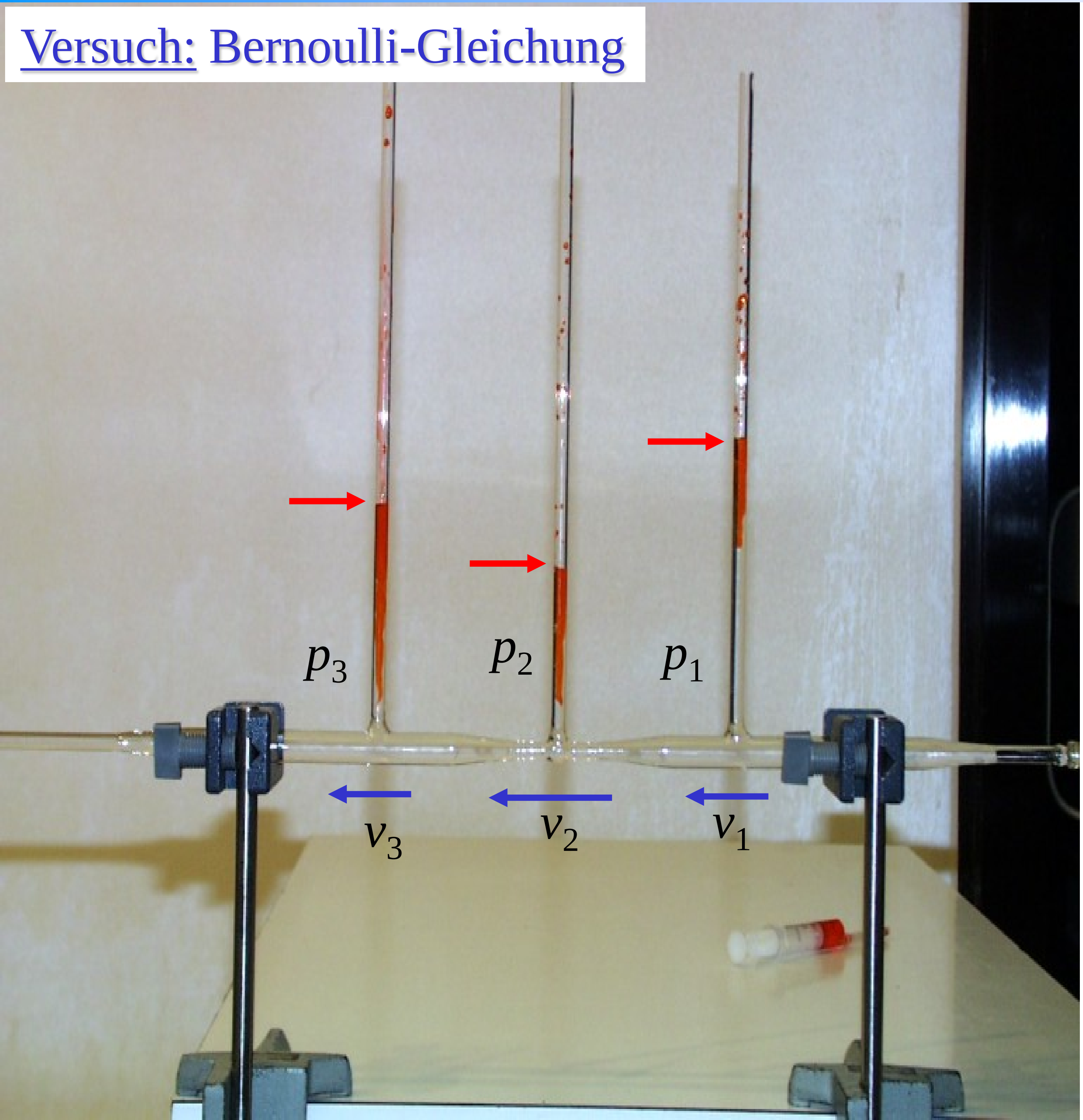
Wegen der Energieerhaltung gilt: $\Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} = 0$

$$\Rightarrow \qquad (p_2 - p_1)\Delta V + \frac{1}{2}\rho_{\text{F}} \Delta V \left(v_2^2 - v_1^2\right) = 0$$

Daraus ergibt sich schließlich die sog. „*Bernoulli-Gleichung*“ :

$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho_{\text{F}} v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_{\text{F}} v_2^2 = \text{const.}}$$

Versuch: Bernoulli-Gleichung



Die von Wasser durchströmte Glasröhre ist im mittleren Bereich deutlich dünner. Daher gilt

$$v_2 > v_1, \qquad v_3 < v_2$$

Nach der Bernoulli-Gleichung bedeutet das für die Druckverteilung im Rohr:

$$p_2 < p_1$$
$$p_3 > p_2$$

Das kann man an der Höhe der Wassersäulen gut erkennen.

Strömung von Flüssigkeiten & Gasen

Falls eine Flüssigkeit auch noch einen Höhenunterschied z überwinden muß, dann gilt:

$$p + \rho_F\, g\, z + \frac{1}{2}\rho_F v^2 = \text{const.}$$

statischer Druck — hydrostatischer Druck — Staudruck

$$\underbrace{p + \rho_F\, g\, z}_{E_{pot}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho_F v^2}_{E_{kin}} = \text{const.}$$

$$E_{pot} + E_{kin} = \text{const.}$$

Die Bernoulli-Gleichung entspricht dem Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie.

Im Prinzip gilt die Bernoulli-Gleichung auch für Gase. Allerdings liefert sie sowohl für reale Flüssigkeiten als auch für Gase quantitativ keine sehr guten Resultate. Der Grund dafür ist, dass Flüssigkeiten in der Regel viskos und Gase kompressibel sind.

Qualitativ gilt aber immer die folgende als *Venturi-Effekt* bekannte Schlußkette:

Querschnittsfläche A klein

↓ **Kontinuität**

Fließgeschwindigkeit v groß

↓ **Bernoulli**

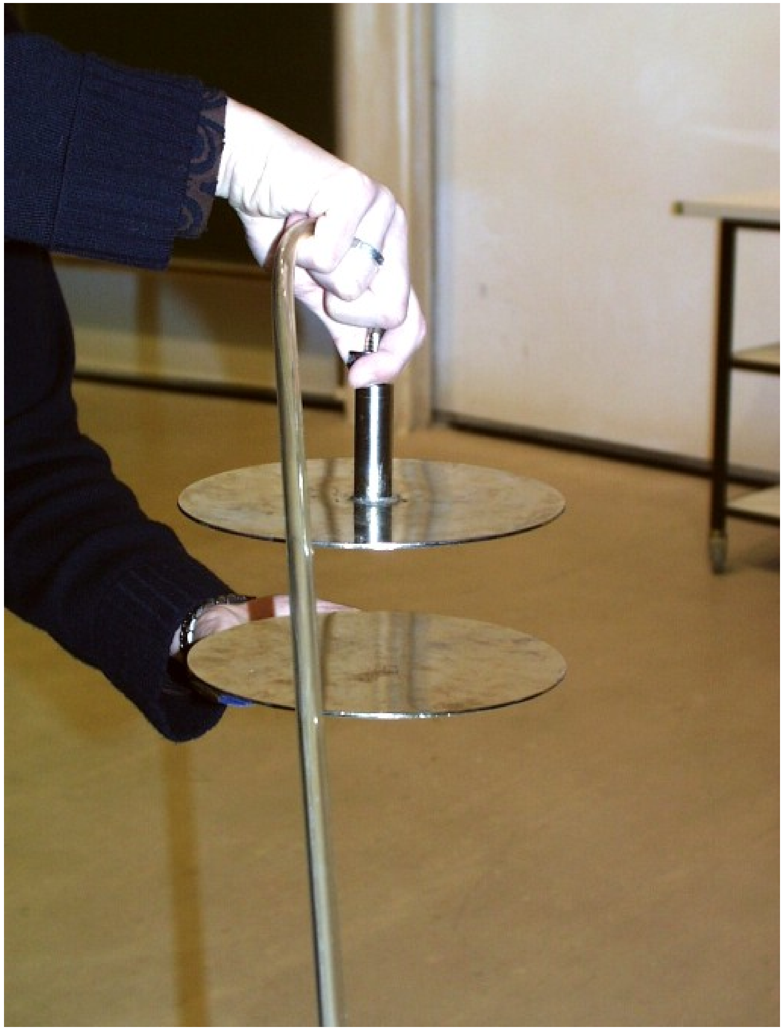
Druck p klein

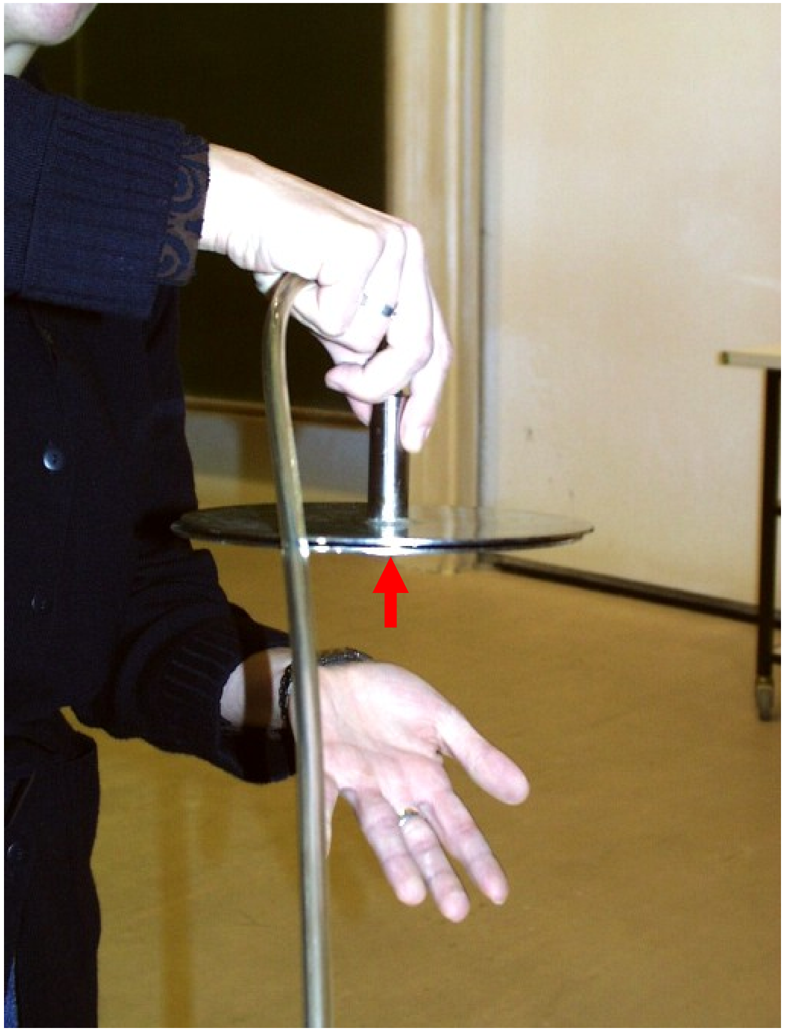
Versuch: Das hydro*dynamische* Paradoxon (1)

Der Luftstrom hält den Ball. Wenn er absinkt, strömt mehr Luft über den Ball, so dass hier der Druck abnimmt.

Der Ball im wird durch die strömende Luft nicht herausgeblasen, sondern im Trichter gehalten.

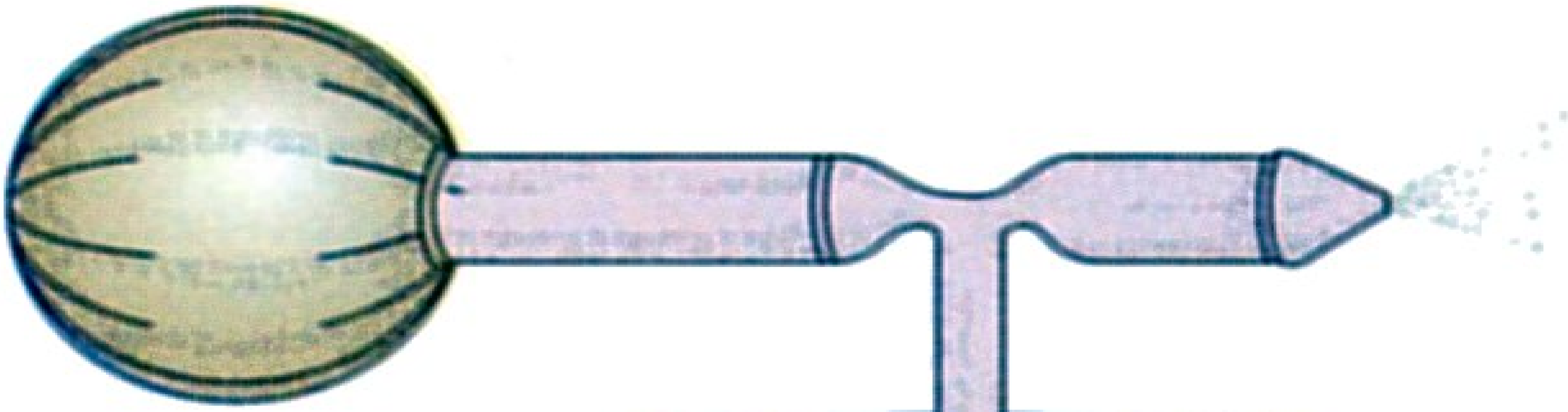
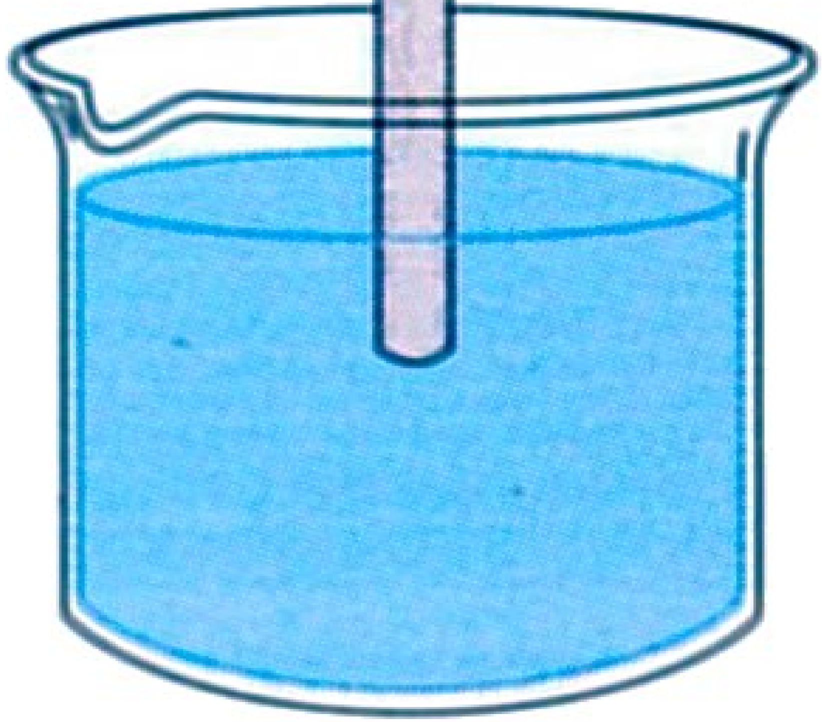
Versuch: Das hydro*dynamische* Paradoxon (2)





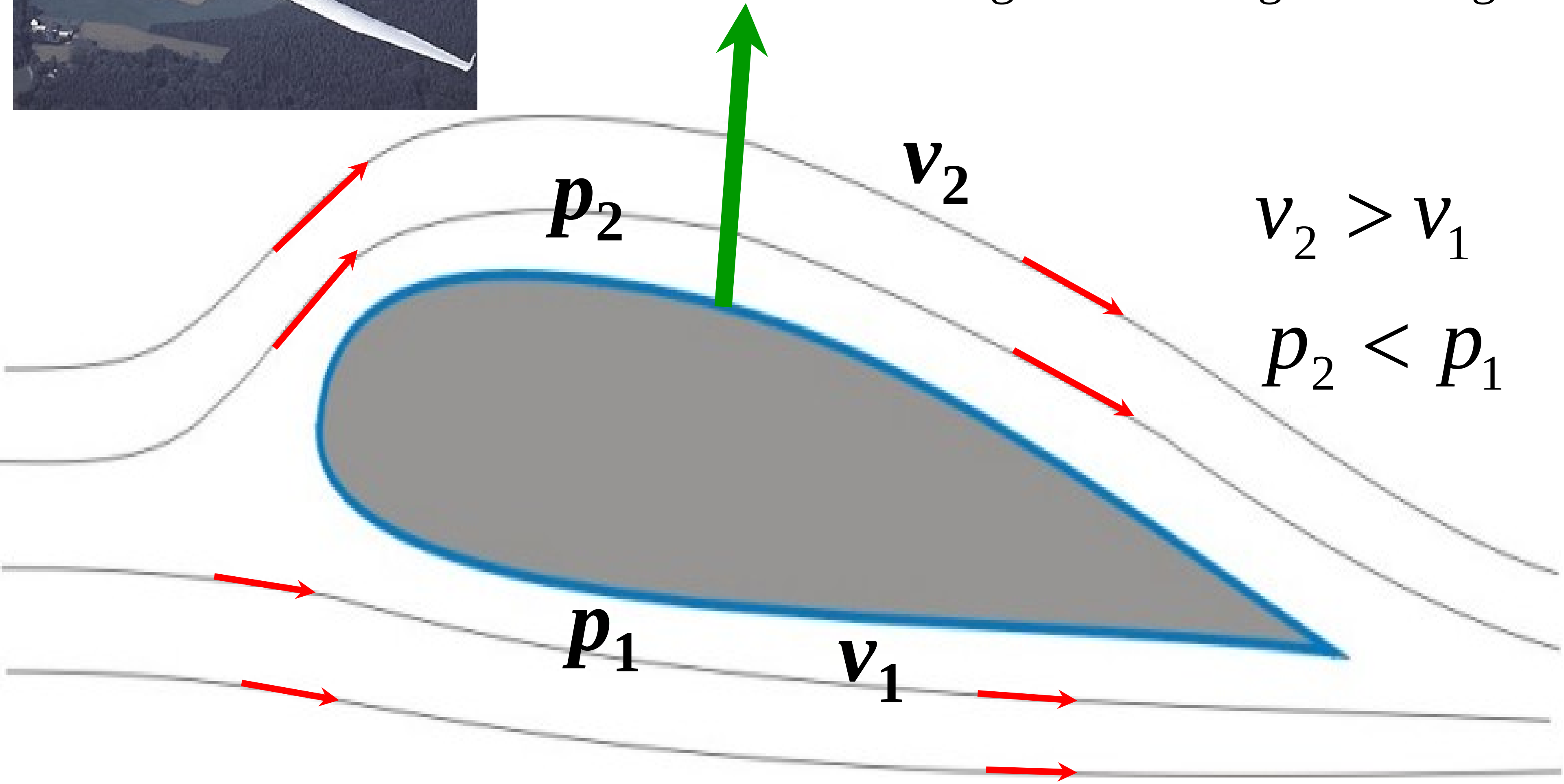
Aus der Mitte der Platte wird Luft geblasen. Hält man eine zweite Platte von unten dagegen, strömt die Luft zwischen ihnen aus und erzeugt dabei einen geringeren Druck. Der höhere Außendruck preßt die untere Platte gegen die obere, die dadurch gehalten wird.

Anwendung 1: Prinzip des Zerstäubers

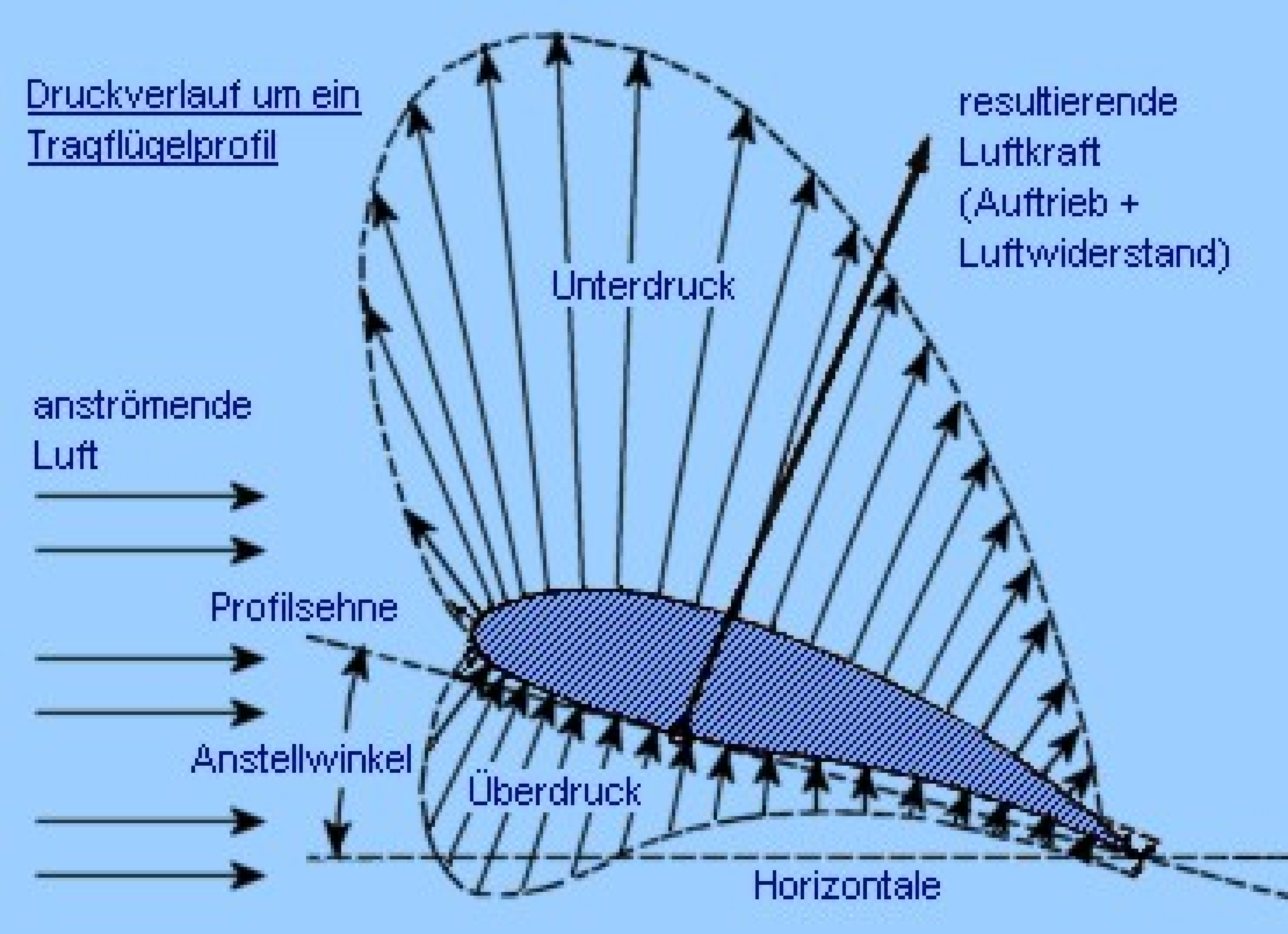
Anwendung 2: Prinzip der Tragfläche

Oberhalb der Tragfläche strömt die Luft schneller, deshalb ist hier der Druck geringer. Der höhere Druck unterhalb der Tragfläche erzeugt eine Tragkraft *F*.

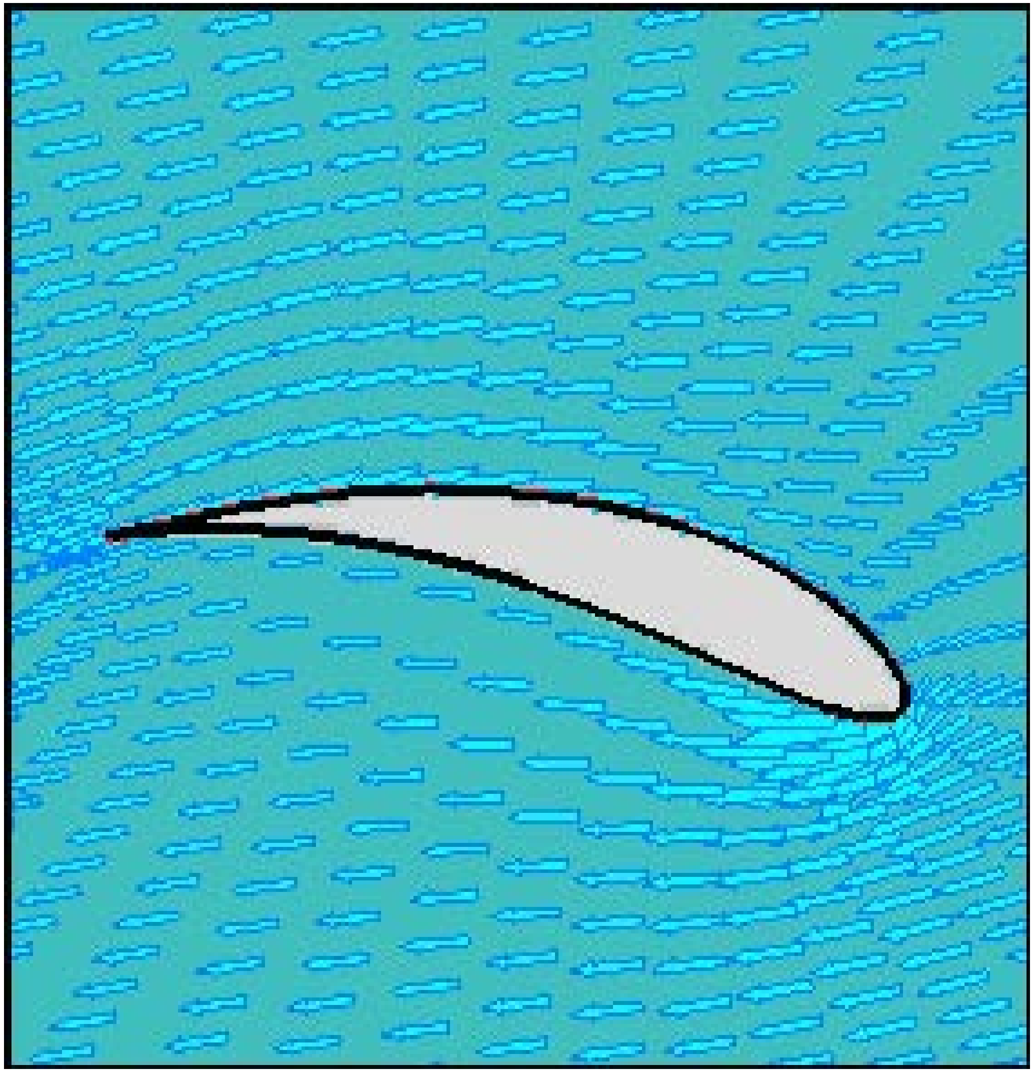


$$v_2 > v_1$$

$$p_2 < p_1$$

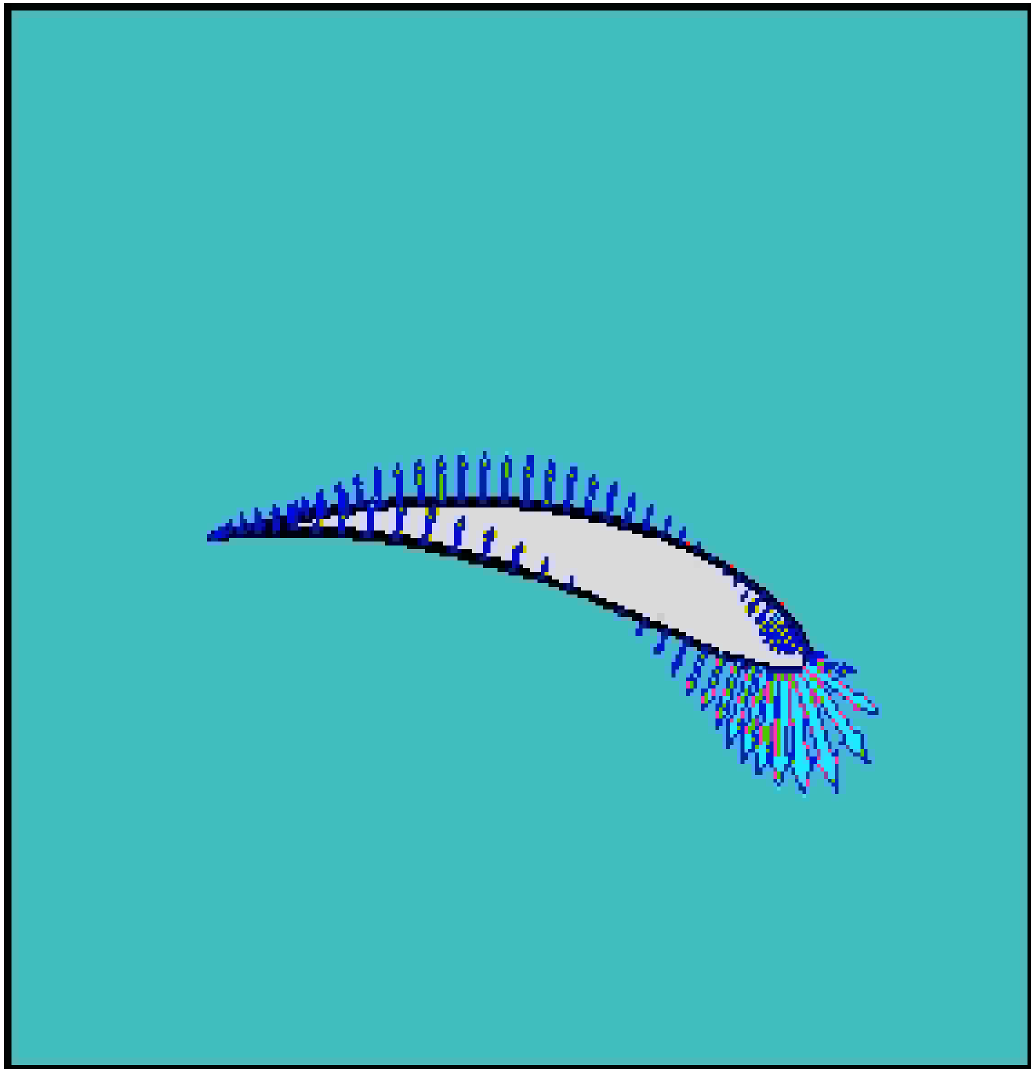

Druckverlauf um ein Tragflügelprofil
resultierende Luftkraft (Auftrieb + Luftwiderstand)
Unterdruck
anströmende Luft
Profilsehne
Anstellwinkel
Überdruck
Horizontale

Geschwindigkeitsfeld



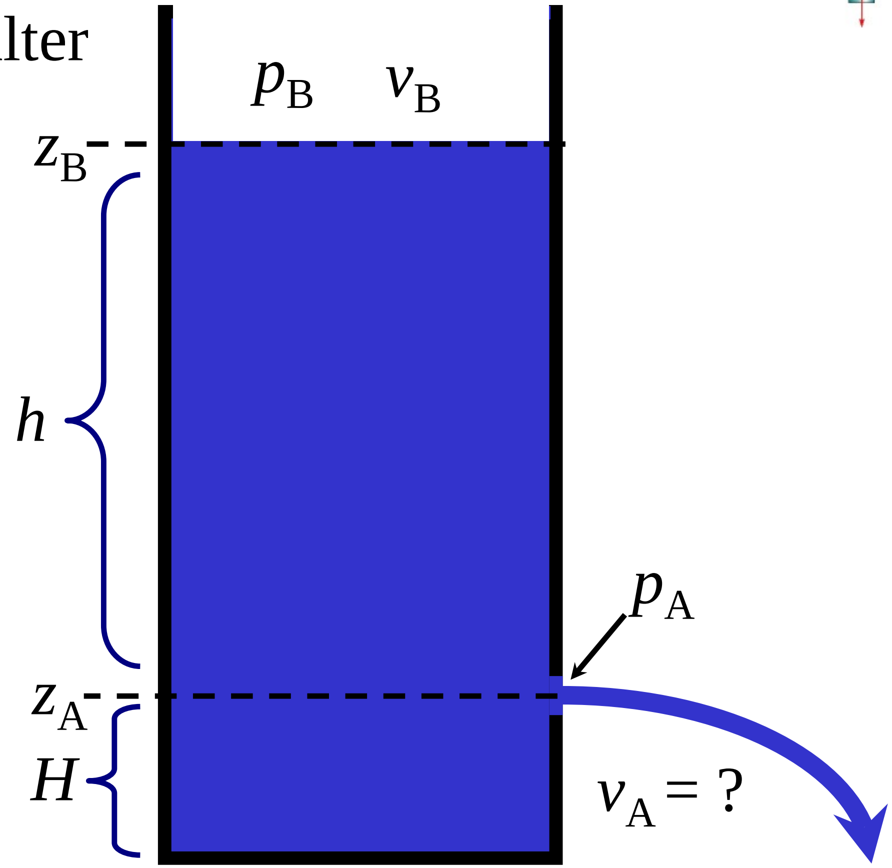
In jedem Raumpunkt ist der Vektor der Geschwindigkeit der Luftteilchen eingezeichnet.

Kraftfeld



In jedem Punkt ist der Vektor der Kraft auf die Tragfläche dargestellt.

Anwendung 3: Ausströmen aus einem Behälter



Fläche B: Obere Fläche des Behälters
Fläche A: Fläche der Ausströmöffnung

Druckbilanz: $$p_A + \rho_F\, g\, z_A + \frac{1}{2}\rho_F v_A^2$$

$$= p_B + \rho_F\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho_F v_B^2$$

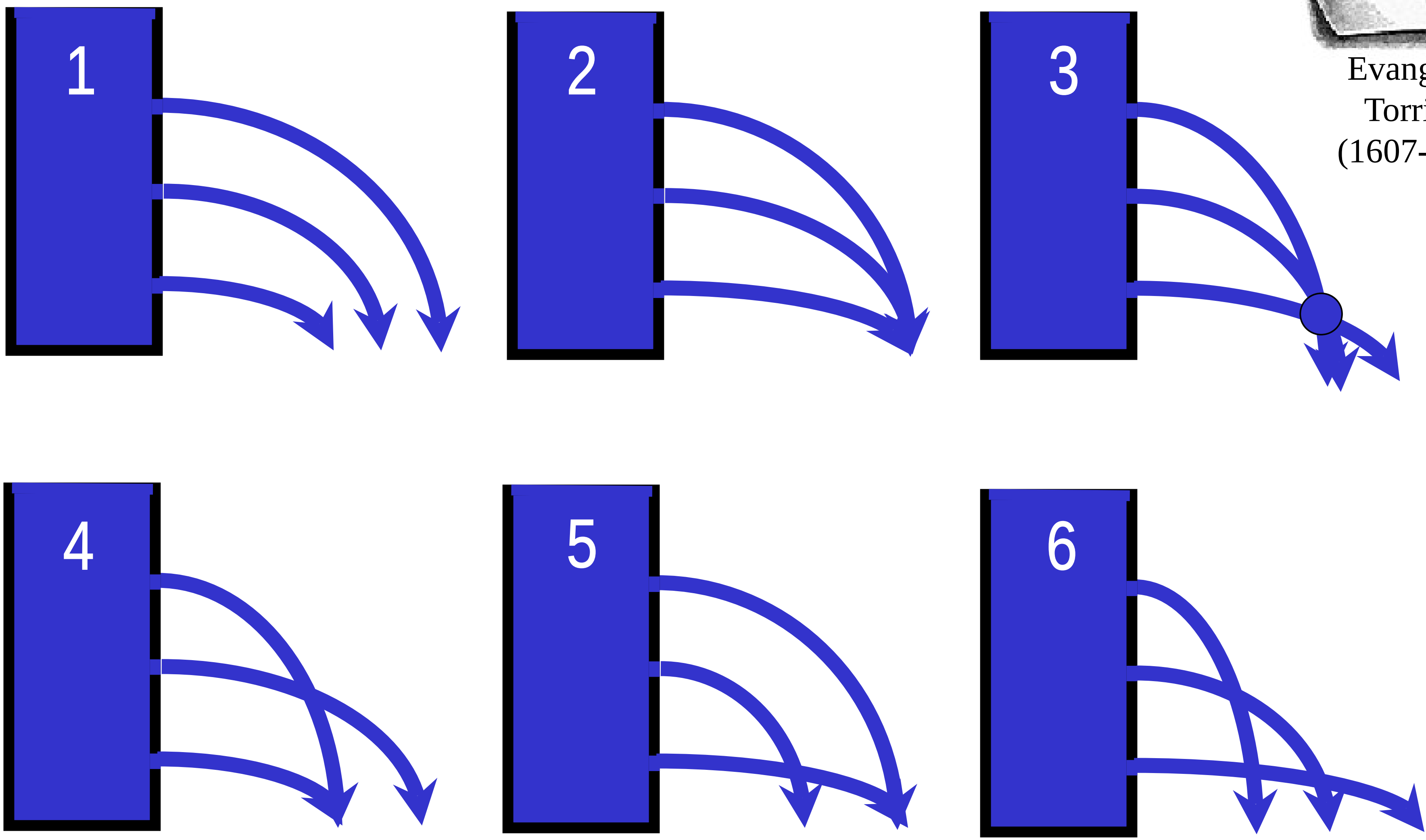
Wegen $p_A = p_B$ (Luftdruck) und $v_A >> v_B$, da die Fläche B sehr viel größer als die Fläche A ist, folgt:

$$\rho_F\, g\,(z_B - z_A) = \frac{1}{2}\rho_F\left(v_A^2 - v_B^2\right) \approx \frac{1}{2}\rho_F v_A^2$$

$$\Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2\, g\, h}$$

d.h. die Flüssigkeit tritt mit der Geschwindigkeit aus, die sie bei einem freien Fall aus der Höhe *h* hätte. Dies ist das *Gesetz von Torricelli*.

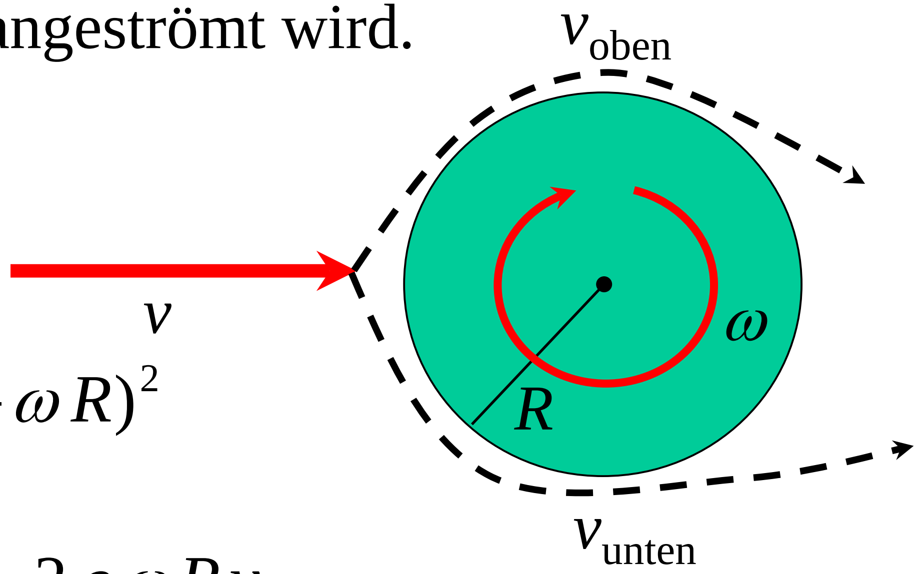
Kleines Rätsel zum Gesetz von Torricelli



Evangelista Torricelli (1607-1647)

Der Magnus-Effekt

Wir betrachten einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Zylinder mit dem Radius R, der von einer Flüssigkeit oder einem Gas der Dichte ρ mit der Geschwindigkeit v angeströmt wird.



$$v_{\text{oben}} = v + \omega R$$

$$v_{\text{unten}} = v - \omega R$$

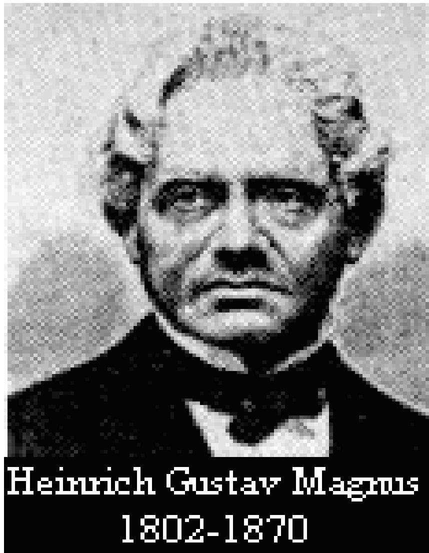
$$p_{\text{oben}} + \frac{1}{2}\rho(v+\omega R)^2 = p_{\text{unten}} + \frac{1}{2}\rho(v-\omega R)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p = p_{\text{oben}} - p_{\text{unten}} = \frac{1}{2}\rho(4\omega R v) = 2\rho\omega R v$$

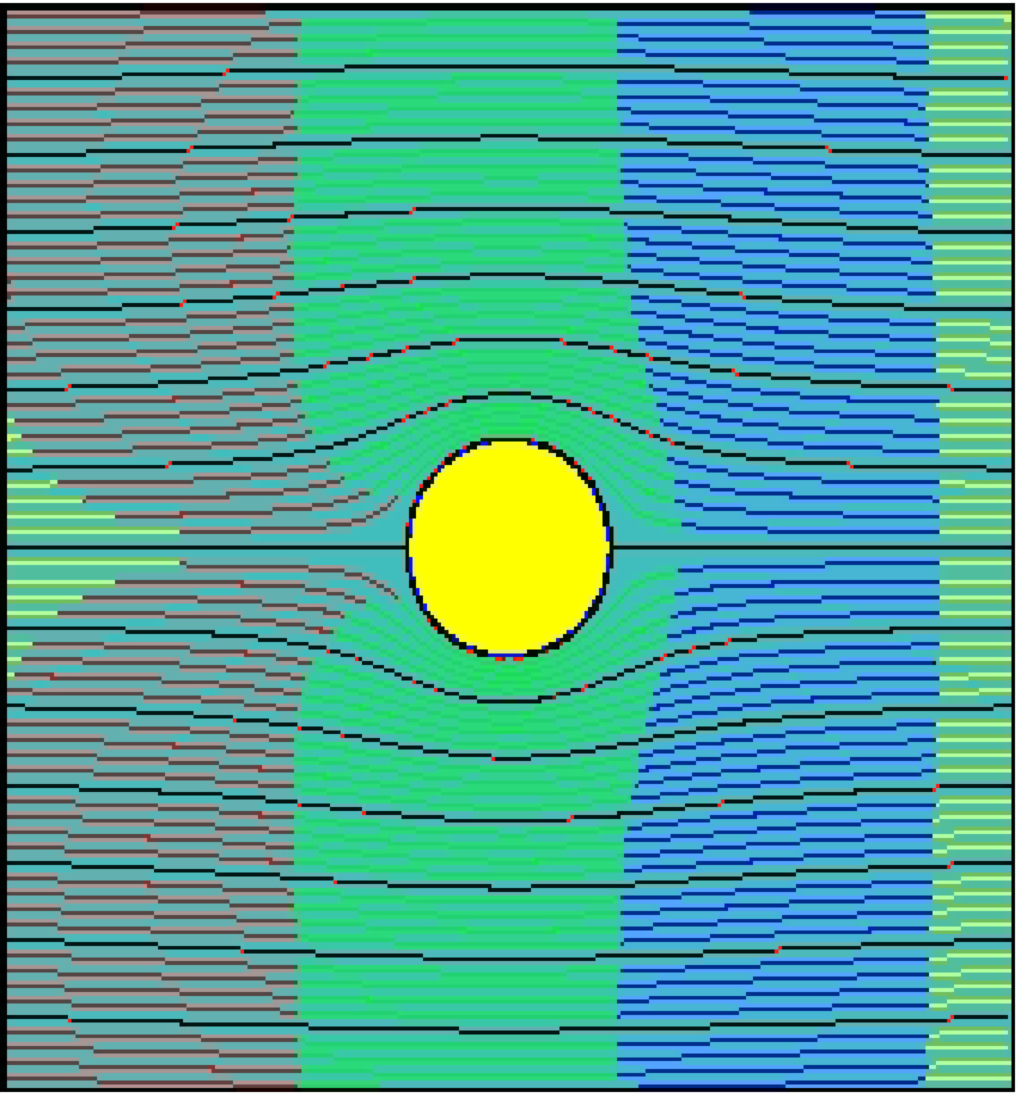
Damit ergibt sich für die nach oben wirkende Kraft (L ist die Länge des Zylinders):

$$F = A_{\text{eff}}\,\Delta p = 2RL(2\rho\omega R v) = 4R^2 L\rho\omega v$$

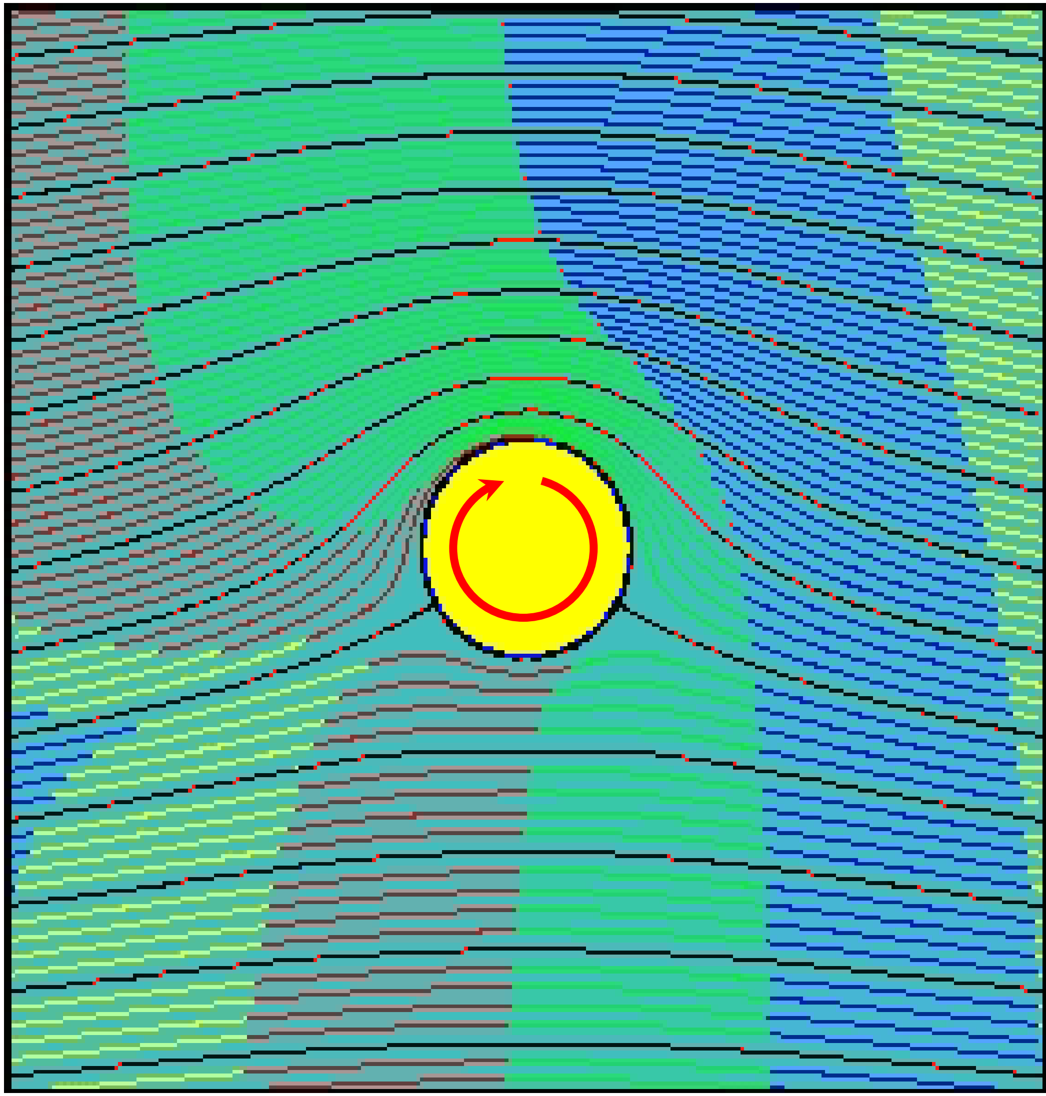
$$\text{Vektoriell:} \quad \vec{F} = 4R^2 L\rho\,\vec{v}\times\vec{\omega}$$



Umströmung eines Zylinders



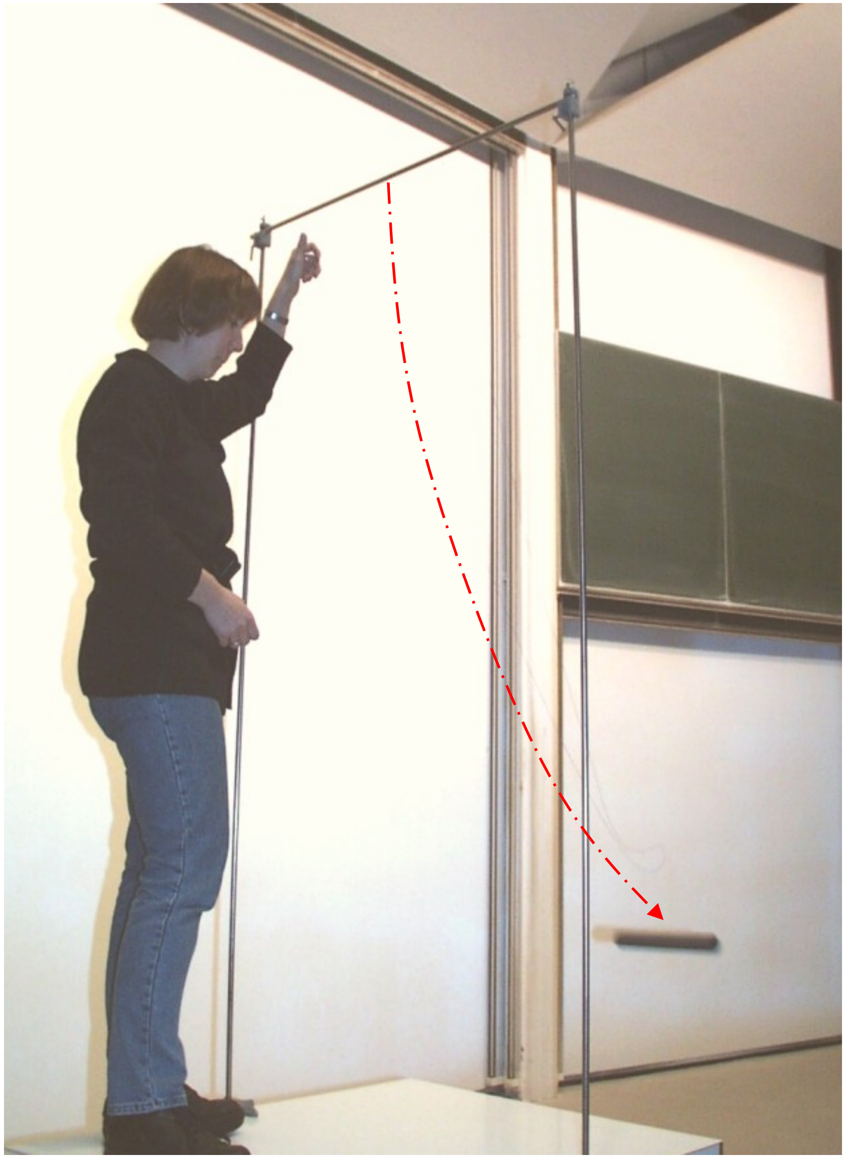
starrer Zylinder



rotierender Zylinder

Versuch: Magnus-Effekt

Um einen leichten runden Körper werden zwei Fäden gewickelt, an denen er hängt. Läßt man ihn los, wickeln sich die Fäden ab, und der Körper bewegt sich rotierend nach unten. Dabei entsteht eine ungleiche Druckverteilung.



Der Körper wird dadurch auf eine gebogene Bahn gezwungen (Magnus-Effekt, 1852)


BVB
09