



# Inhalt der Vorlesung A1

## 2. Teilchen

### A. Einzelne Teilchen

### B. Mehrteilchensysteme

Starrer Körper - Bewegung

Translation

Rotation

Flüssigkeiten

Hydrostatik

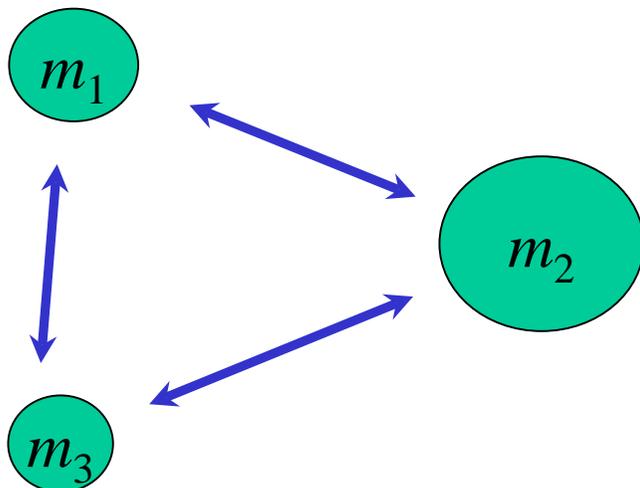
Hydrodynamik



Wir haben uns bei der Beschreibung von Bewegungsvorgängen bisher meist auf einen Massenpunkt beschränkt, auch wenn wir dieses Konzept aufgrund der damit verbundenen Abstraktion nicht konsequent durchhalten konnten. Reale Körper sind eben aus sehr vielen Teilchen zusammengesetzt.

Anhand des Massenpunkts haben wir die grundlegenden Bewegungsformen der Translation und der Rotation kennen gelernt und wir haben uns eine Methodik zur quantitativen Beschreibung erarbeitet.

Beispiel für Mehrteilchensysteme:



3 Körper unter dem Einfluss der Gravitation

Es stellt sich heraus, dass die Bewegung von drei freien Massen unter dem Einfluss ihrer Gravitation nicht mehr analytisch *exakt* auszurechnen ist !!!



Dreikörperprobleme sind in der Regel schon extrem kompliziert.



## OFFENE FRAGEN:

- (I) Ist die zentrale Annahme von „*punktförmigen*“ Massen überhaupt gerechtfertigt?
- (II) Wie sieht die Dynamik von mehr als einem Massepunkten aus?

### Definition – Starrer Körper

### Schwerpunkt revisited!

**Starrer Körper** =

System von Massepunkten,  
deren Abstände  $\vec{r}_i$  voneinander  
zeitlich konstant sind

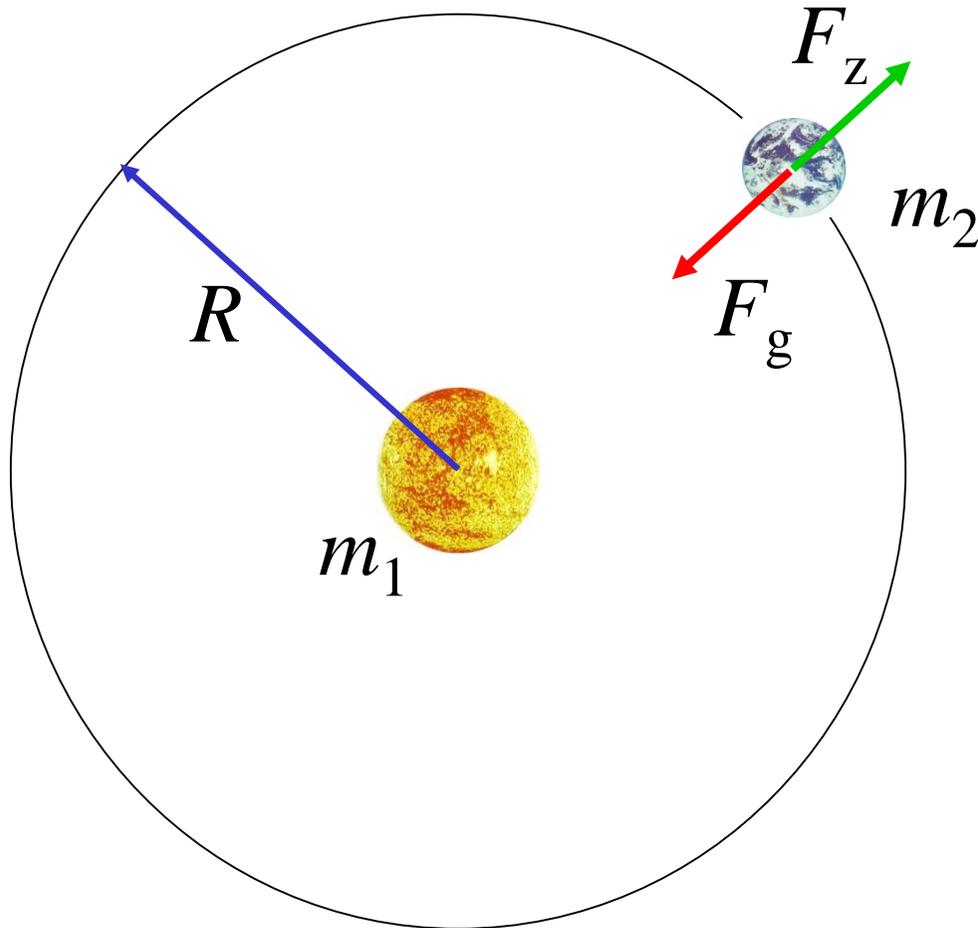
$$\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right| = c_{ij} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{dc_{ij}}{dt} = 0$$

Dies ist eine ausgezeichnete Annahme für alle festen Körper in der Natur!

Eine beliebige Bewegung eines solchen starren Körpers kann zerlegt werden  
in die Translationsbewegung seines Schwerpunkts +  
in seine Rotationsbewegung um eine Achse, die durch den  
Schwerpunkt verläuft.



Wohlbekanntes Beispiel von der Planetenbewegung:



Stark vereinfachtes System bestehend aus:

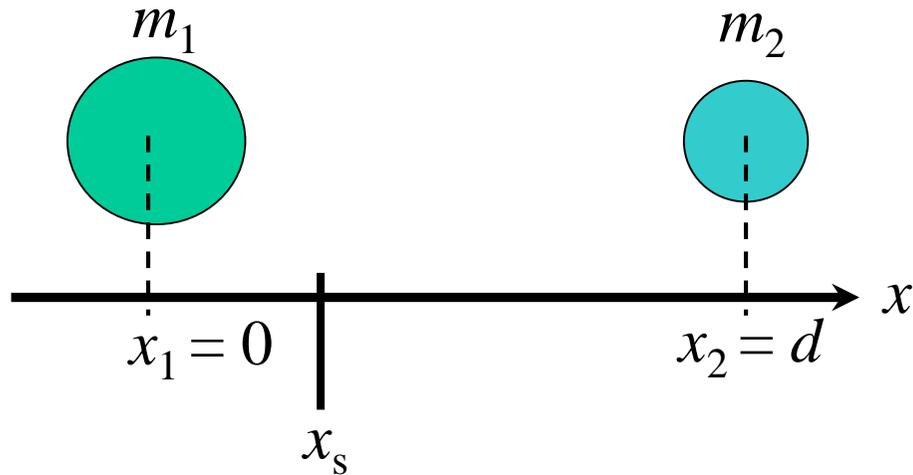
Sonne+Erde

Gemeinsamer Schwerpunkt bewegt sich durch das Weltall. In guter Näherung stimmt er mit der Position der Sonne überein ( $M_S \gg M_E$ ).

Erde bewegt sich um die Sonne auf einer Kreisbahn mit der Rotationsachse senkrecht zur Kreisebene.



zu (II): Wir betrachten zunächst zwei Massen in 1D:



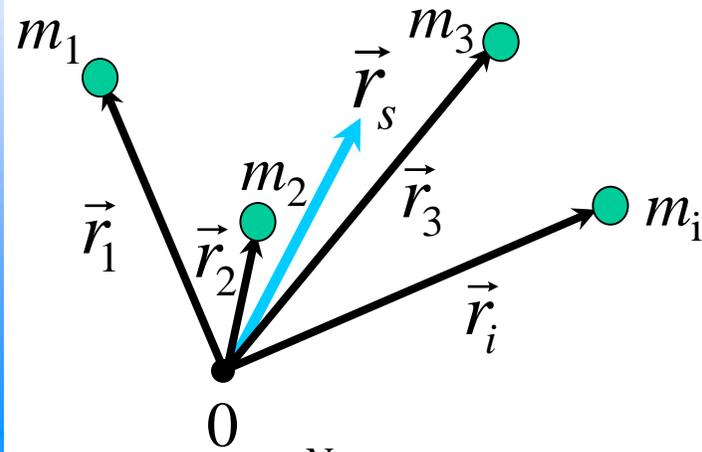
Der sog. „Massenmittelpunkt“ oder **Schwerpunkt**  $x_s$  ist definiert als:

$$m_{\text{ges}} x_s = m_1 x_1 + m_2 x_2, \quad m_{\text{ges}} = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

$$\text{Speziell: } m_1 = m_2 \Rightarrow x_s = \frac{1}{2} d$$

Dies wird nun auf  $N$  Massen  $m_i$ , die sich an den Orten  $\vec{r}_i$  befinden, in 3D verallgemeinert:



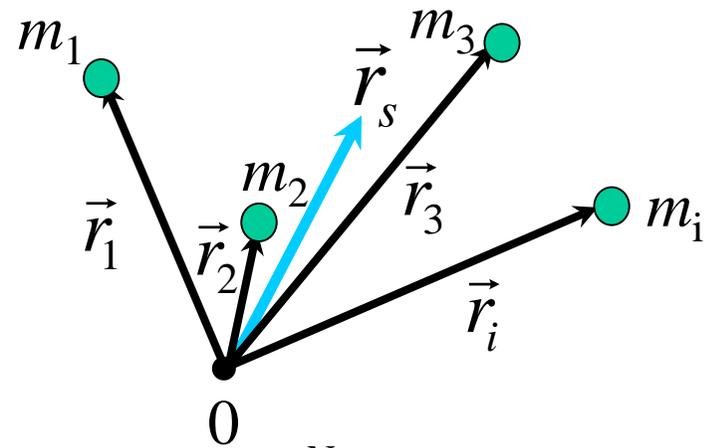
$$m_{\text{ges}} \vec{r}_s = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad m_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\text{Schwerpunkt: } \vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$



## Starrer Körper - Translation

Schwerpunkt von  $N$  Massen  $m_i$ , die sich an den Orten  $\vec{r}_i$  befinden:



$$m_{\text{ges}} \vec{r}_s = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad m_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N m_i$$

Schwerpunkt :

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

**Kontinuierliche Massenverteilung:**  
Oft betrachtet man nicht ihre mikroskopische Verteilung, sondern schmiert die Masse über den Raum aus:

Wie die Masse verteilt ist im Raum, wird dann über eine Massendichte beschrieben:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$

Mit dieser Dichte ergibt sich der Ortsvektor des Schwerpunkts zu:

$$\vec{r}_s = \frac{\iiint_V \vec{r} dm}{\iiint_V dm} = \frac{\iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{\iiint_V \rho(\vec{r}) dV}$$

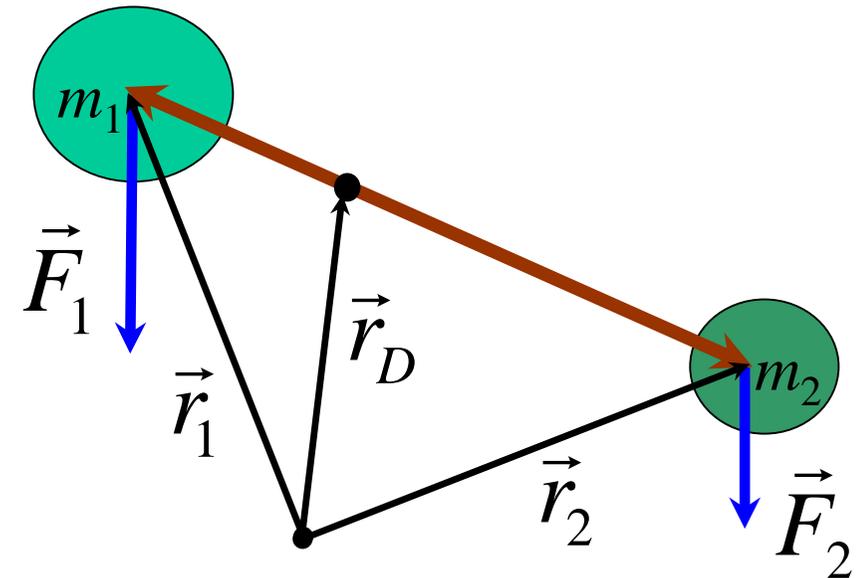


1. Beispiel: Die potentielle Energie von  $N$  Teilchen mit den Massen  $m_i$  in den Höhen  $z_i$  im Schwerfeld der Erde lautet:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \sum_{i=1}^N m_i g z_i = g \sum_{i=1}^N m_i z_i \\ &= m_{\text{ges}} g z_s \end{aligned}$$

➡ Die potentielle Energie der  $N$  Teilchen kann durch die potentielle Energie von *einem* Teilchen mit der Gesamtmasse  $m_{\text{ges}}$ , das sich im Schwerpunkt  $z_s$  befindet, ersetzt werden.

2. Beispiel: Zwei starr verbundene Massen im Schwerfeld der Erde:



Das System ist in Ruhe wenn alle Momente verschwinden, d.h.

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -(\vec{r}_D - \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_D - \vec{r}_2) \times \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{g} \quad \vec{F}_2 = m_2 \vec{g}$$



$$-(\vec{r}_D - \vec{r}_1) \times m_1 \vec{g} = (\vec{r}_D - \vec{r}_2) \times m_2 \vec{g}$$

$$\Rightarrow -(\vec{r}_D - \vec{r}_1) m_1 = (\vec{r}_D - \vec{r}_2) m_2$$

$$\Rightarrow \vec{r}_D = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{r}_s$$

$\Rightarrow$

Wenn ein System aus zwei Teilchen im Schwerpunkt unterstützt wird, dann befindet es sich im Gleichgewicht.

Dies soll jetzt auch für die *Dynamik* eines Systems aus  $N$  Massepunkten gezeigt werden:

Es gilt für den Schwerpunkt:

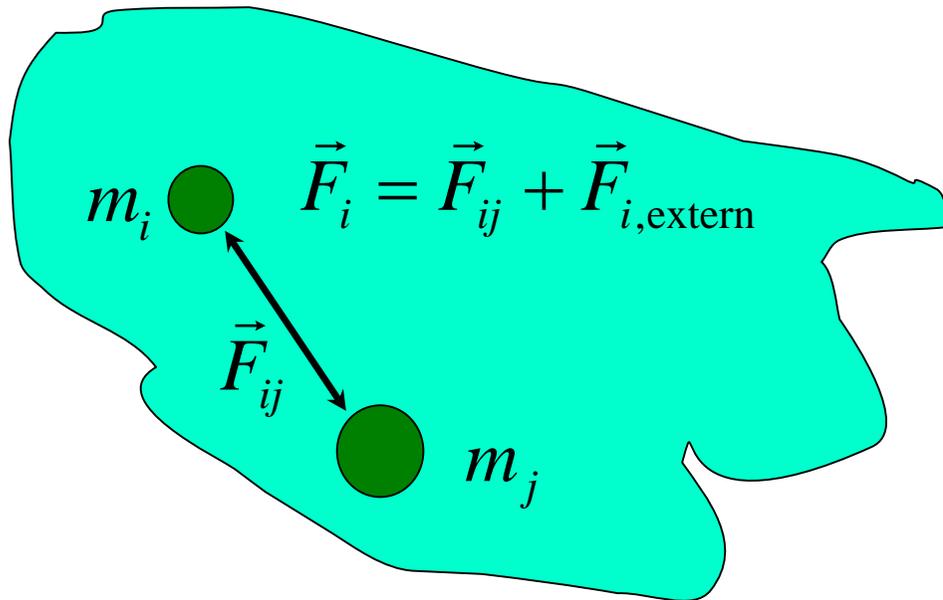
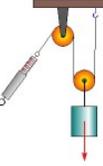
$$m_{\text{ges}} \vec{r}_s = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

differenzieren ergibt :

$$m_{\text{ges}} \dot{\vec{r}}_s = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

nochmal differenzieren :

$$m_{\text{ges}} \ddot{\vec{r}}_s = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$



Die wirkende resultierende Kraft  $\vec{F}_i$  auf die Masse  $m_i$  wird in „interne Kräfte“  $\vec{F}_{ij}$ , die die  $N$  Teilchen untereinander ausüben, und in „externe Kräfte“, die von Außen anliegen, aufgeteilt:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,\text{extern}} + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Damit ergibt sich:

$$m_{\text{ges}} \ddot{\vec{r}}_s = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,\text{extern}} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ij}$$

Wegen des 3. Newton'schen Axioms gibt es zu jeder internen Kraft  $\vec{F}_{ij}$  eine Gegenkraft  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ . Die zweite Summe verschwindet daher.

Die resultierende externe Kraft ist:

$$\vec{F}_{\text{extern}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,\text{extern}}$$



Also folgt nun die Gleichung:

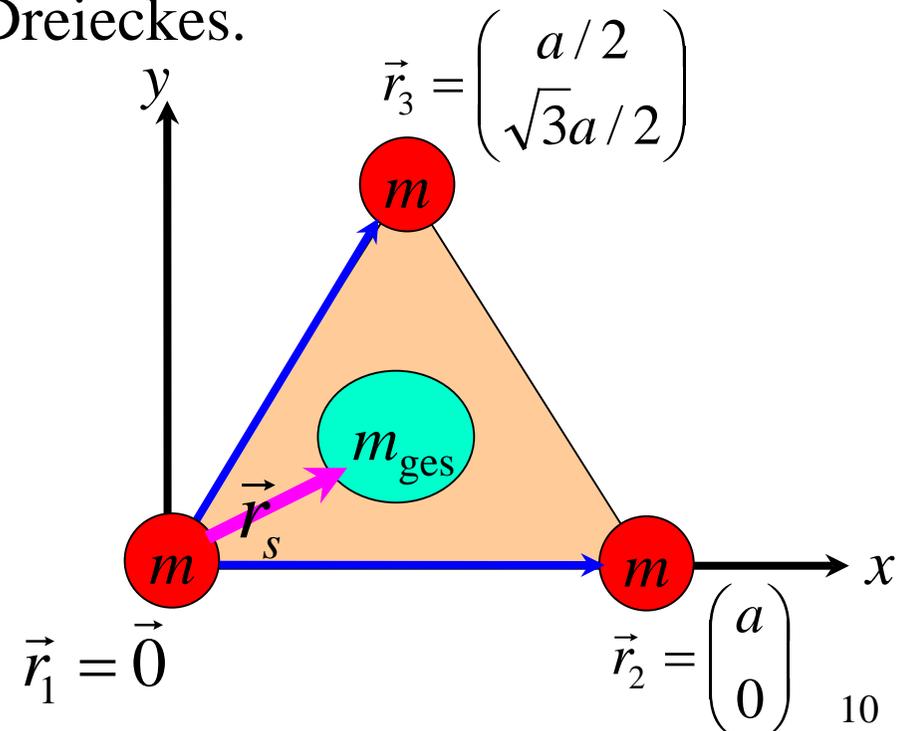
$$m_{\text{ges}} \ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}_{\text{extern}} \quad (*)$$

➔ Der Schwerpunkt eines Systems aus  $N$  Massepunkten verhält sich wie ein einzelnes Teilchen der Gesamtmasse  $m_{\text{ges}}$  unter der externen Kraft  $\vec{F}_{\text{extern}}$ .

$N$  Teilchen können also durch ihren Massenmittelpunkt ersetzt werden, d.h. die bisherige Annahme von „punktförmigen Massen“ ist jetzt nachträglich durch die Gleichung (\*) gerechtfertigt. Die Dynamik der Massen ist auf die Dynamik von  $\vec{r}_s$  zurückgeführt.

(iii) Die Lage des Schwerpunktes kann oft aus Symmetrieüberlegungen geschlossen werden. Bei homogener Masseverteilung liegt der Schwerpunkt auf einer Symmetrieachse eines Körpers.

1. Beispiel: Drei gleiche Massen  $m$  in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

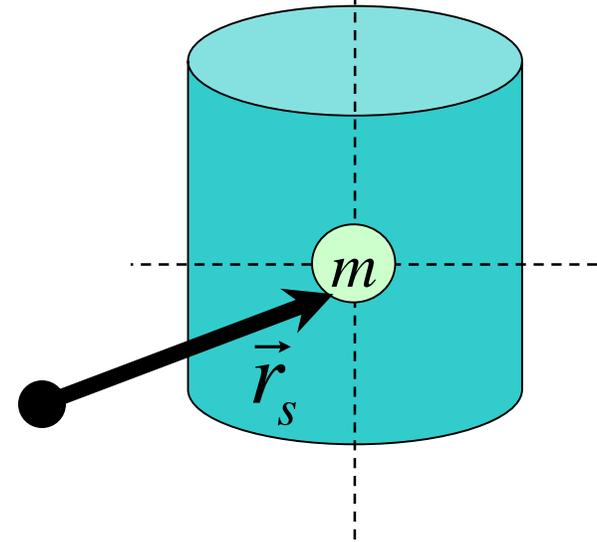




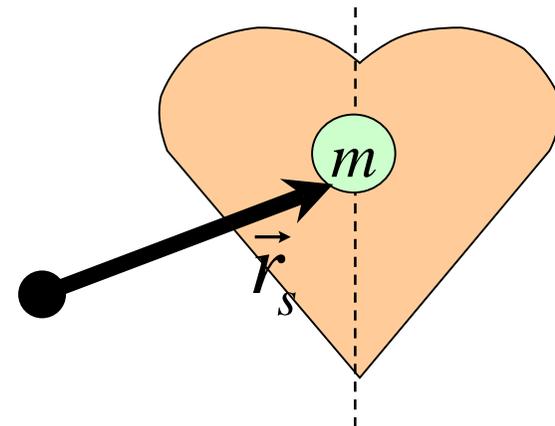
$$\begin{aligned}\vec{r}_s &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \\ &= \frac{m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} a/2 \\ a\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}}{m + m + m} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 + a + a/2 \\ 0 + 0 + a\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes hätte man sofort aus Symmetriegründen angeben können.

2. Beispiel: Zylinder der Masse  $m$  mit homogener Dichte.



3. Beispiel: „Herz“ der Masse  $m$  mit homogener Dichte.



**Beispiel 4:** Ein Körper, der im Schwerpunkt unterstützt wird, bewegt sich nicht.

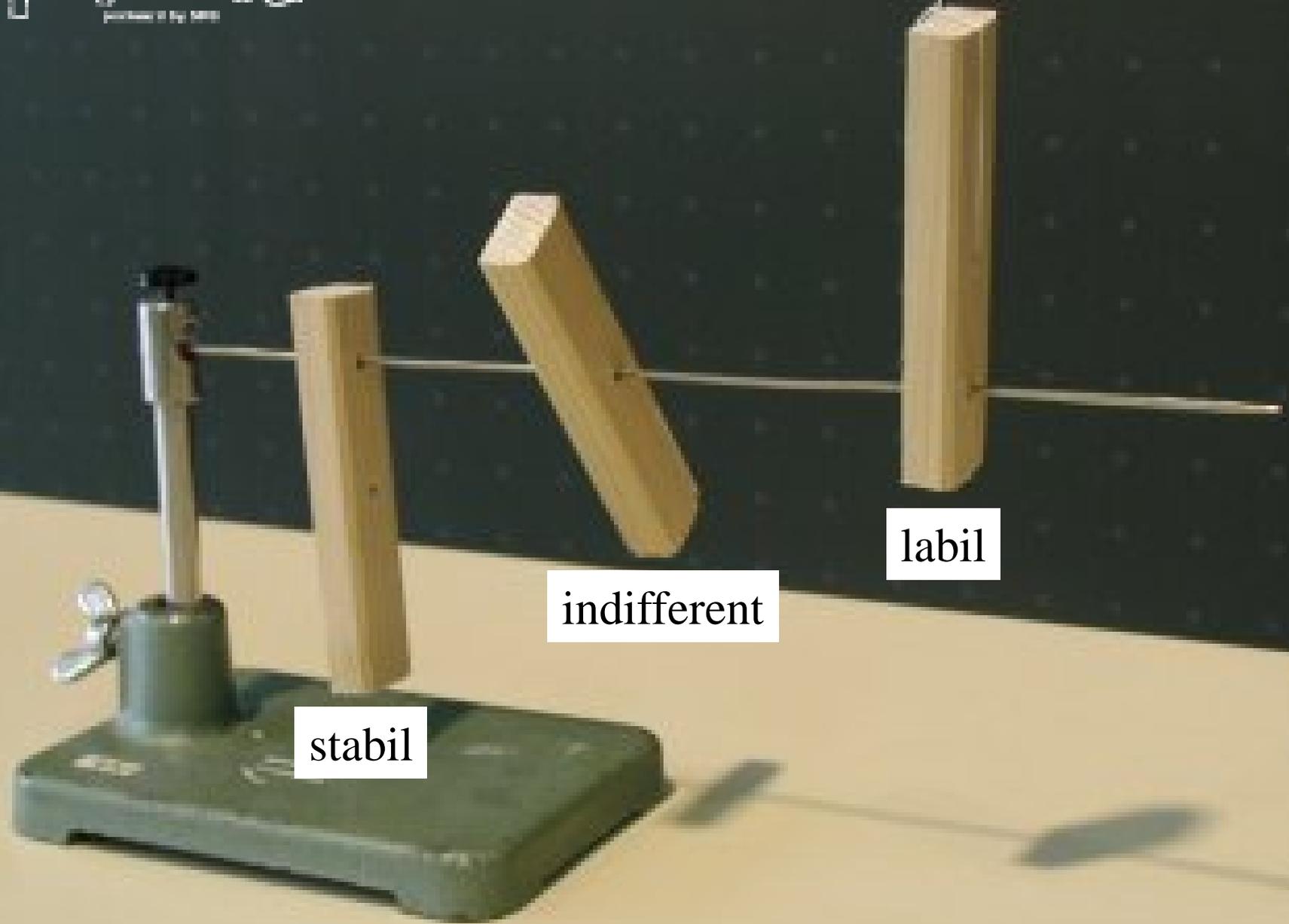




**Beispiel 5:** Wenn sich der Schwerpunkt eines Körpers über oder unter seiner Auflagefläche befindet, dann fällt er nicht um.



# Beispiel 6: Unterschiedliche Gleichgewichte



stabil

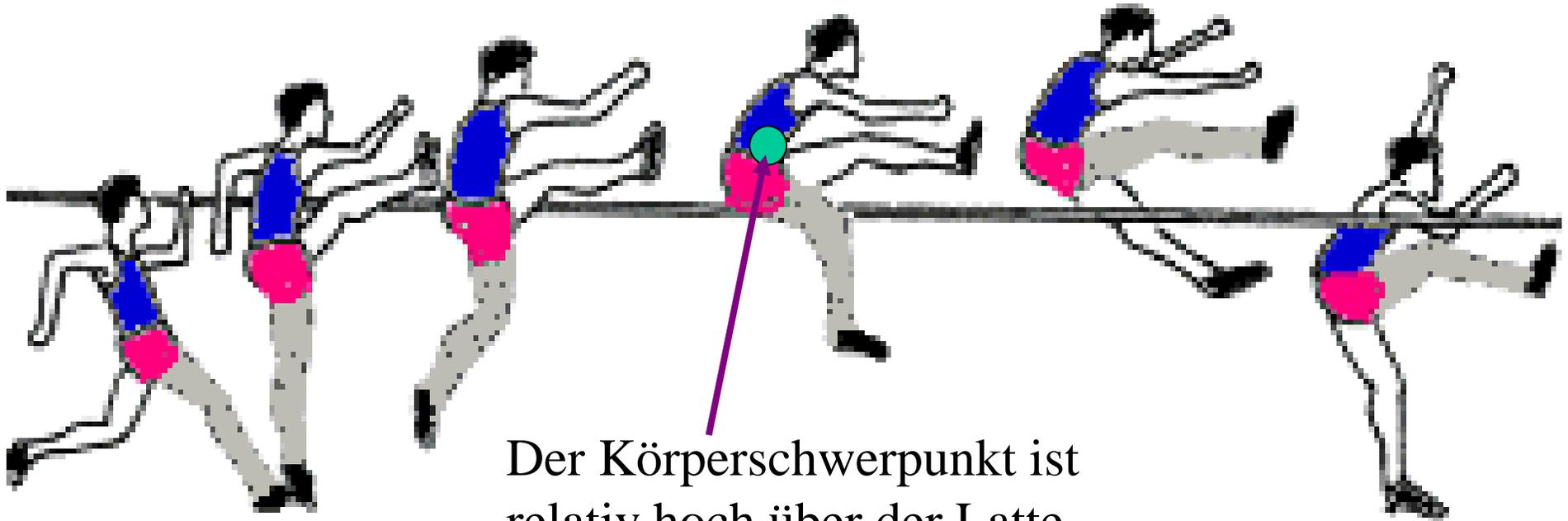
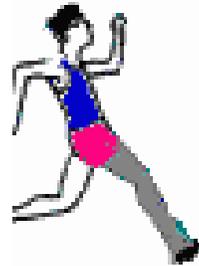
indifferent

labil



## Beispiel 9: Die verschiedenen Techniken beim Hochsprung (1)

Der Schersprung:

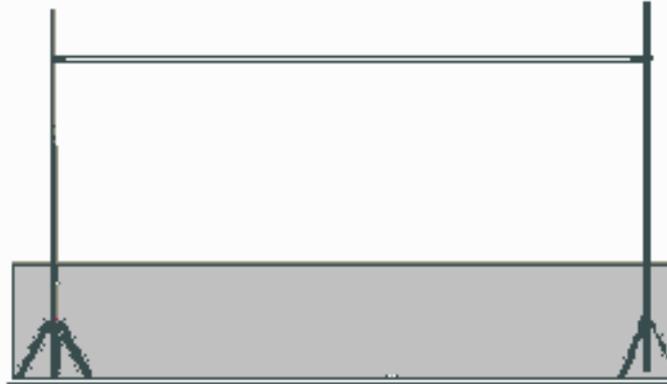


Der Körperschwerpunkt ist relativ hoch über der Latte.



## Beispiel 9: Die verschiedenen Techniken beim Hochsprung (2)

Der Straddle:

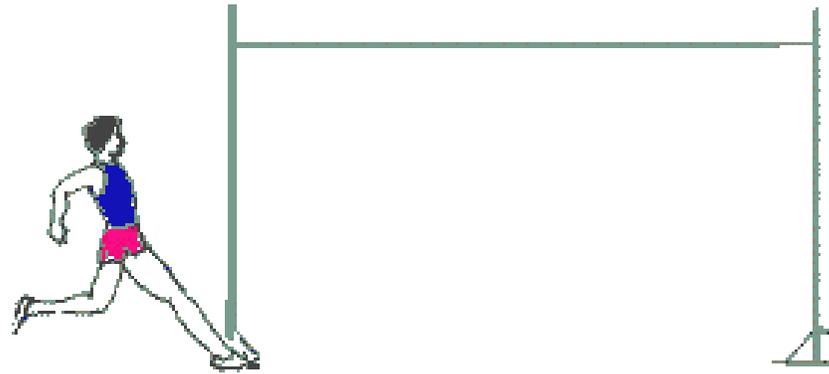


Der Körperschwerpunkt ist nicht so hoch über der Latte wie beim Schersprung.



## Beispiel 9: Die verschiedenen Techniken beim Hochsprung (3)

Der Fosbury-Flop:

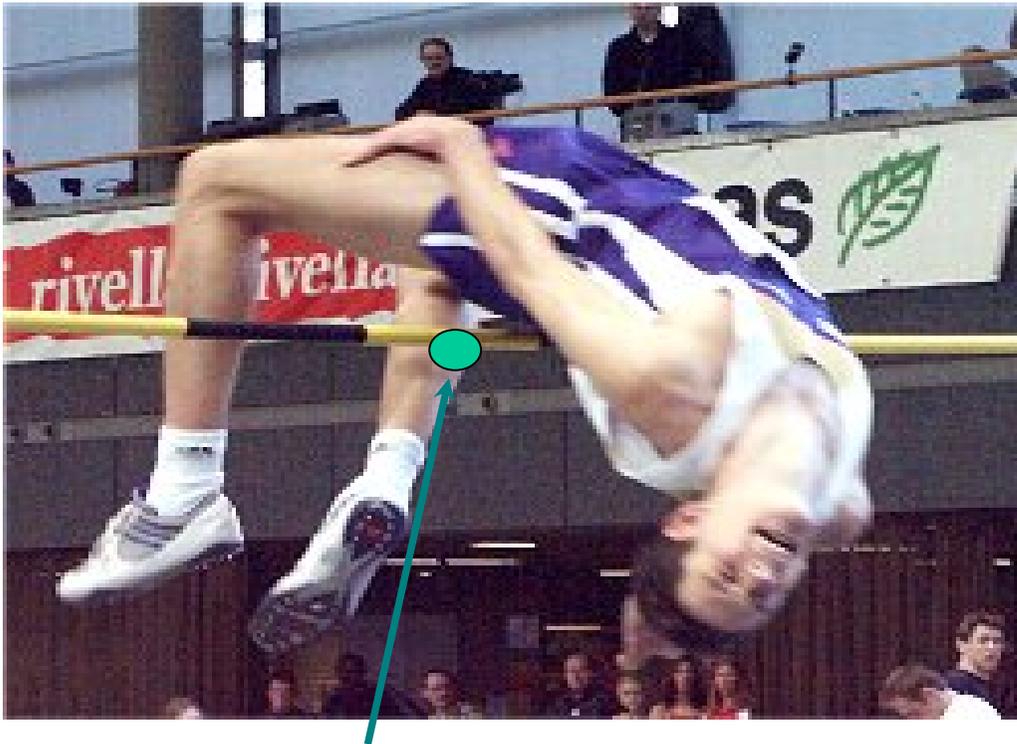


Der Körperschwerpunkt  
befindet sich beim Fosbury-  
Flop nie über der Latte!

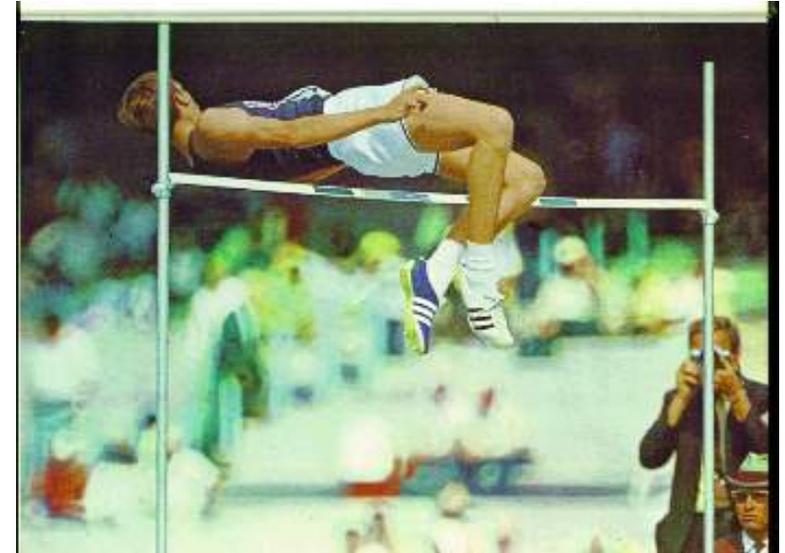
RD



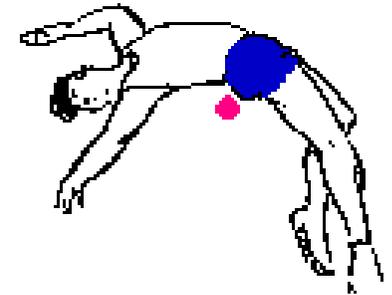
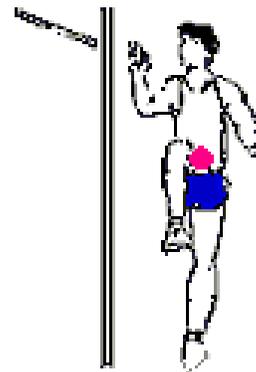
**Beispiel 9:** Der sog. „Fosbury-Flop“ im Hochsprung basiert auf der Tatsache, dass der Schwerpunkt des Springers im Prinzip durch die spezielle „Haltung“ deutlich tiefer gehalten werden kann, als bei anderen Techniken.



Der Schwerpunkt des Springers muß nicht mit über die Latte !

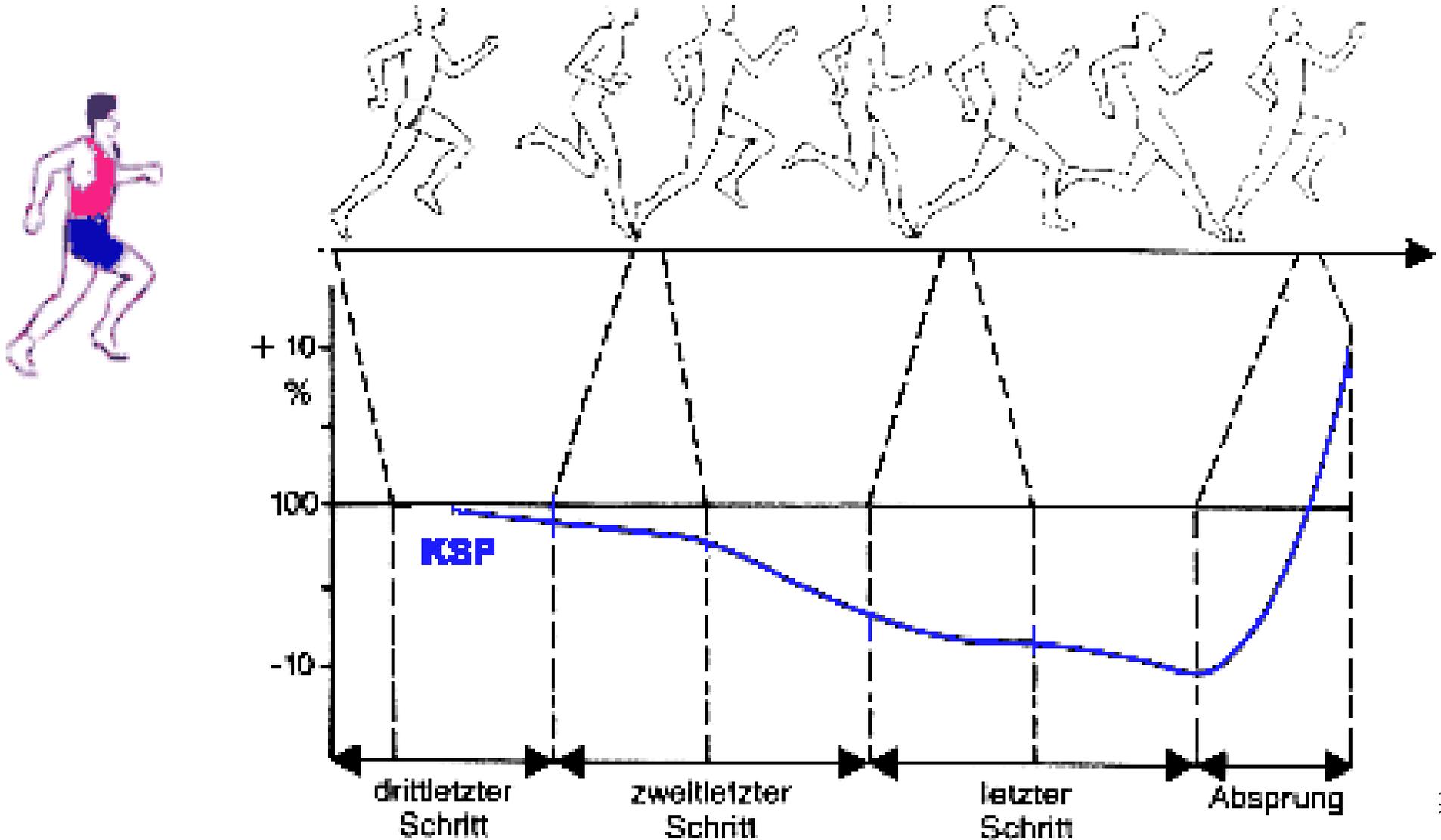


Dick Fosbury (Mexiko 1968)



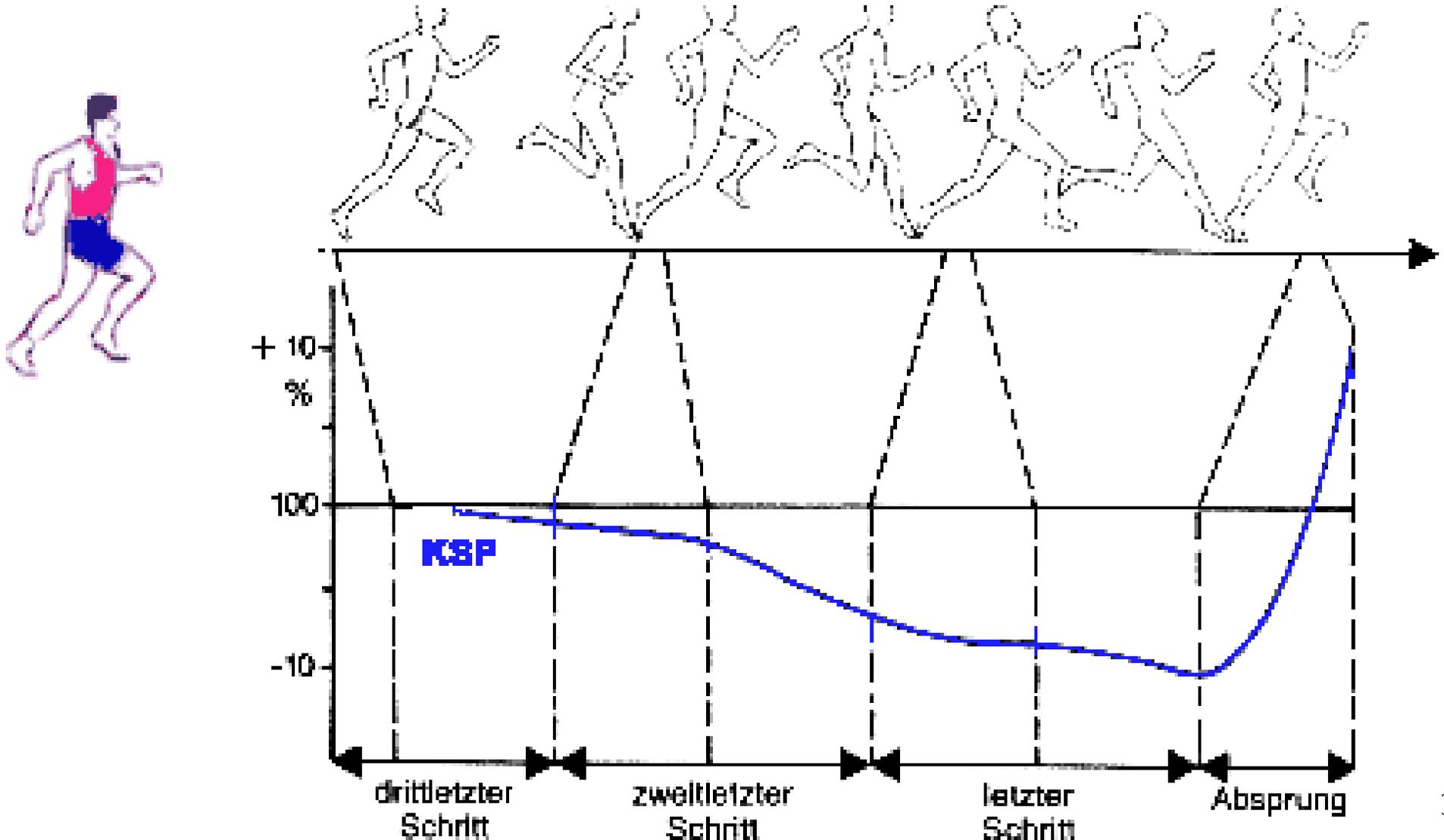


**Beispiel 10:** Der effektive Absprung beim Weitsprung basiert auf einer Absenkung des Schwerpunktes des Springers kurz vor dem Balken, damit es eine möglichst große vertikale Beschleunigungsstrecke gibt.



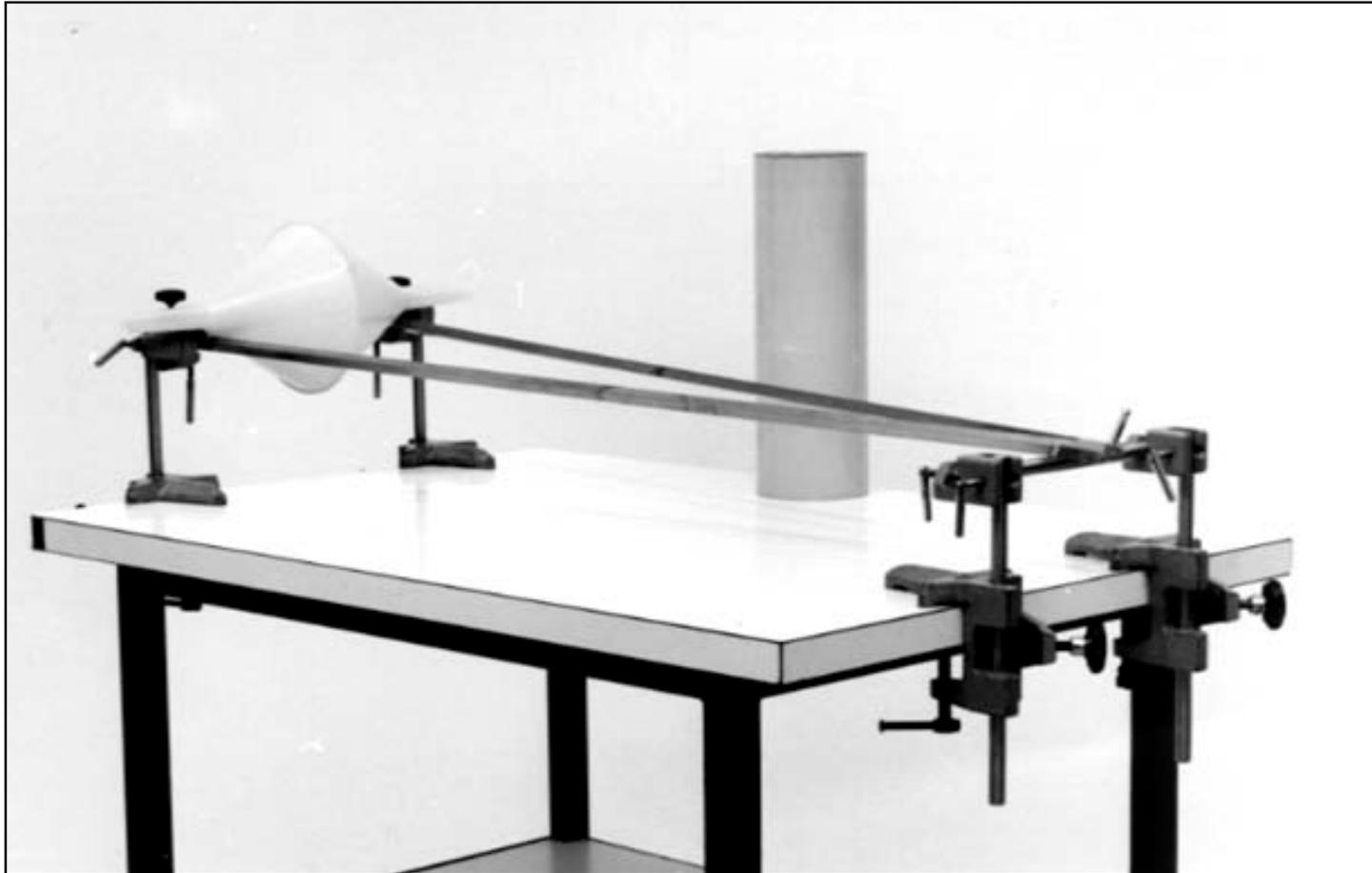


5. Beispiel: Der effektive Absprung beim Weitsprung basiert auf einer Absenkung des Schwerpunkts des Springers kurz vor dem Balken, damit es eine möglichst große vertikale Beschleunigungsstrecke gibt.





## Versuch: Doppelkegel-Paradoxon

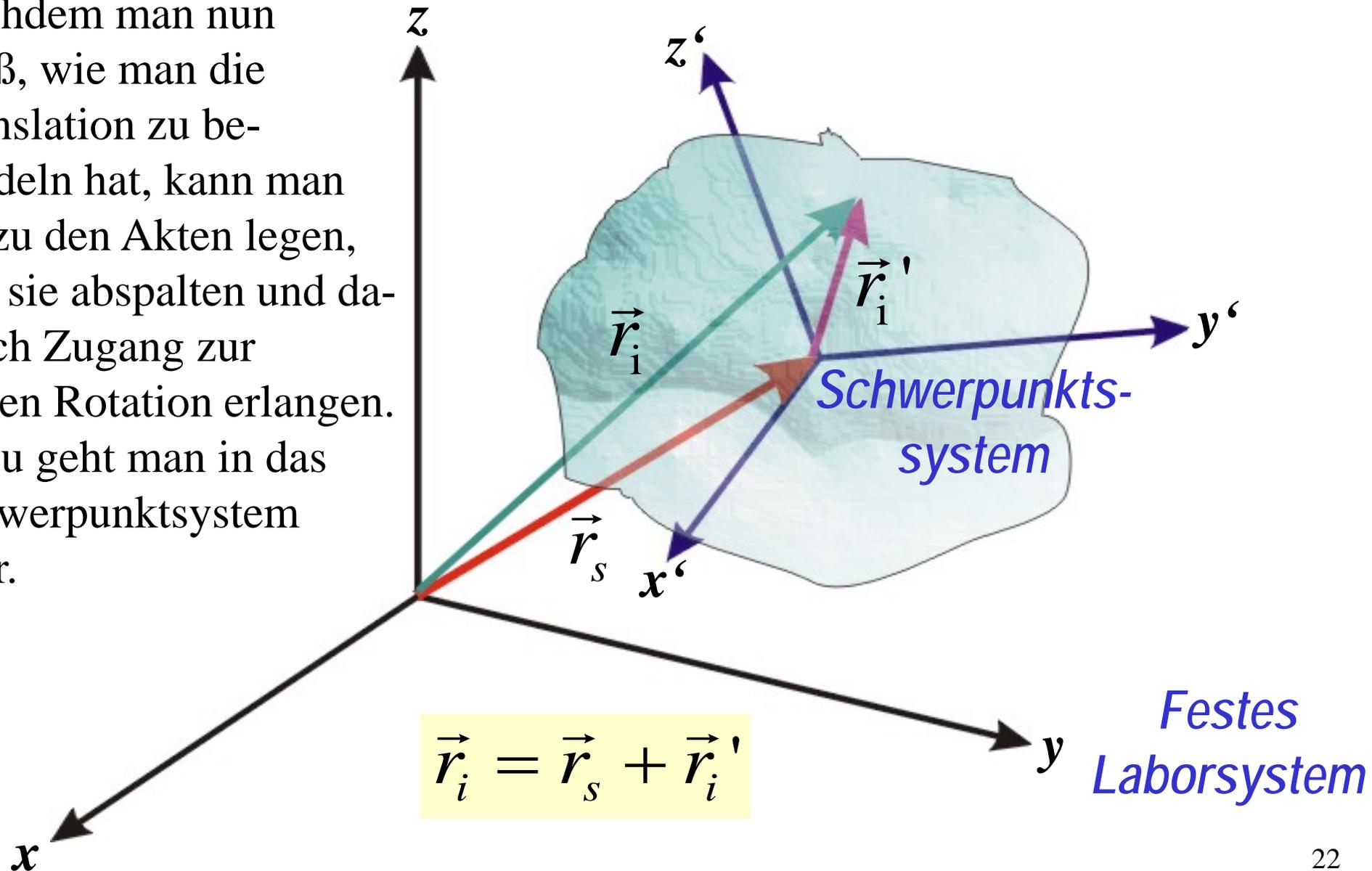


Der Schwerpunkt bewegt sich anders als es offensichtlich zu sehen ist! Das Objekt scheint die schiefe Ebene heraufzurollen, während in Wirklichkeit der Schwerpunkt hinabgleitet.



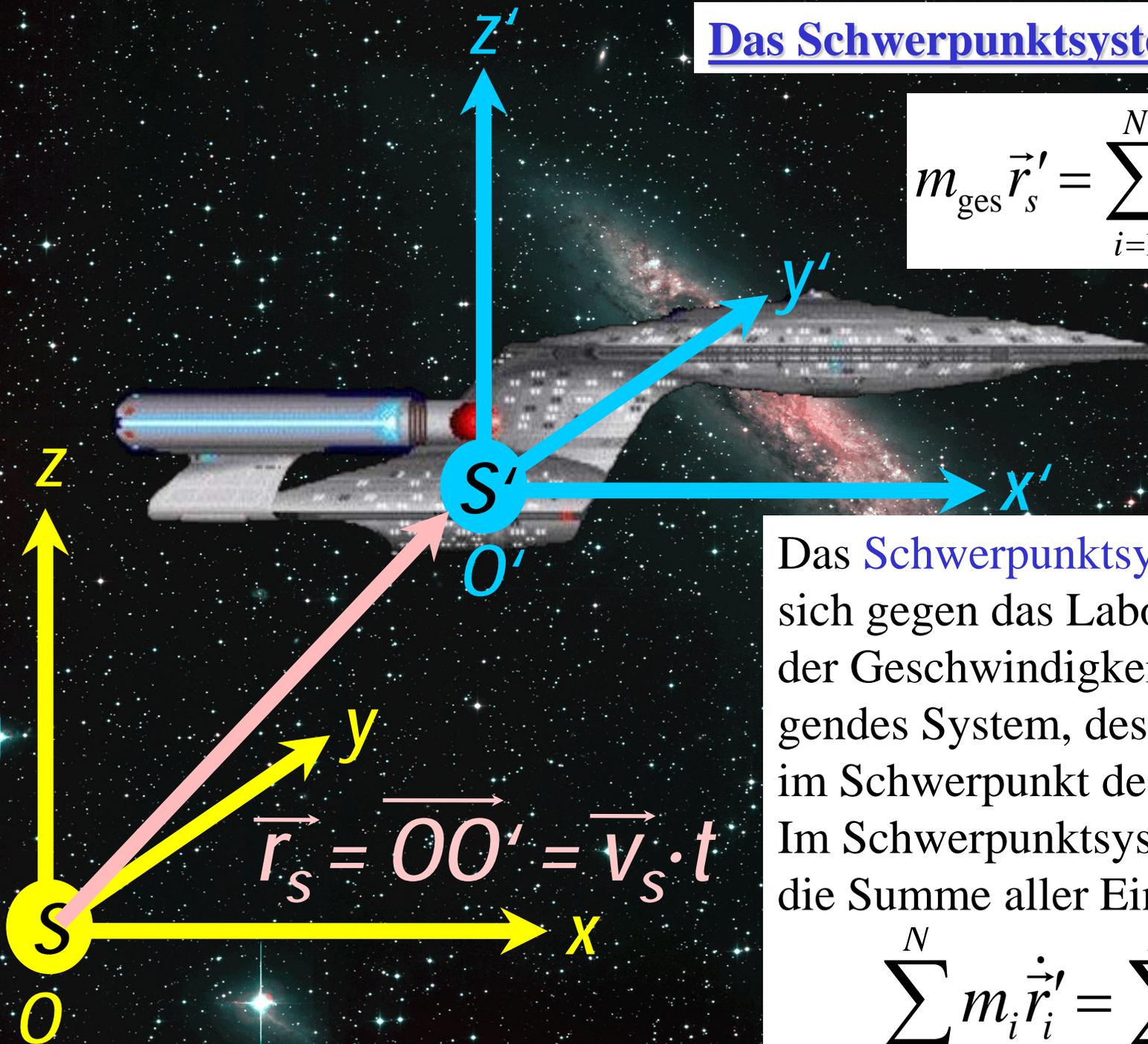
## Beschreibung von Rotation

Nachdem man nun weiß, wie man die Translation zu behandeln hat, kann man sie zu den Akten legen, d.h. sie abspalten und dadurch Zugang zur reinen Rotation erlangen. Dazu geht man in das Schwerpunktsystem über.



## Das Schwerpunktsystem

$$m_{\text{ges}} \vec{r}'_s = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{0}$$



Das **Schwerpunktsystem**  $S'$  ist ein sich gegen das Laborsystem  $S$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_s = \dot{\vec{r}}_s$  bewegendes System, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Körpers liegt. Im Schwerpunktsystem verschwindet die Summe aller Einzelimpulse:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}'_i = \vec{0}$$



Beschreibung des Rotationszustands des starren Körpers:

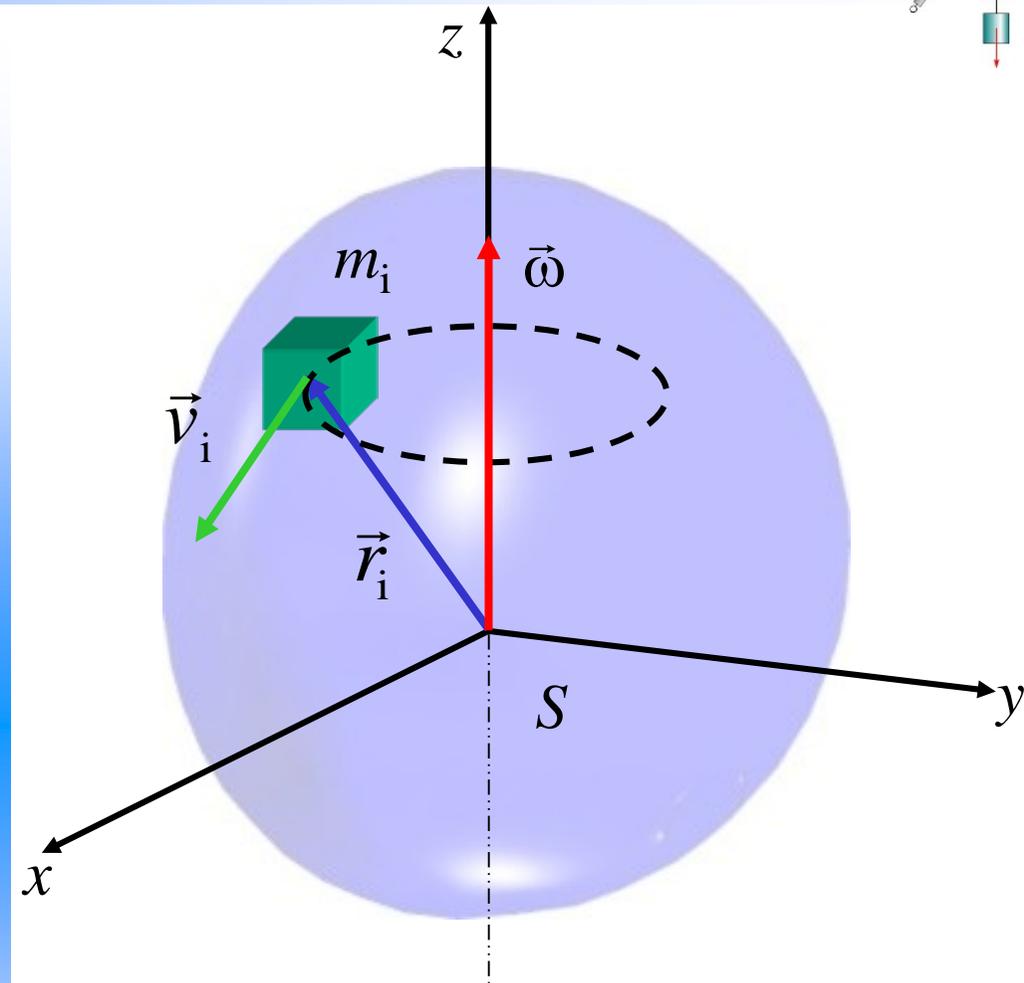
Für den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers gilt:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Der starre Körper rotiere nun um eine *feste* Achse  $\vec{\omega}$ .

Die Geschwindigkeit des Massenpunktes  $m_i$  ist dann

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



Einsetzen liefert

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$



Wir betrachten jetzt nur den Fall einer symmetrischen Masseverteilung. Als Rotationsachse wird die  $z$ -Achse gewählt. Dann gilt:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y_i \\ \omega x_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y_i \\ \omega x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega x_i z_i \\ -\omega y_i z_i \\ \omega(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

Bei einer symmetrischen Masseverteilung verschwinden die Summen über  $x_i z_i$  und  $y_i z_i$ . Mit  $r_{i,\perp} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$  als senkrechtem Abstand des Massenelementes  $m_i$  von der Drehachse lässt sich der Drehimpuls folgendermaßen schreiben:

$$\vec{L} = \left( \sum_{i=1}^N m_i r_{i,\perp}^2 \right) \vec{\omega}$$

Den Ausdruck  $I = \sum_{i=1}^N m_i r_{i,\perp}^2$

nennt man das **Trägheitsmoment** des Körpers. Der Drehimpuls wird damit

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$



## Die Bewegungsgleichung des starren Körpers

Der Drehimpuls ist nach der ursprünglichen Definition:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Mit der Definition des Drehmoments

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

folgt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Natürlich gilt dieses Resultat auch für  $N$  Massenelemente  $m_i$  :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \vec{M}$$

Die kinetische Energie des rotierenden Körpers ist:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

Nach einiger Umformung ergibt sich für die Rotationsenergie:

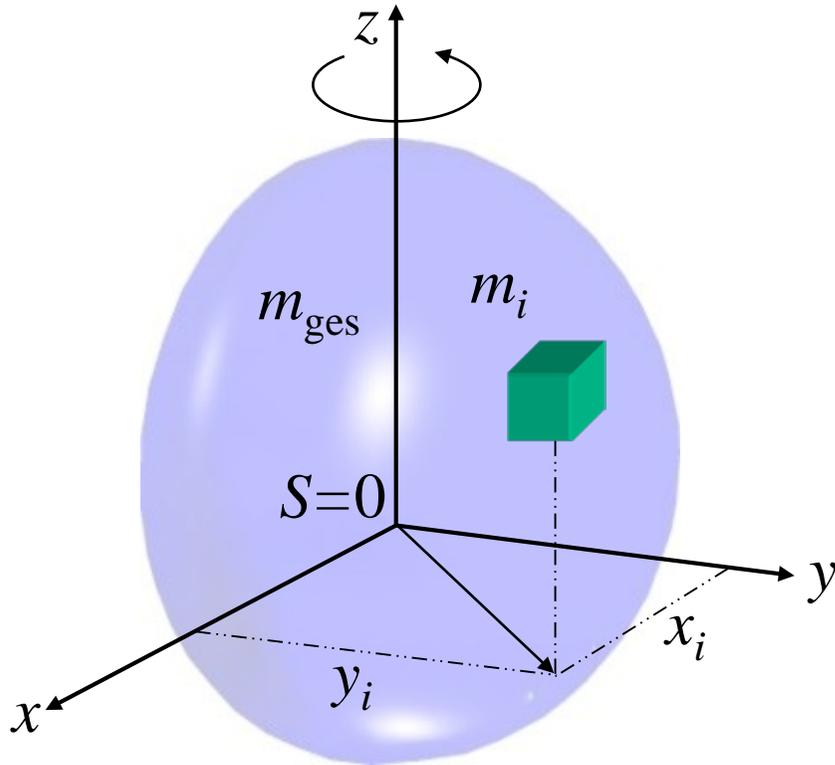
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \quad \vec{L} = I \vec{\omega}$$

Dann ergibt sich die Rotationsenergie in der Form:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

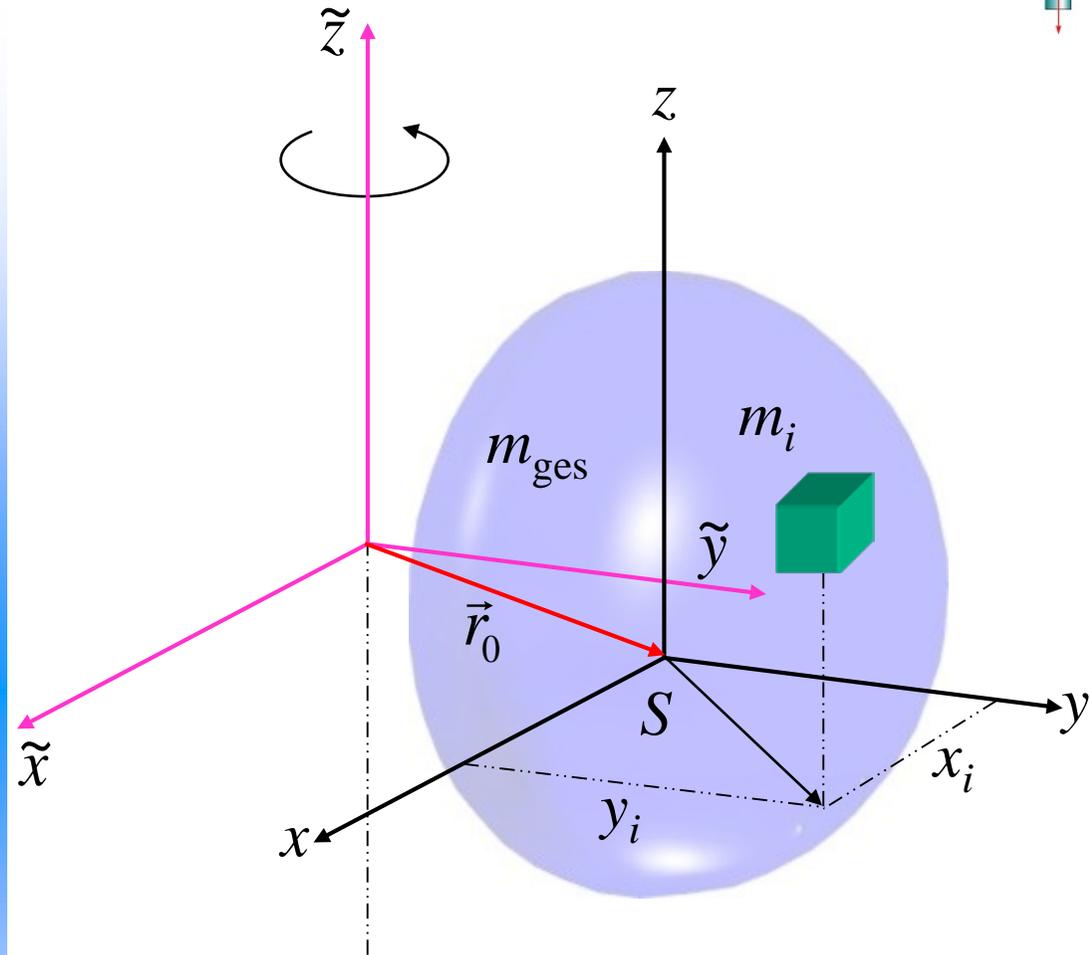


## Berechnung von Trägheitsmomenten: Der Satz von Steiner



Bei der Drehung um die durch den Schwerpunkt  $S = 0$  gehende  $z$ -Achse ist das Trägheitsmoment

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



Nun wird um eine neue Achse gedreht, die um  $\vec{r}_0$  parallel zur ursprünglichen Drehachse verschoben ist mit

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$



Wie ergibt sich das Trägheitsmoment für die Rotation um die neue Achse aus dem bereits berechneten für die Rotation um die alte Achse?

„Steinersche Satz“

$$\tilde{I}_z = I_z + m_{\text{ges}} r_0^2$$

Der zweite Term gibt das Trägheitsmoment eines Massenpunkts der Masse  $m_{\text{ges}}$  an, der im Abstand  $r_0$  von der Drehachse liegt.

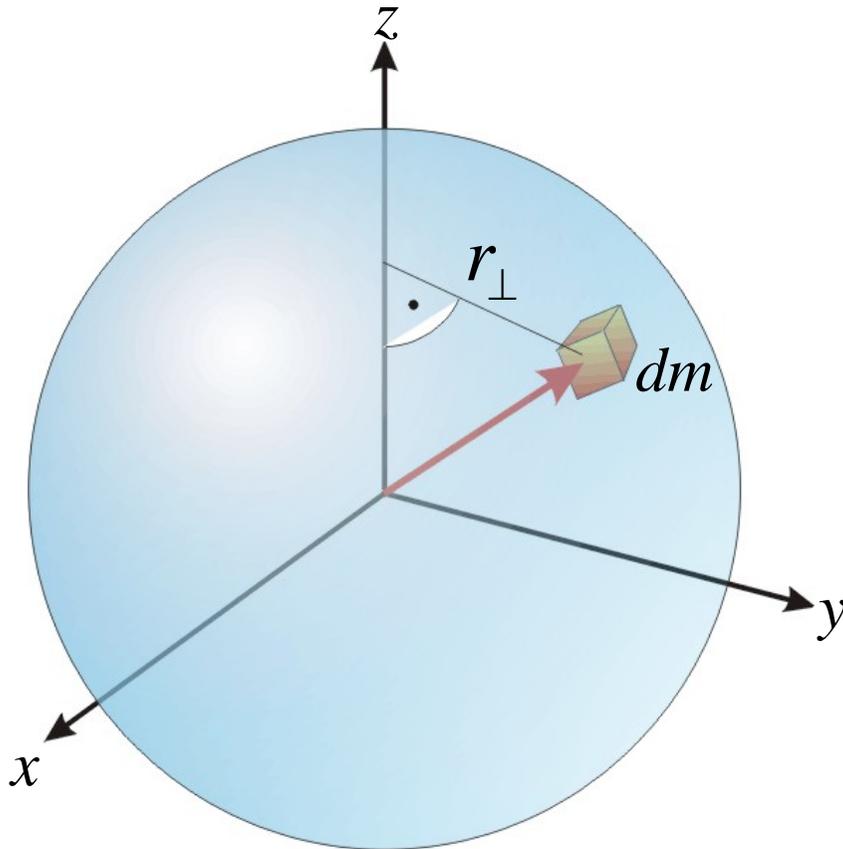
---

Bei kontinuierlichen Massenverteilungen muss bei der Berechnung der Trägheitsmomente wie beim Schwerpunkt auf mehrdimensionale Integrale übergegangen werden:

$$I = \iiint_{\text{Kugel}} r_{\perp}^2 dm = \iiint_{\text{Kugel}} \rho r_{\perp}^2 dV$$



## 2. Beispiel: Trägheitsmoment einer Kugel der Masse $m$



Aus Symmetriegründen ist das Trägheitsmoment  $I$  um jede Achse durch das Zentrum der Kugel gleich groß.

Die genaue Rechnung ergibt:

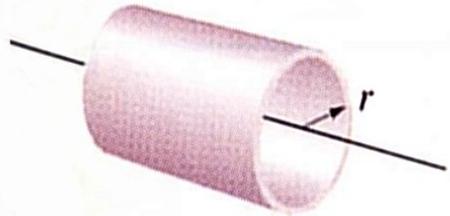
$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Generell hat das Trägheitsmoment eines starren Körpers immer die Form:

$$I_{\text{Körper}} = \xi m R^2$$

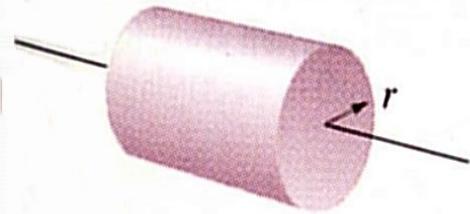
Dabei ist  $\xi$  ein Geometriefaktor, der von der Form des Körpers abhängt.

Zylindermantel;  
Drehachse = Körperachse



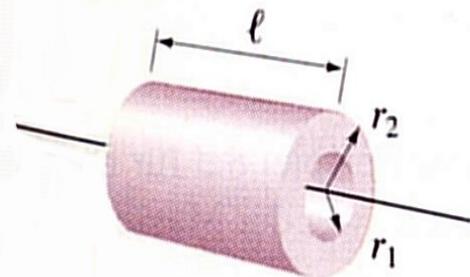
$$I = m_{\text{ges}} r^2$$

Massiver Zylinder;  
Drehachse = Körperachse



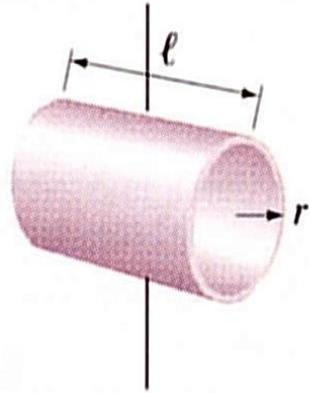
$$I = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} r^2$$

Hohlzylinder;  
Drehachse = Körperachse



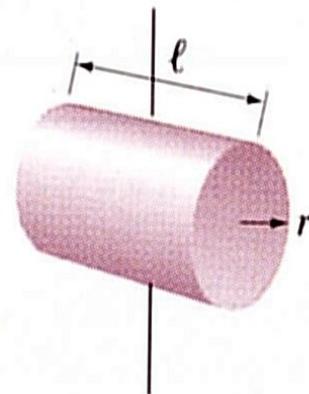
$$I = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} (r_1^2 + r_2^2)$$

Zylindermantel;  
Drehachse durch Mittel-  
punkt  $\perp$  Körperachse



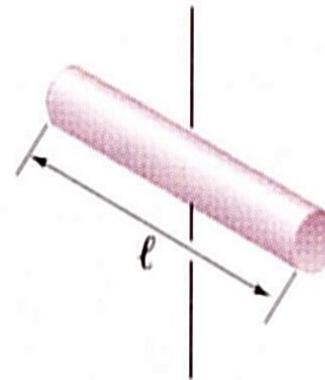
$$I = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} r^2 + \frac{1}{12} m_{\text{ges}} \ell^2$$

Massiver Zylinder;  
Drehachse durch Mittel-  
punkt  $\perp$  Körperachse



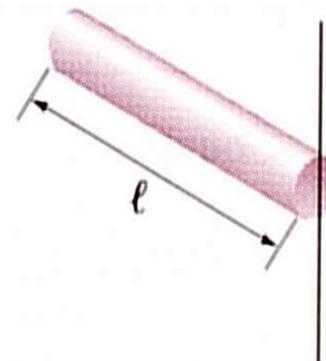
$$I = \frac{1}{4} m_{\text{ges}} r^2 + \frac{1}{12} m_{\text{ges}} \ell^2$$

Dünner Stab;  
Drehachse durch Mittel-  
punkt  $\perp$  Körperachse



$$I = \frac{1}{12} m_{\text{ges}} \ell^2$$

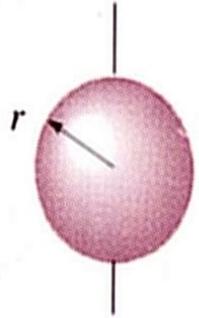
Dünner Stab;  
Drehachse durch ein  
Ende  $\perp$  Körperachse



$$I = \frac{1}{3} m_{\text{ges}} \ell^2$$

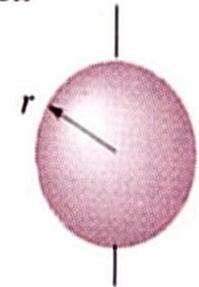
Dünne Kugelschale;  
Drehachse durch  
Mittelpunkt

$$I = \frac{2}{3} m_{\text{ges}} r^2$$

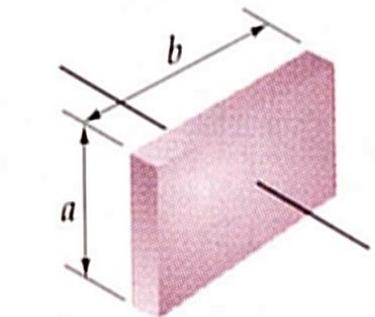


Massive Kugel;  
Drehachse durch  
Mittelpunkt

$$I = \frac{2}{5} m_{\text{ges}} r^2$$



Massiver Quader;  
Drehachse durch  
Mittelpunkt  $\perp$  Oberfläche



$$I = \frac{1}{12} m_{\text{ges}} (a^2 + b^2)$$



## Berechnung von Trägheitsmomenten: Übergang zur kontinuierlichen Masseverteilung

In der Praxis liegen keine diskreten Massenpunkte vor, sondern eine kontinuierliche Masseverteilung. Dann müssen die Massepunkte durch „infinitesimale Massen“ ersetzt werden, über die dann aufsummiert, d.h. integriert wird.

Die Dichte von Materie war definiert als

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$

Also gilt:

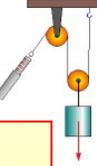
$$\Delta m_i = \rho \Delta V_i = \rho \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Damit gilt für eine beliebige Funktion  $f(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta m_i &= \\ &= \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) \frac{\Delta m_i}{\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \end{aligned}$$

Da  $\frac{\Delta m_i}{\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i} = \rho(\vec{r}_i)$  folgt:

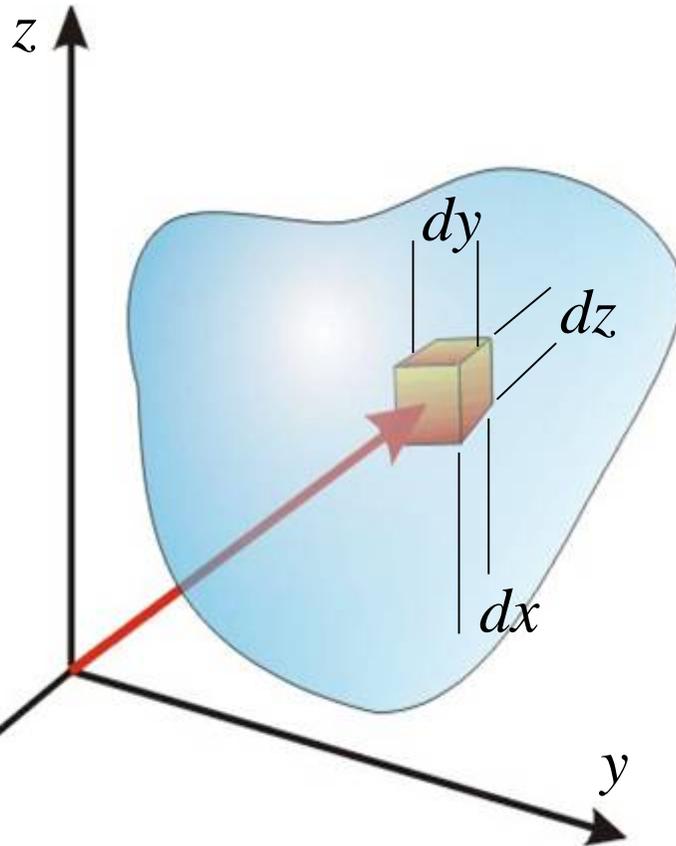
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta m_i &= \\ &= \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) \rho(\vec{r}_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \end{aligned}$$



Für  $N \rightarrow \infty$  geht dieser Ausdruck in die integrale Schreibweise über:

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dz dy dx$$

Anschaulicher kann man sich das auch so klarmachen:



Der Ausdruck

$$f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV$$

wird über alle Volumenelemente des ganzen Körpers integriert (3-fach-Integral wegen der drei Raumkoordinaten):

$$\int_{\text{Volumen}} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dz dy dx$$



Reduktion von Mehrfachintegralen auf „normale“ Integrale:

$$\int_{\text{Volumen}} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dz dy dx$$

In der Regel sind die Integrationsgrenzen bei Mehrfachintegralen das Problem, denn die obigen Integrale lassen sich mit der folgenden Definition auf eindimensionale Integrale zurückführen:

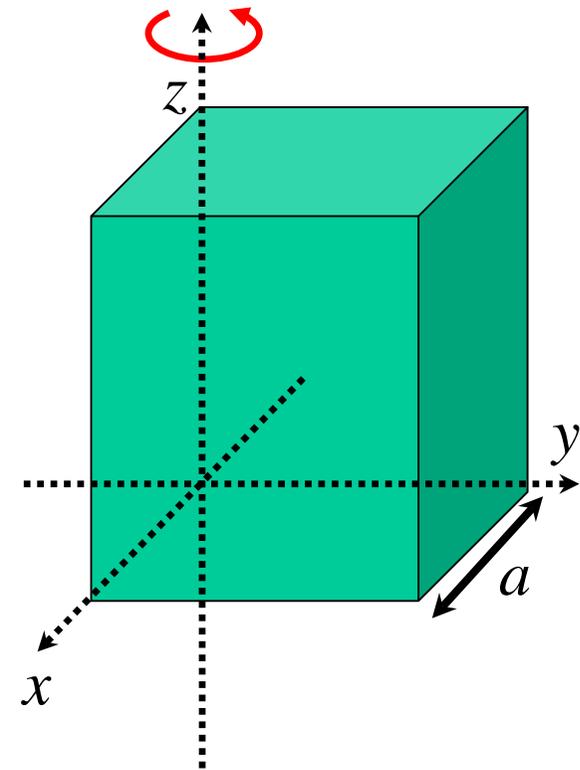
$$\int_{\text{Volumen}} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) \rho(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Die Integrationsgrenzen hängen meistens auch von den Variablen ab, über die noch nicht integriert wurde.

Trägheitsmoment:  $\Rightarrow I = \sum_{i=1}^N m_i r_{i,\perp}^2 \Rightarrow I = \int_{\text{Körper}} r_{\perp}^2 dm = \int_{\text{Volumen}} \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2 dV$



**Beispiel 1:** Trägheitsmoment eines homogenen Würfels der Masse  $m$ , der um eine seiner Kanten rotiert. Der Würfel habe die Kantenlänge  $a$  und die konstante Dichte  $\rho$ .



$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

$$I = \int_{\text{Volumen}} \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2 dV = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \rho(x, y, z) r_{\perp}^2 dz \right) dy \right) dx$$

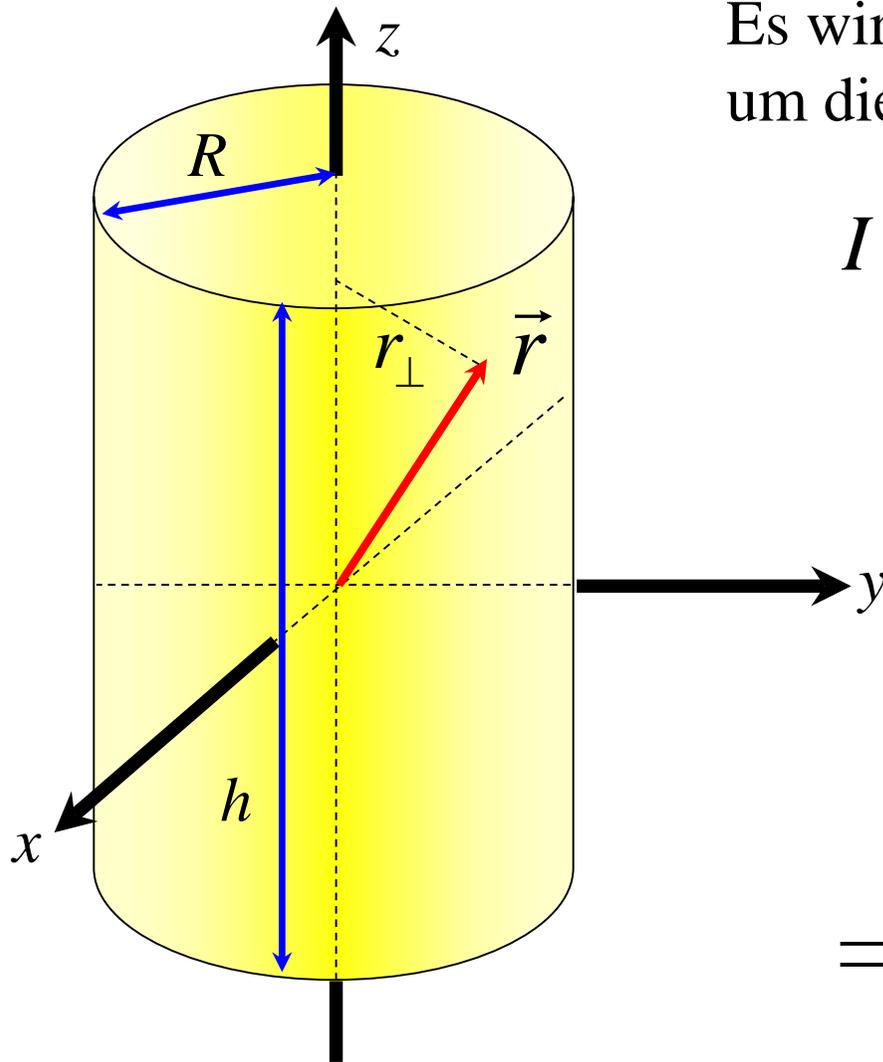
$$= \rho \int_0^a \left( \int_0^a \left( \int_0^a (x^2 + y^2) dz \right) dy \right) dx = \rho \int_0^a \left( \int_0^a a(x^2 + y^2) dy \right) dx$$

$$= \rho a \int_0^a \left( ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \rho a \left( \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) = \frac{2}{3} \rho a^3 a^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3} m a^2$$



**Beispiel 2:** Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders der Masse  $m$ , der um die  $z$ -Achse rotiert. Der Zylinder habe den Radius  $R$  und die Höhe  $h$  sowie die konstante Dichte  $\rho$ .



Es wird das Trägheitsmoment bei der Rotation um die Längsachse ( $z$ -Achse) berechnet:

$$I = \int_{m_{\text{Zylinder}}} r_{\perp}^2 dm = \int_{V_{\text{Zylinder}}} r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV$$

$$\Rightarrow I = \rho \int_{V_{\text{Zylinder}}} r_{\perp}^2 dV$$

$$r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\Rightarrow I = \rho \iiint_{V_{\text{Zylinder}}} (x^2 + y^2) dx dy dz$$



Zylinderkoordinaten sind folgendermaßen definiert:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\perp} \cos \varphi \\ r_{\perp} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

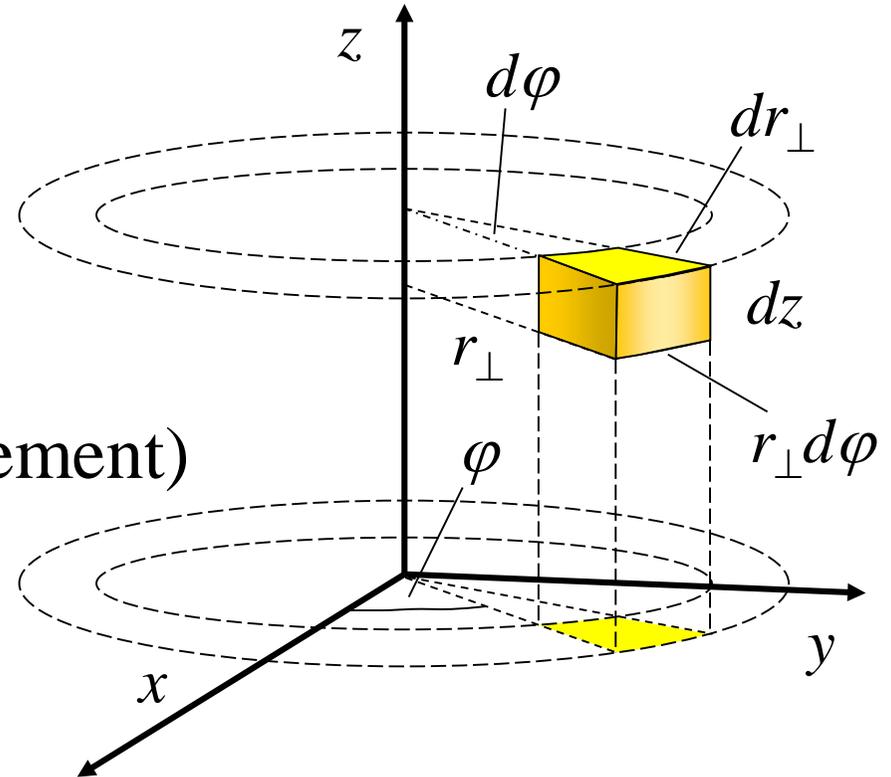
$$x^2 + y^2 = r_{\perp}^2 \cos^2 \varphi + r_{\perp}^2 \sin^2 \varphi = r_{\perp}^2$$

$$dV = r_{\perp} d\varphi dr_{\perp} dz \quad (\text{Volumenelement})$$

$$I = \rho \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r_{\perp}^2 r_{\perp} d\varphi dr_{\perp} dz$$

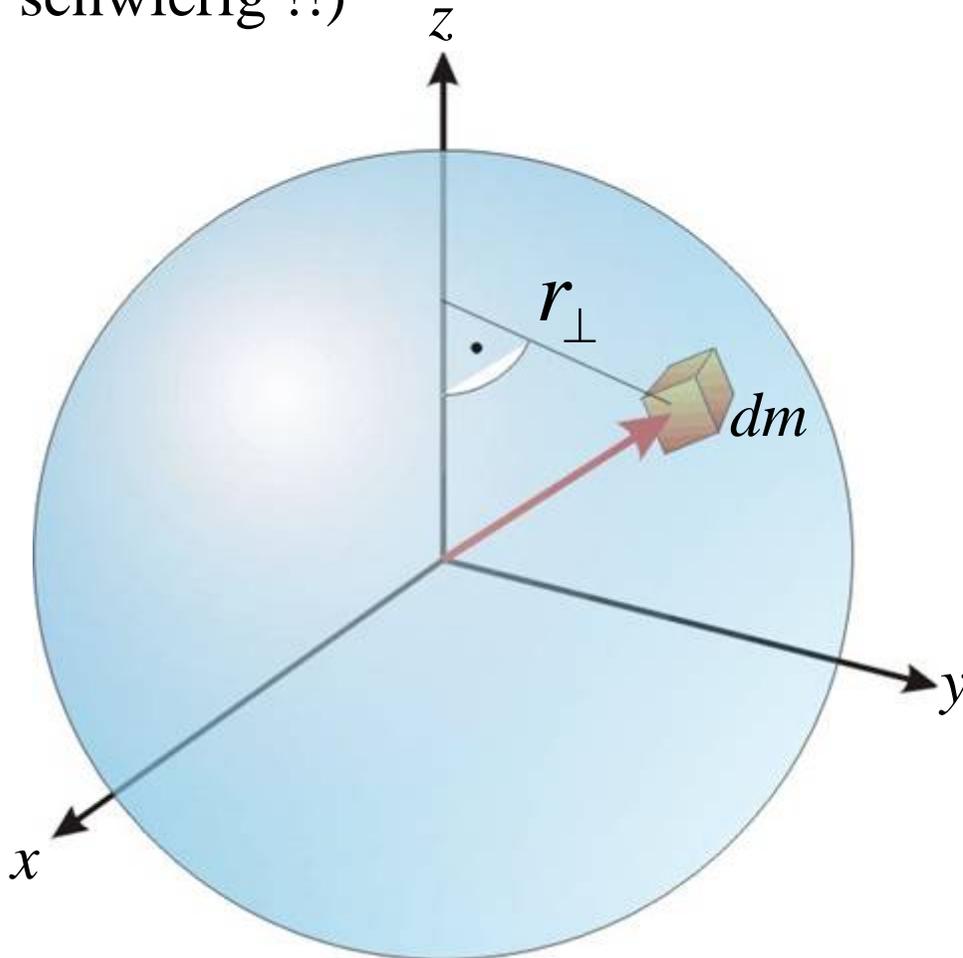
$$= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r_{\perp}^3 dr_{\perp} \int_0^h dz = \rho 2\pi \frac{1}{4} R^4 h = \frac{1}{2} \underbrace{\pi R^2 h}_{V_{\text{Zylinder}}} \rho R^2$$

$$= \frac{1}{2} m R^2$$





**Beispiel 3:** Trägheitsmoment einer Kugel der Masse  $m$  (bereits recht schwierig !!)



Aus Symmetriegründen ist das Trägheitsmoment  $I$  um jede Achse durch das Zentrum der Kugel gleich groß.

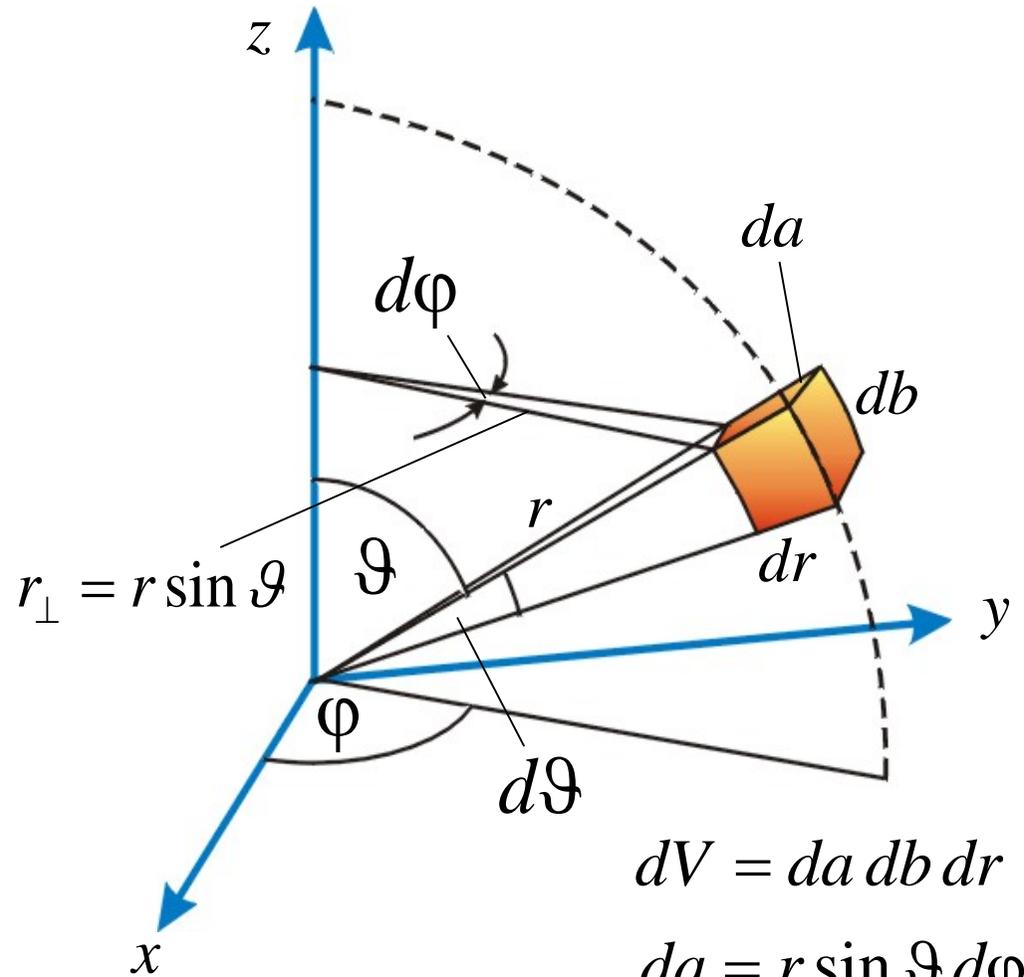
Definitionsgemäß ist also:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\text{Kugel}} r_{\perp}^2 dm = \iiint_{\text{Kugel}} \rho r_{\perp}^2 dV \\
 &= \rho \iiint_{\text{Kugel}} r_{\perp}^2 dV
 \end{aligned}$$

Dabei wurde ein homogenes Material mit  $\rho = \text{const.}$  angenommen.



Die Lösung wird in Kugelkoordinaten  $( r, \vartheta, \varphi )$  ausgerechnet:



$$dV = da db dr$$

$$da = r \sin \vartheta d\varphi$$

$$db = r d\vartheta$$

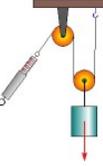
Das Trägheitsmoment ist dann:

$$I = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overbrace{r^2 \sin^2 \vartheta}^{= r_\perp^2} \cdot \underbrace{r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr}_{dV = da db dr}$$

Also folgt:

$$I = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \vartheta d\varphi d\vartheta dr =$$

$$= \rho \underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{=\frac{R^5}{5}} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta}_{=\frac{4}{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}$$



Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &= \rho \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi \\ &= \frac{2}{5} \underbrace{\left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)}_{= V_{\text{Kugel}}} \rho R^2 \end{aligned}$$

Da  $V_{\text{Kugel}} \rho = m$

folgt für das Trägheitsmoment einer Kugel, deren Drehachse durch den Mittelpunkt geht:

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Generell hat das Trägheitsmoment eines starren Körpers immer die Form:

$$I_{\text{Körper}} = \xi m R^2$$

Dabei ist  $\xi$  ein Geometriefaktor, der von der Form des Körpers abhängt.

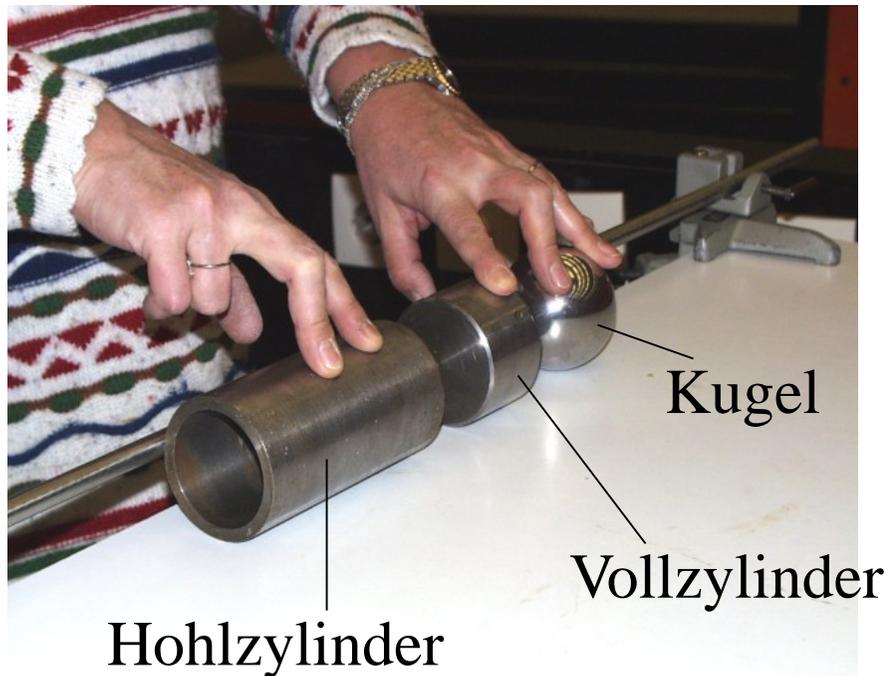
Es gilt: Je weiter sich die Massen von der Drehachse entfernt befinden, desto größer ist das Trägheitsmoment.

Die Trägheitsmomente einiger ausgewählter Körper zeigt die folgende Graphik:

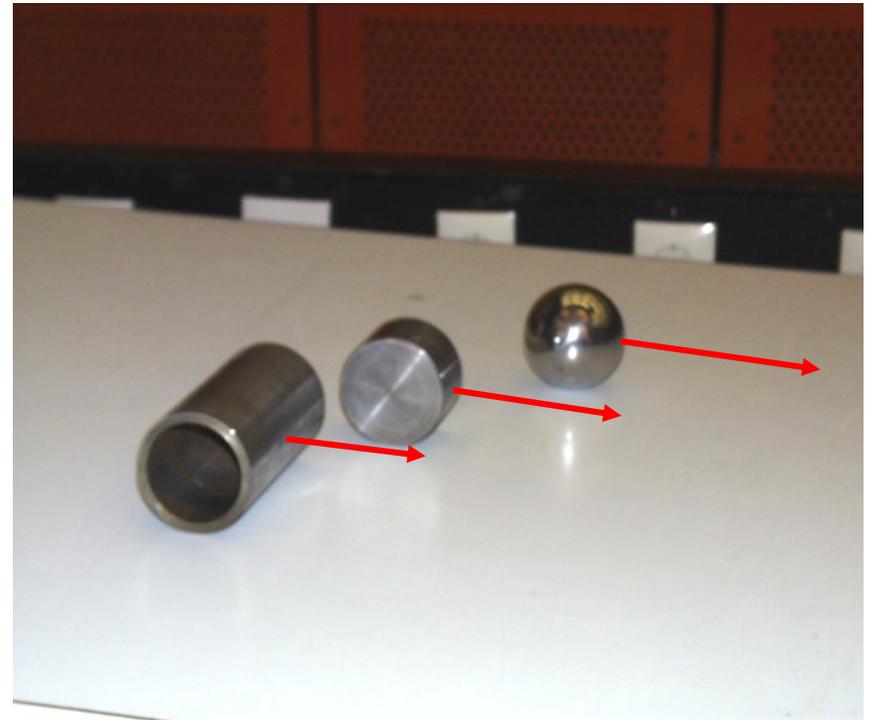


## Versuch: Verschiedene Körper rollen eine schiefe Ebene hinab.

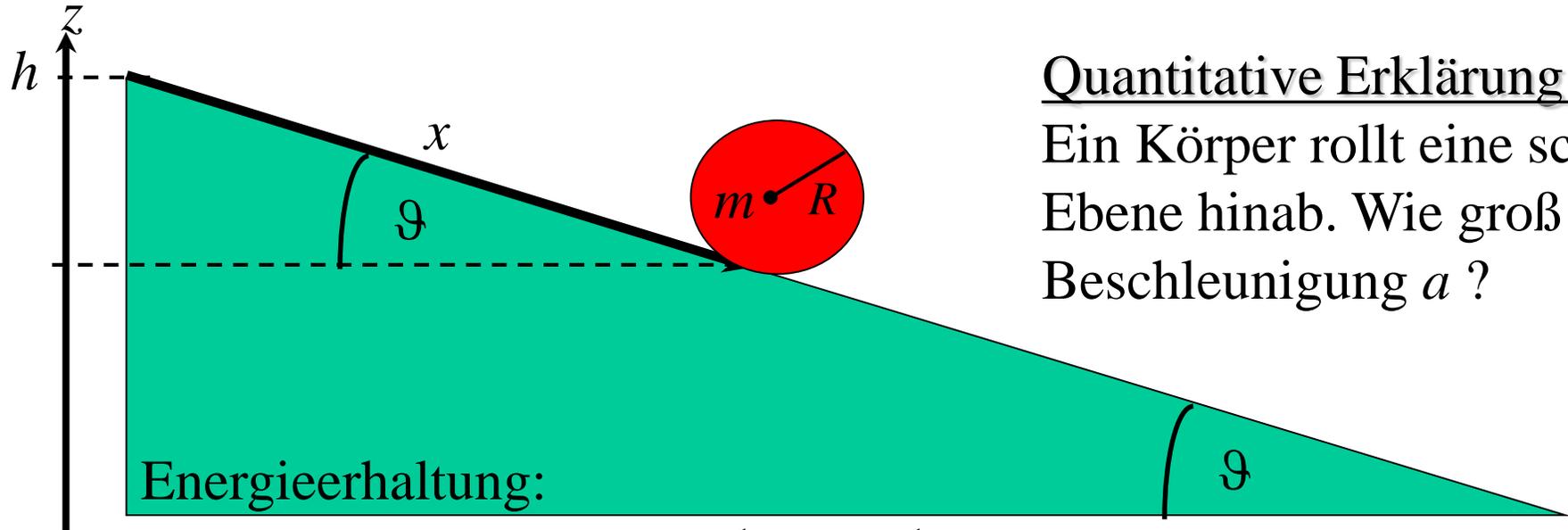
Vor dem Start



Nach dem Start



Nach dem Start rollt die Kugel am schnellsten. Sie hat das kleinste Trägheitsmoment  $I = 0.4m R^2$  und damit die geringste Rotationsenergie. Der Hohlzylinder hat das größte Trägheitsmoment  $I \approx m R^2$ , da seine Masse am weitesten von der Rotationsachse entfernt ist. Der Vollzylinder liegt mit  $I = 0.5m R^2$  dazwischen.



$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{pot}} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh - mgx \sin \vartheta$$

Wegen  $\omega = \frac{v}{R}$  und  $\frac{d}{dt}(v^2) = 2v \frac{dv}{dt} = 2va$  folgt:

$$0 = \frac{dE}{dt} = mva + \frac{I}{R^2}va - mgv \sin \vartheta \Rightarrow a = g \sin \vartheta \frac{mR^2}{mR^2 + I}$$

(i) Kugel:  $I = \frac{2}{5}mR^2 \Rightarrow a = \frac{5}{7}g \sin \vartheta$  (ii) Zylinder:  $I = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}g \sin \vartheta$

(iii) Dünner Hohlzylinder:  $I = mR^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}g \sin \vartheta$



Rotationsbewegungen können aufgrund der Drehimpulserhaltung oft zur Stabilisierung von Bewegungsabläufen eingesetzt werden

Es wird ein Kreis mit dem Radius  $R$  mit der Geschwindigkeit  $v$  durchfahren.

Drehmomente:

$$M_1 = F_Z a \cos \alpha = m \frac{v^2}{R} a \cos \alpha$$

$$M_2 = F_G a \sin \alpha = m g a \sin \alpha$$

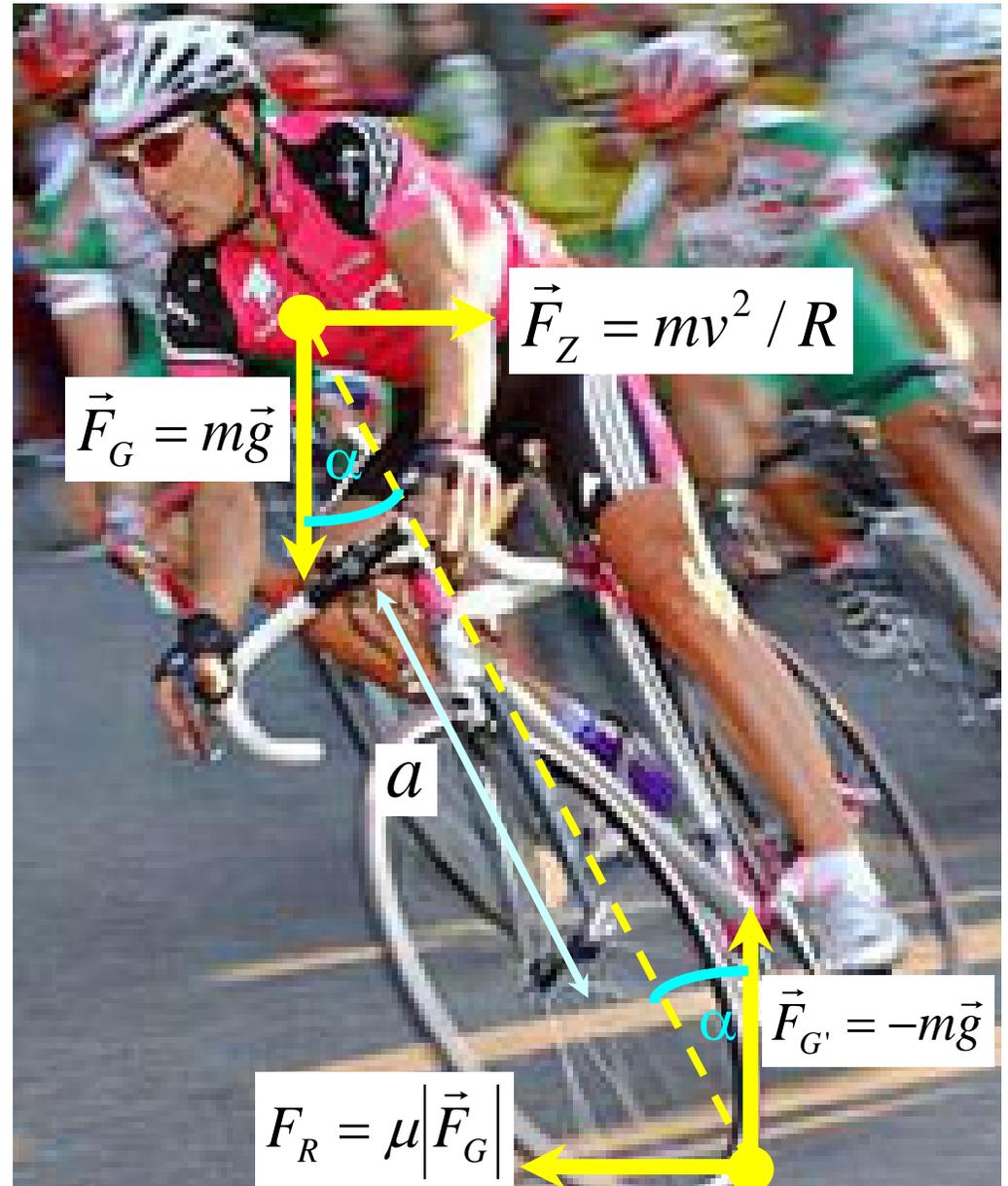
Gleichgewicht:  $M_1 = M_2$

$$\Rightarrow v^2 = g R \tan \alpha$$

Reibung & Gleichgewicht:

$$F_Z \leq F_R = \mu F_G = \mu F_Z / \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \arctan \mu$$





Sandboden:  $\mu \approx 0.3 \Rightarrow \alpha \leq 17^\circ$

$v = 30 \text{ km/h} \Rightarrow R \geq 24 \text{ m}$

Asphalt:  $\mu \approx 0.9 \Rightarrow \alpha \leq 42^\circ$

$v = 30 \text{ km/h} \Rightarrow R \geq 8 \text{ m}$

Eine genauere Theorie des Fahrradfahrens ist sehr komplex !!

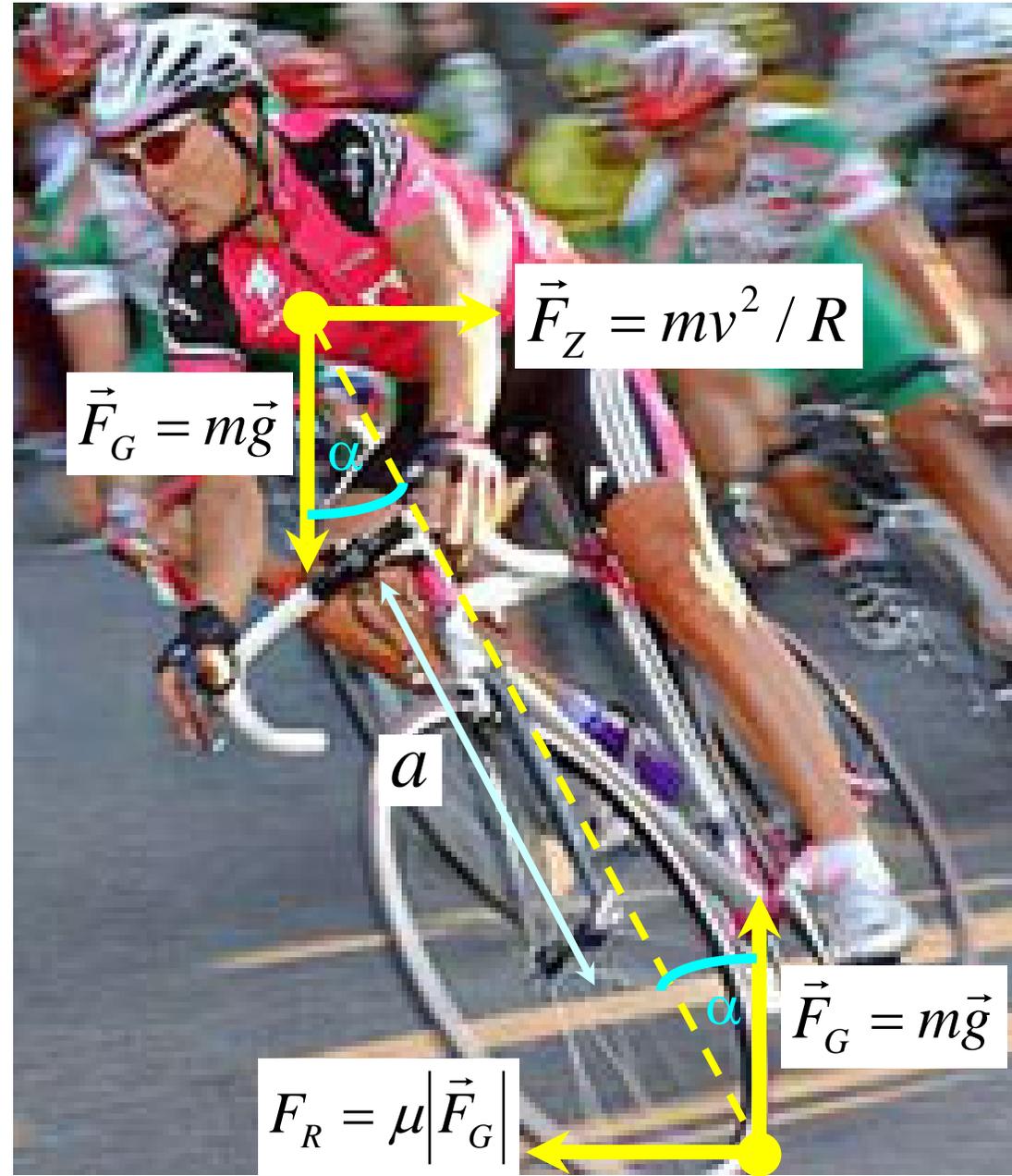
Man kann zeigen, dass folgende Ungleichung erfüllt sein muß, damit „Kreiselkräfte“ dafür sorgen, dass ein Radfahrer nicht umfällt:

$$\Rightarrow v^2 > \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{g R_{\text{Rad}}}{4}$$

$M$  – Masse des Fahrrades & Fahrers

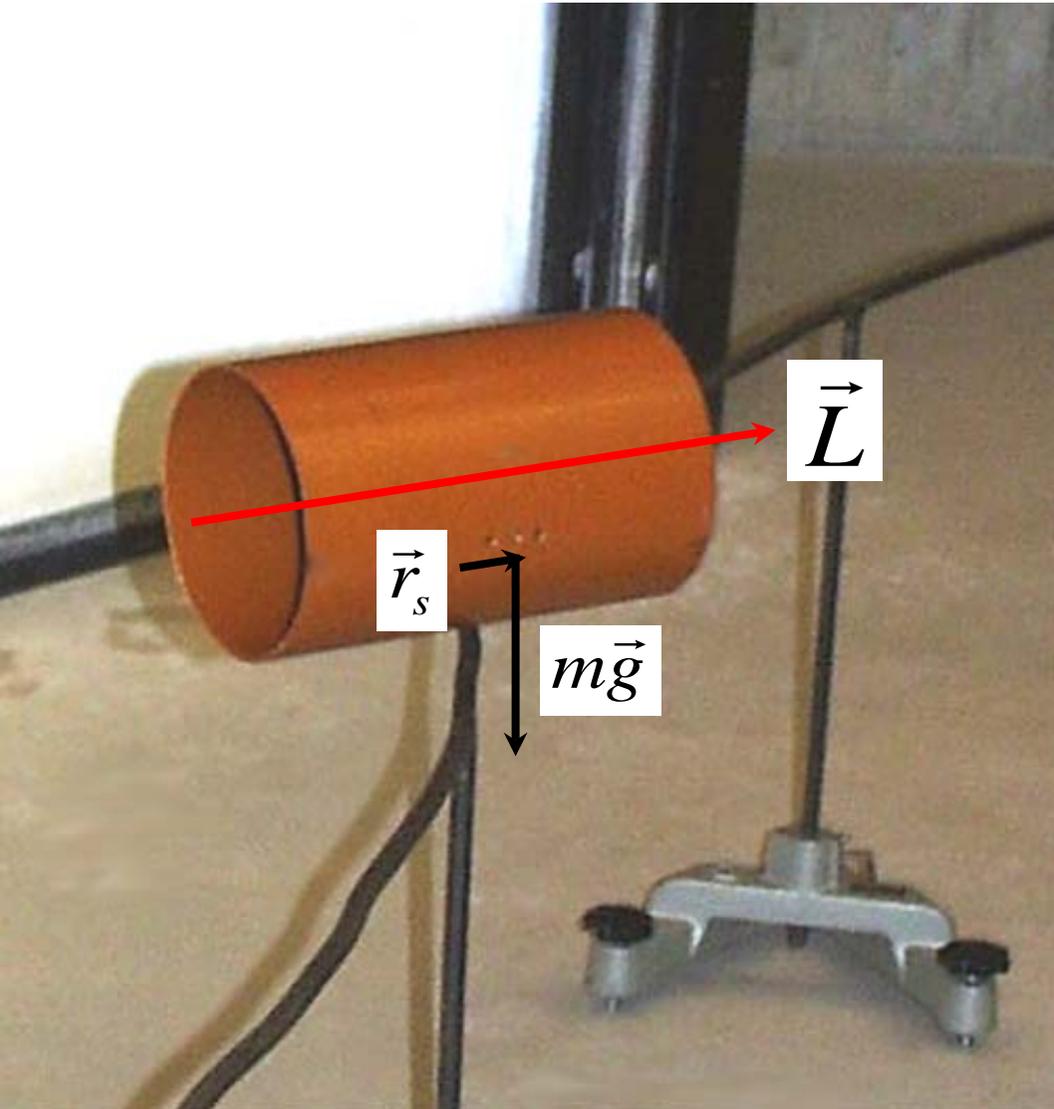
$m$  – Masse der Reifen

$R_{\text{Rad}}$  – Radius eines Reifens





## Versuch: Stabilisierungskreisel



Qualitativ kann man das die Stabilisierung so erklären:

(i) Wenn der Kreisel rechts oder links von der Bahn läuft, dann liegt der Schwerpunkt nicht mehr über einem Unterstützungspunkt.

(ii) Es wirkt ein Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r}_s \times m\vec{g}$$

(iii) Dadurch findet eine Präzession des Kreisels um die Achse senkrecht zu  $\vec{L}$  statt.

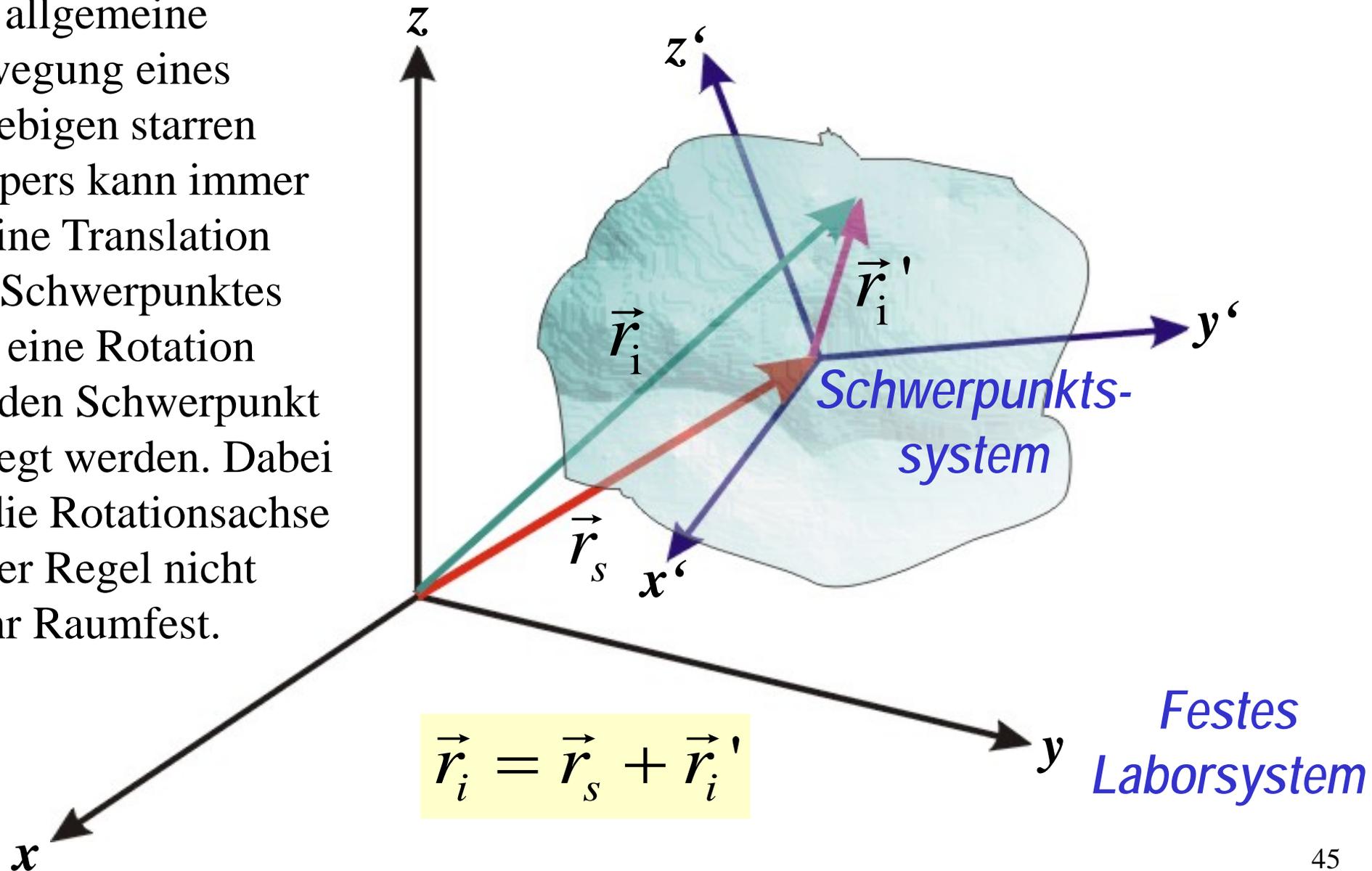
(iv) Der Kreisel dreht sich wieder auf die Bahn zurück.

(v) Dies gilt nur falls der Kreisel entgegengesetzt zu seiner Bewegungsrichtung auf der Bahn rotiert; andernfalls fällt er herunter.



## Überlagerung von Translations- und Rotationsbewegungen

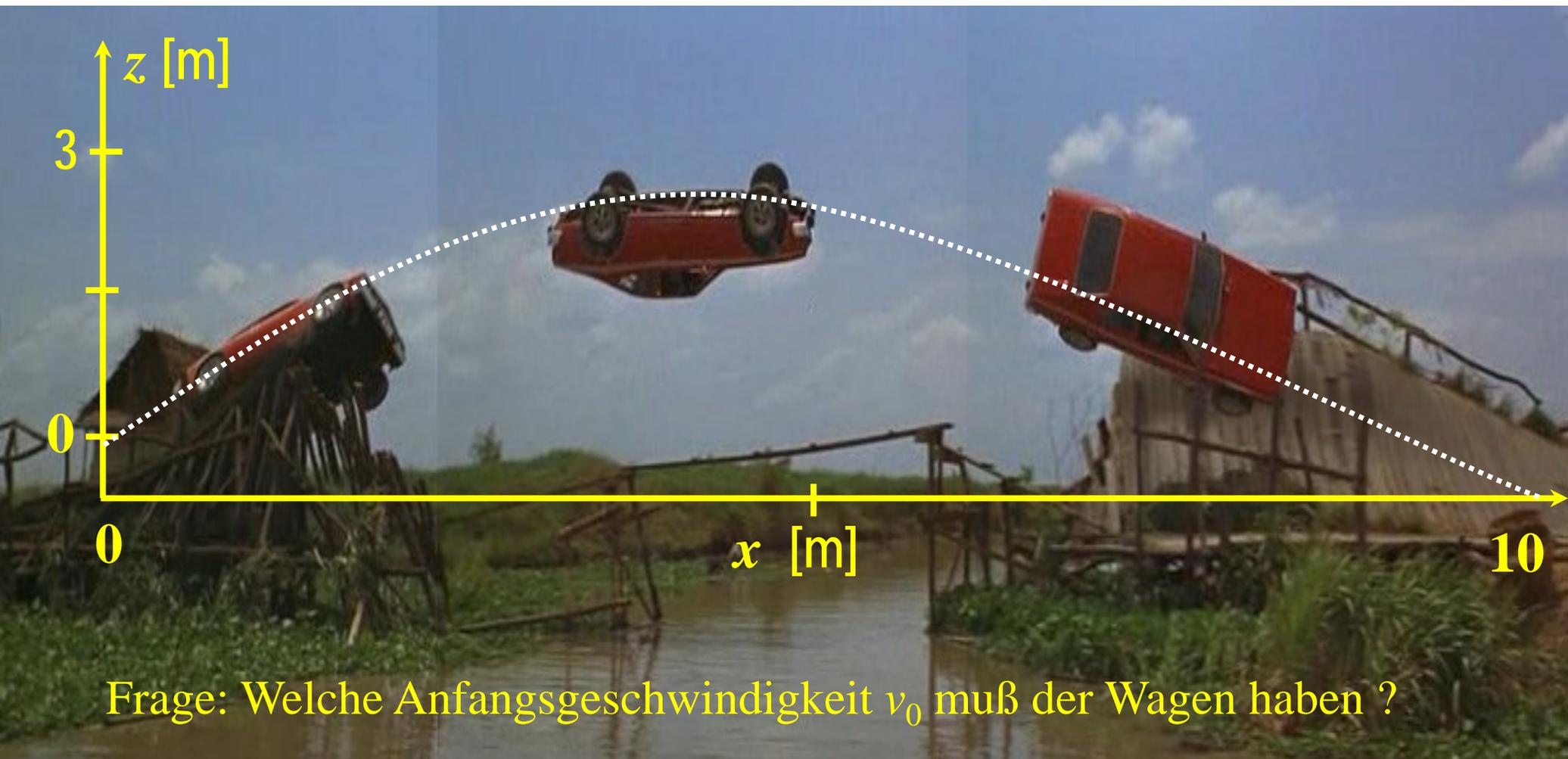
Die allgemeine Bewegung eines beliebigen starren Körpers kann immer in eine Translation des Schwerpunktes und eine Rotation um den Schwerpunkt zerlegt werden. Dabei ist die Rotationsachse in der Regel nicht mehr Raumfest.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_s + \vec{r}_i'$$

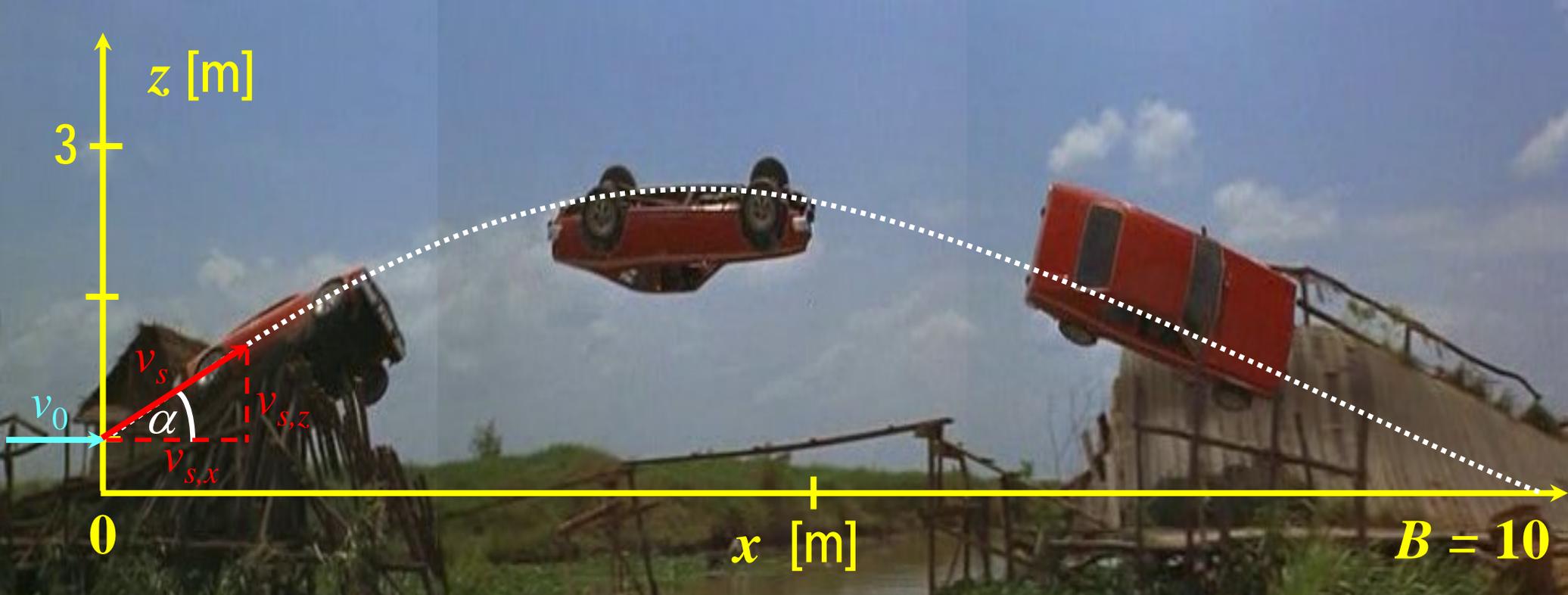


## Beispiel 2: Überlagerung einer Translations- und Rotationsbewegung



Frage: Welche Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  muß der Wagen haben ?

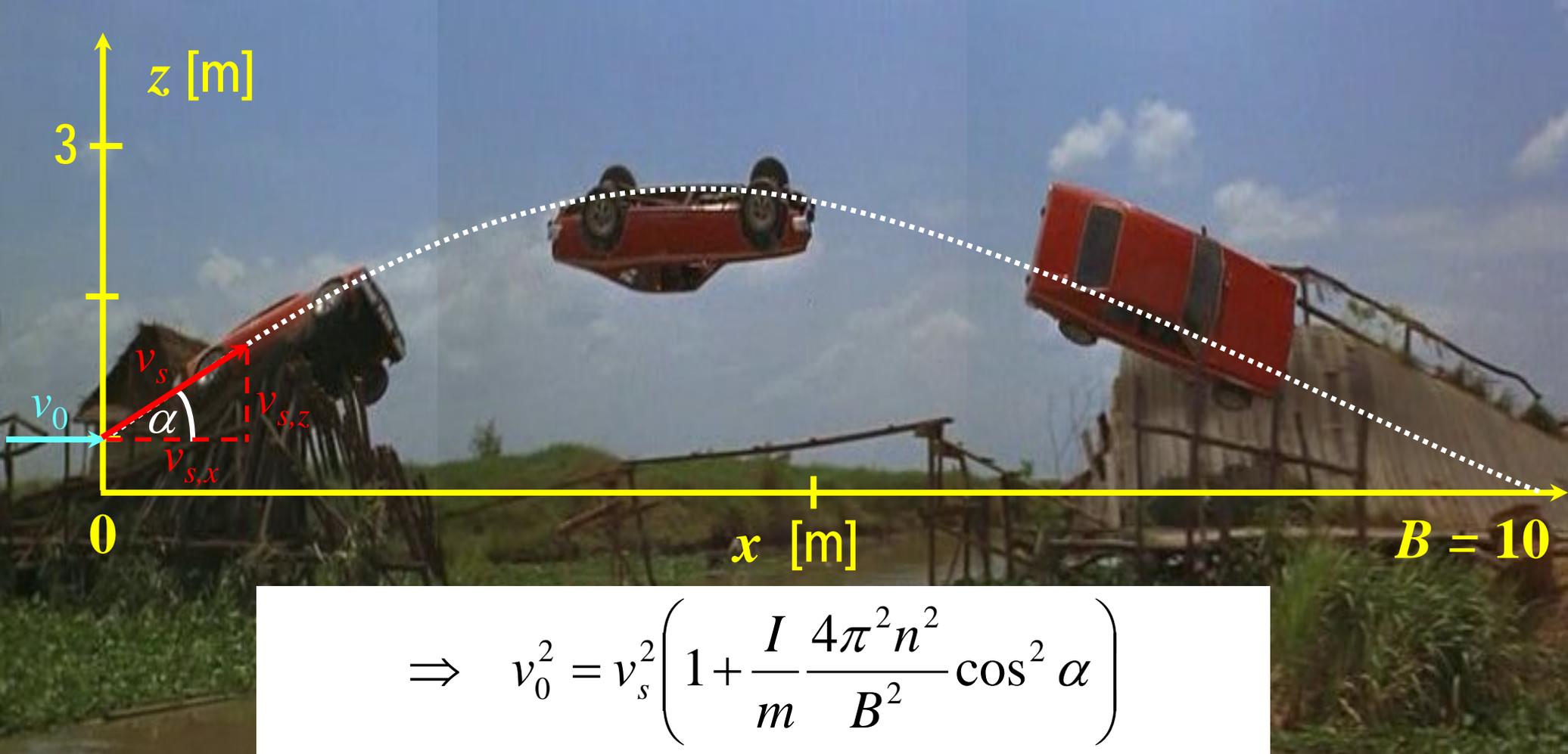
$$\text{Energieerhaltung: } E = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mgz$$



$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = v_s^2 + \frac{I}{m}\omega^2$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist durch die Forderung definiert, dass der Wagen auf der Länge  $B$  einmal um seine Längsachse rotieren soll. Allgemeiner gilt also für  $n$  Rotationen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}n, \quad B = v_{s,x}T = (v_s \cos \alpha)T \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi n}{B}v_s \cos \alpha$$

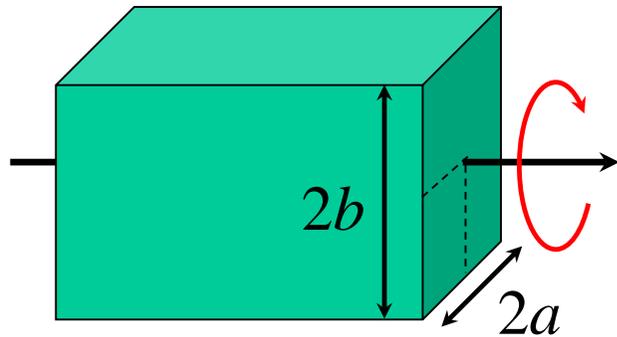
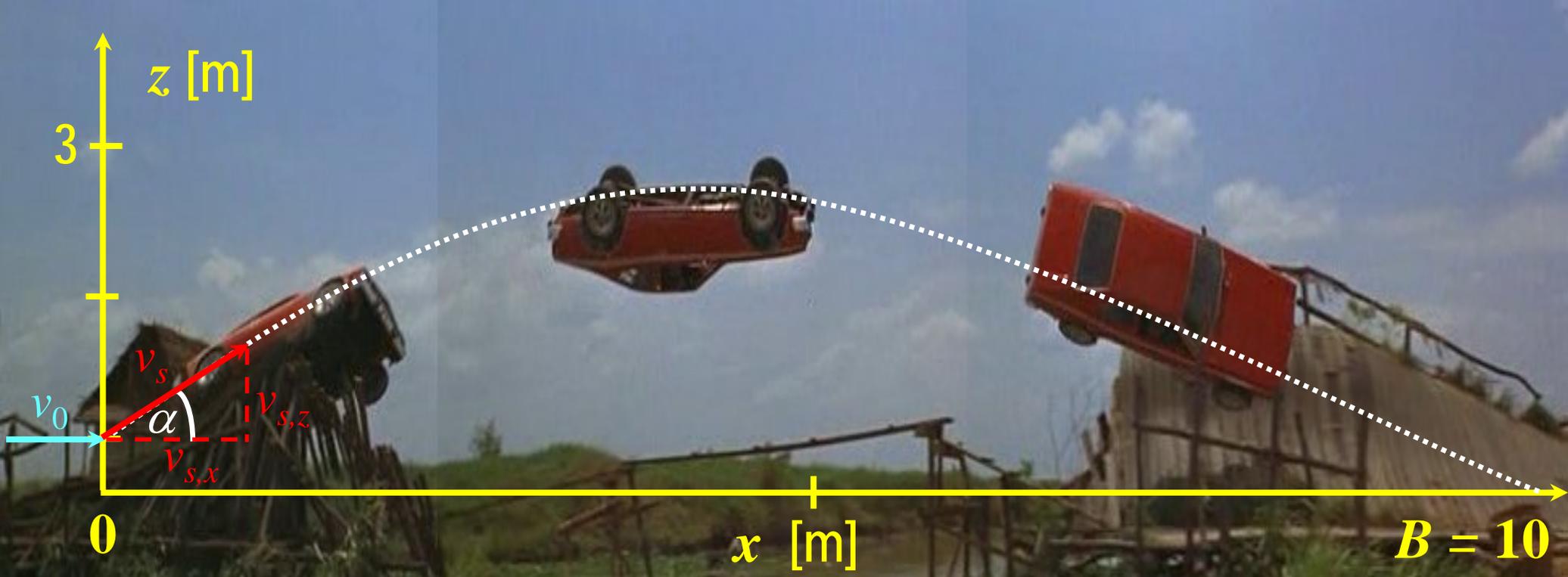


$$\Rightarrow v_0^2 = v_s^2 \left( 1 + \frac{I}{m} \frac{4\pi^2 n^2}{B^2} \cos^2 \alpha \right)$$

Der Schwerpunkt des Autos bewegt sich auf einer Wurfparabel:

$$z(x) = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_s^2 \cos^2 \alpha} x^2, \quad z(0) = z(B) = 0 \Rightarrow v_s^2 = \frac{gB}{\sin(2\alpha)}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{gB}{\sin(2\alpha)} \left( 1 + \frac{I}{m} \frac{4\pi^2 n^2}{B^2} \cos^2 \alpha \right)$$



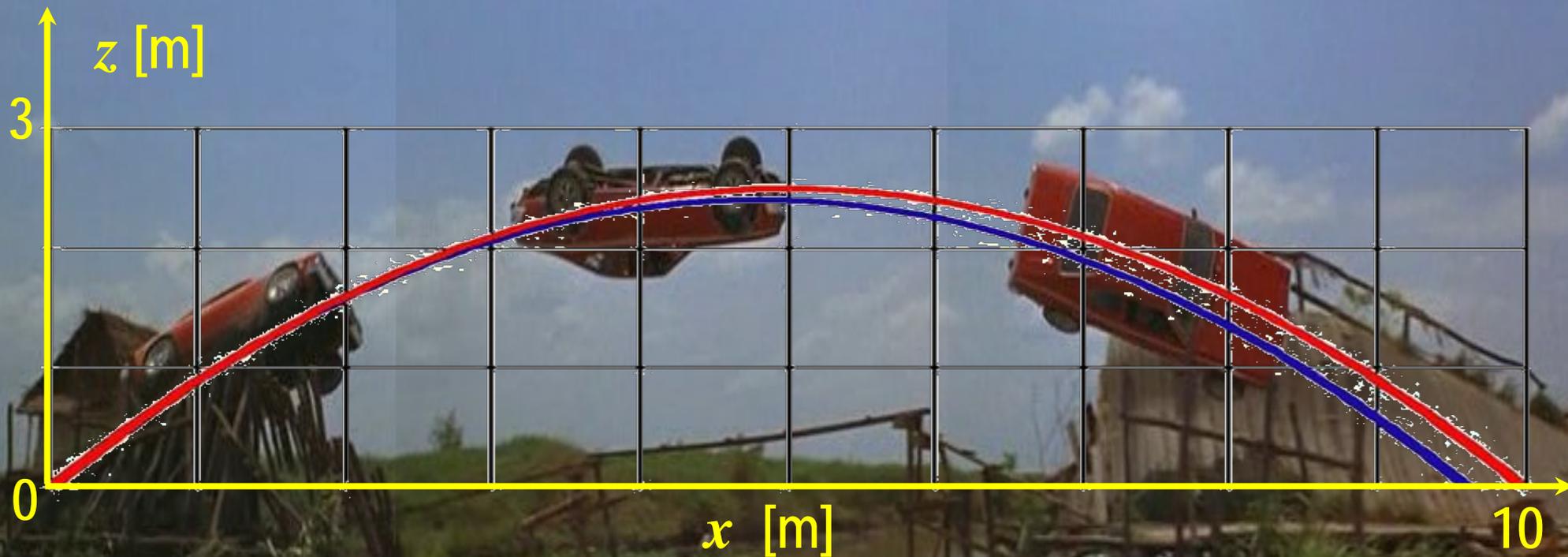
Das Auto wird näherungsweise als Quader betrachtet:

$$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \approx \frac{1}{6} m a^2 \quad \text{für } a^2 \approx b^2$$

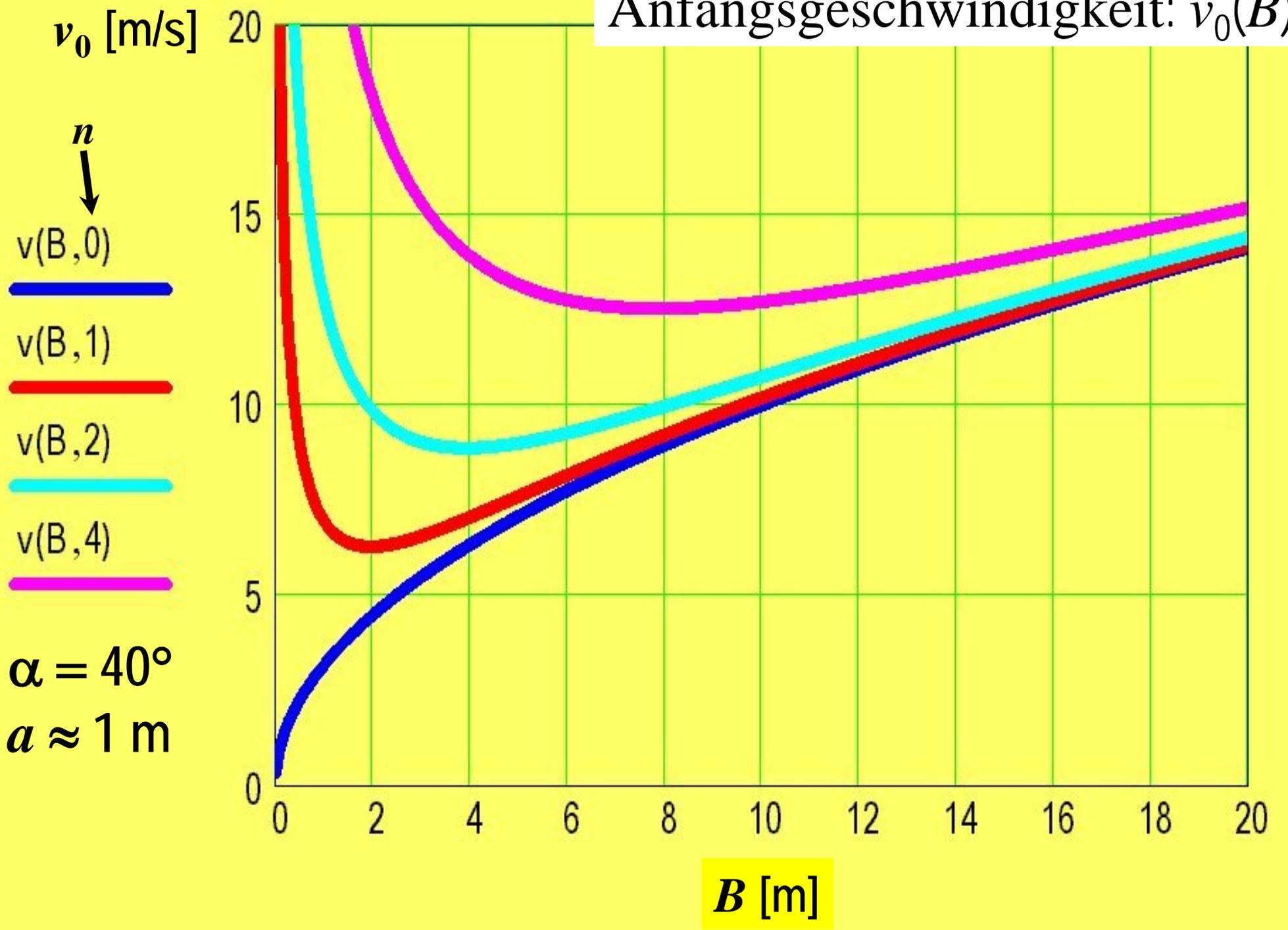
$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{gB}{\sin(2\alpha)} \left( 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{na}{B} \right)^2 \cos^2 \alpha \right)$$



Wegen  $\frac{na}{B} \ll 1$  spielt die Rotation für die Wahl der Anfangsgeschwindigkeit bei dem James Bond - Filmausschnitt keine große Rolle.



Anfangsgeschwindigkeit:  $v_0(B)$



Anfangsgeschwindigkeit:  $v_0(\alpha)$

