Inhalt der Vorlesung A1

2. Teilchen

A. Einzelne Teilchen

Beschreibung von Teilchenbewegung

- Kinematik: Quantitative Erfassung
- Dynamik: Ursachen der Bewegung

Kräfte

Arbeit + Leistung, Energie

Erhaltungssätze: Energie+Impulserhaltung

Reibungskräfte

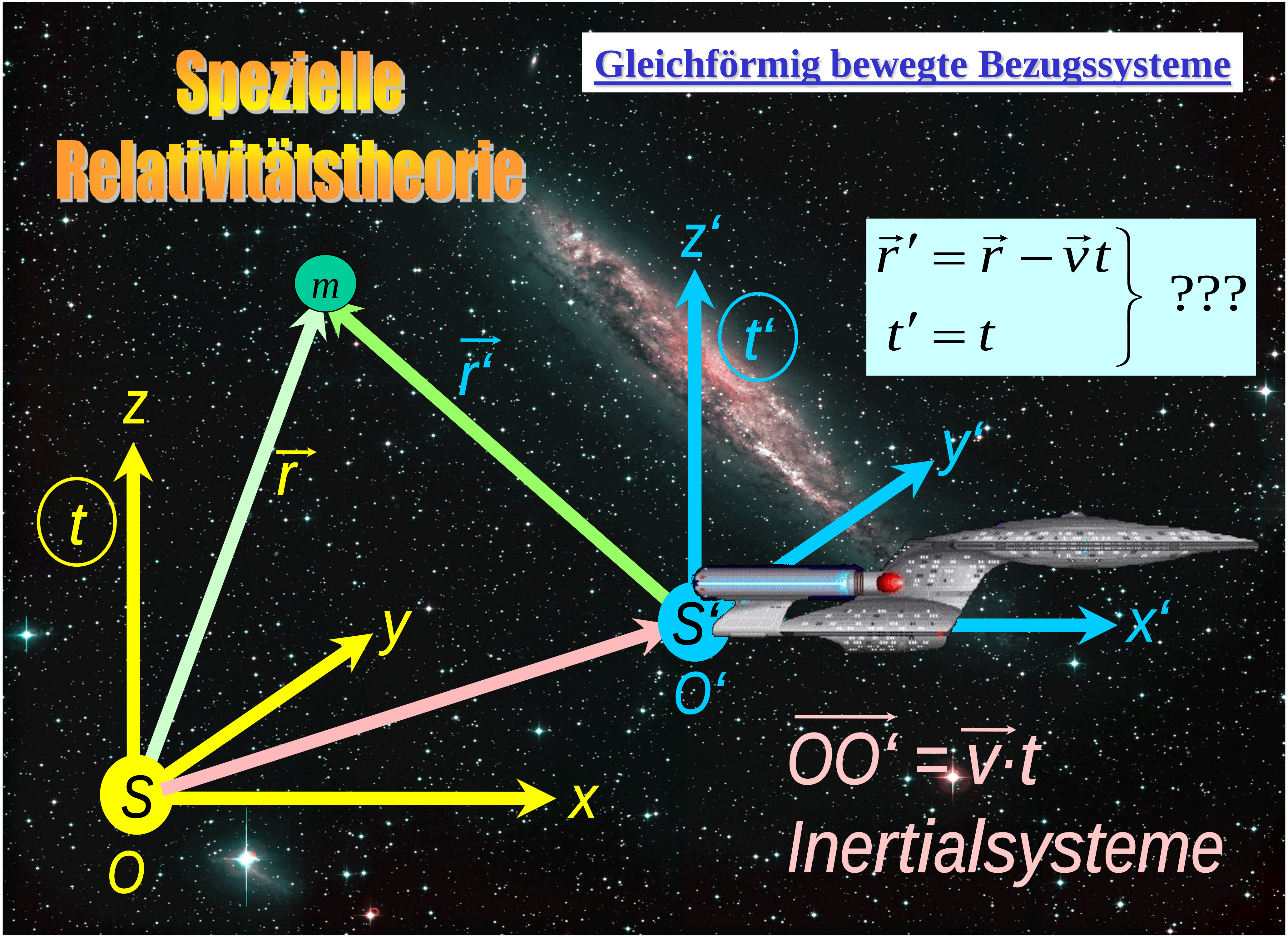
Schwingungen

Rotationsbewegung: Drehimpuls+Drehmoment

Planetenbewegung

Bezugssysteme

Spezielle Relativitätstheorie


Spezielle Relativitätstheorie
Gleichförmig bewegte Bezugssysteme
$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$
$t' = t$
???
z
t
$\vec{r}$
m
$\vec{r}$‘
z‘
t‘
y‘
x‘
y
x
S
O
S‘
O‘
$\overrightarrow{OO'} = \vec{v} \cdot t$
Inertialsysteme

Eindimensionale Betrachtung:

Es bewege sich ein Raumschiff mit der *konstanten* Geschwindigkeit *v* in Richtung der *x*-Achse des Inertialsystems **S**. Dann ist auch das Raumschiff ein Inertialsystem **S'**. Der Abstand *x'* im System **S'** des Raumschiffes ist dann offensichtlich im ruhenden System **S** gegeben durch:

$$x = x' + v\,t'$$

Die anderen beiden räumlichen Koordinaten bleiben unverändert, also

$$y = y', \qquad z = z'$$

Außerdem ist die Zeit in beiden Systemen gleich, d.h.

$$t = t'$$

Diese Transformation vom System **S'** in das System **S** wird als „Galilei-Transformation" bezeichnet.

Die inverse Transformation vom System **S** in das System **S'** folgt daraus sofort zu:

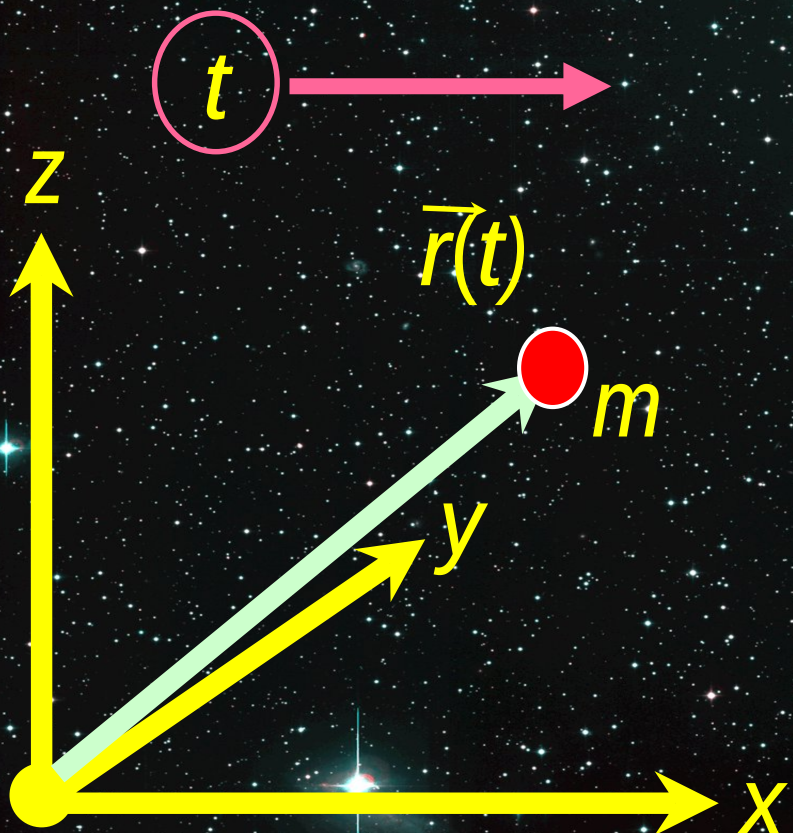
$$x' = x - v\,t \qquad y' = y$$

$$z' = z \qquad t' = t$$

Unter welchen Bedingungen gelten die Galilei-Transformationen ?

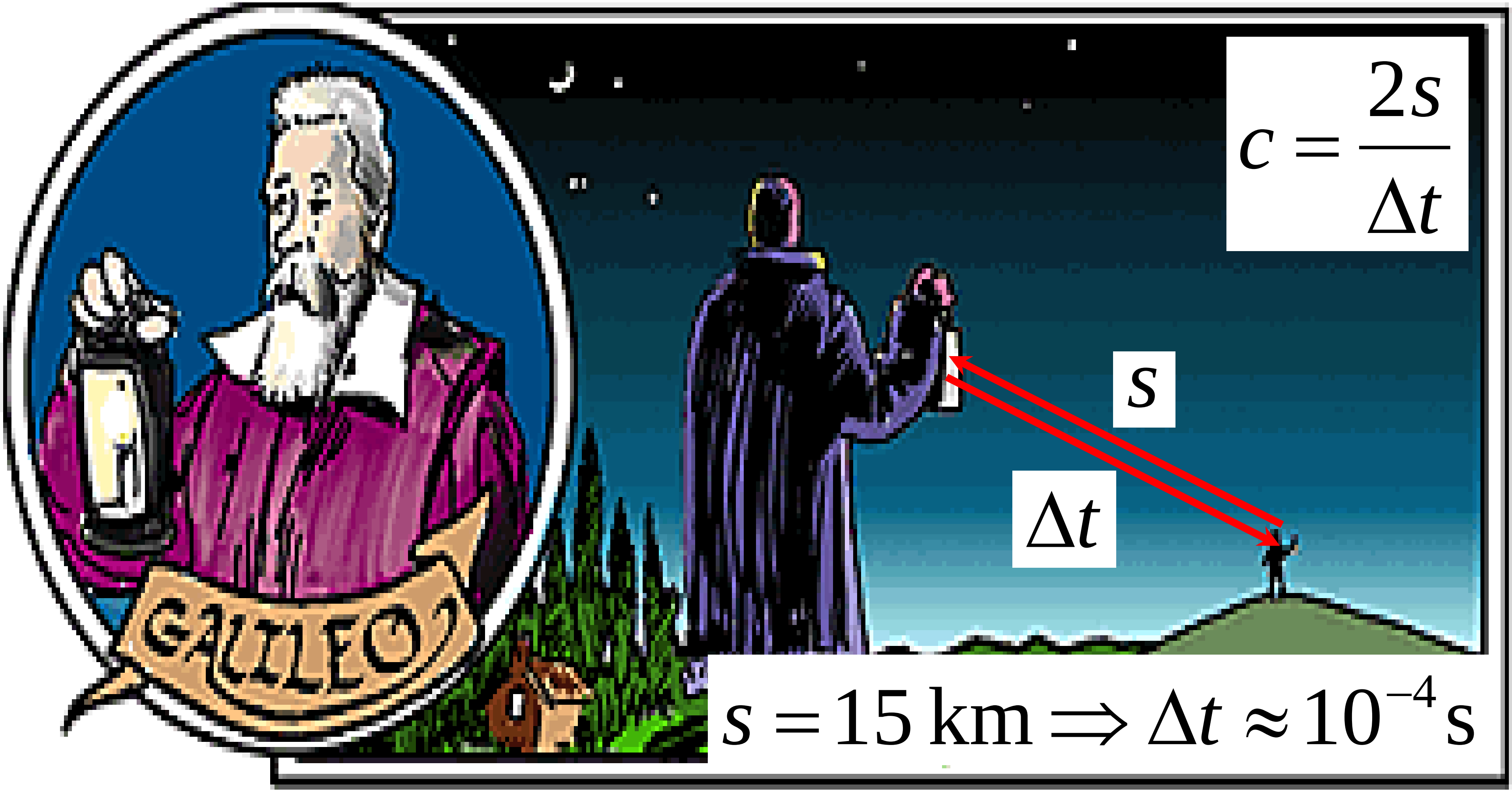
Wiederholung:

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Galilei'schen Transformationen sind durch „Alltagserfahrungen" gegeben.



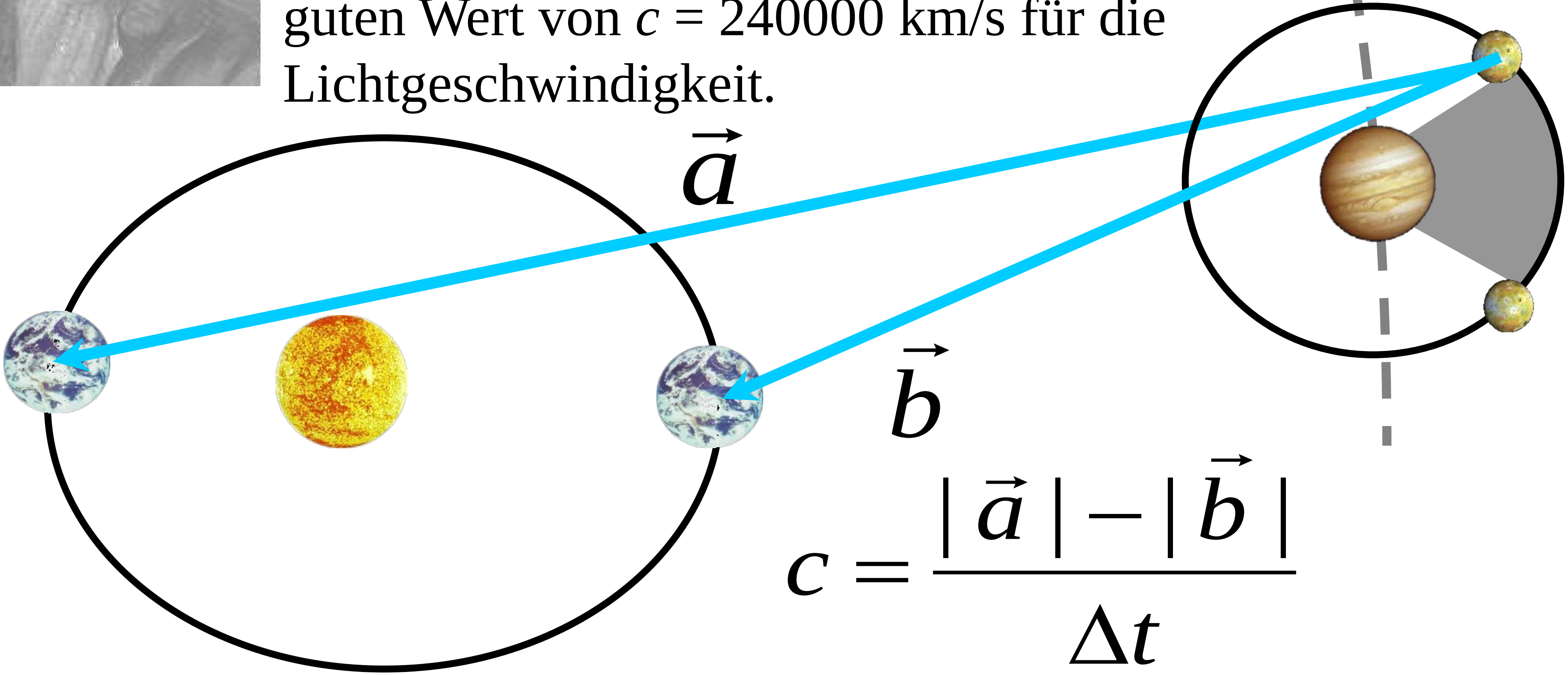
- Die Zeit ist **absolut** und unveränderlich und hängt nicht von der Bewegung und dem Ort ab.
- Es gibt einen sog. **„absoluten Raum"**, d.h. ein absolut ruhendes System, in dem alle Bewegungsabläufe stattfinden.
- Die Eigenschaft **„Masse"** eines Körpers geht nie verloren oder entsteht aus dem Nichts. **„Masse"** ist unabhängig vom Bewegungszustand und bleibt erhalten.
- Es werden die Bewegungen von **„Punktmassen"** betrachtet, d.h. die Körper haben im Prinzip keine Ausdehnung. Die Bewegung ausgedehnter Körper wird durch Integration über Punktmassen bestimmt.

Es gibt Probleme mit den Galilei-Transformationen, wenn man die Lichtgeschwindigkeit genauer untersucht. Zunächst bleibt festzustellen, dass die Lichtgeschwindigkeit *endlich* ist. Dies hat schon Galilei versucht nachzuweisen.



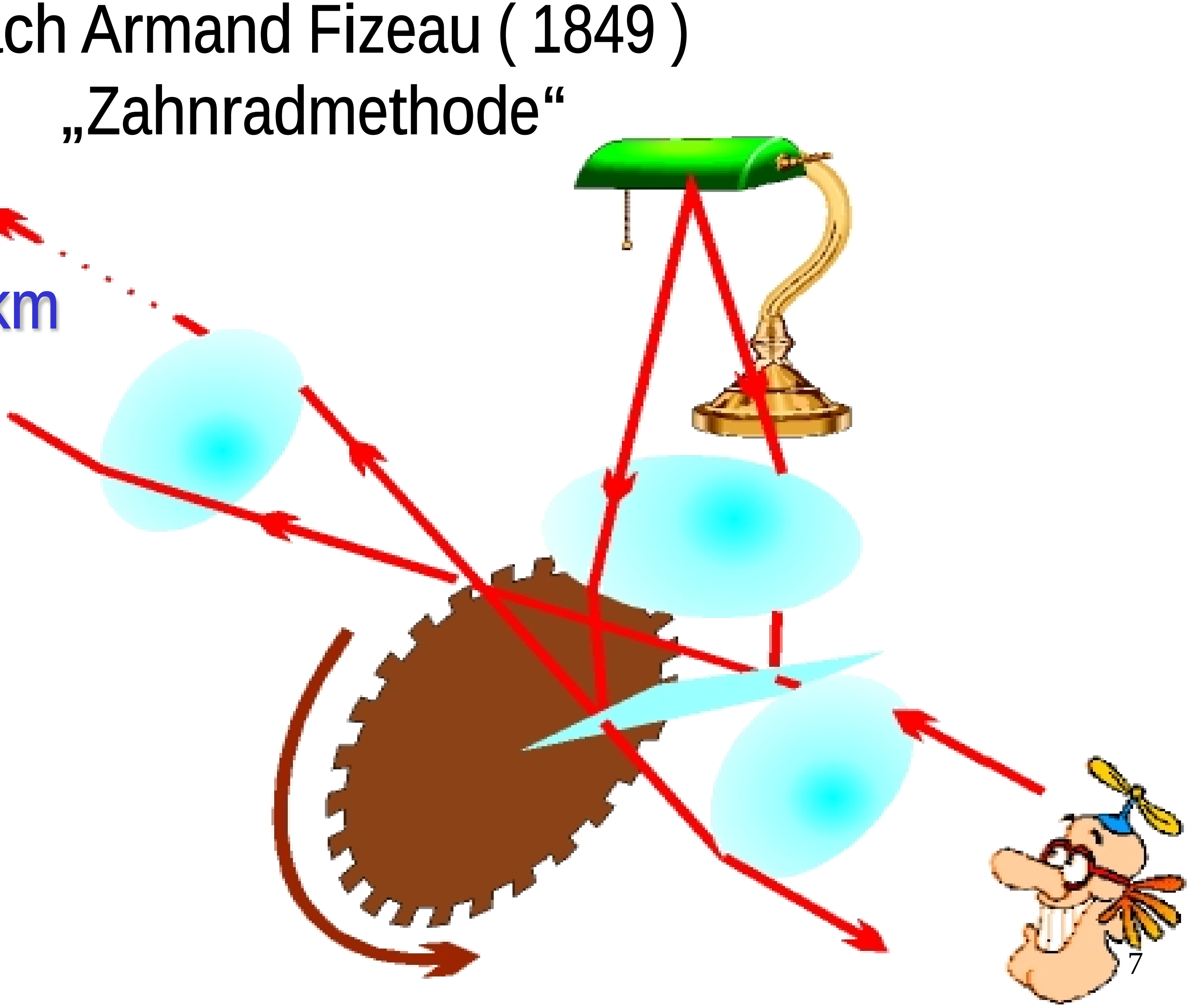
Die erste genaue Messung der Lichtgeschwindigkeit gelang Ole Römer im Jahre 1676 anhand der Differenz Δt der Verdunklungsperioden der Jupitermonde.

Wenn die Zeit gemessen wird, die ein Mond im Schatten des Jupiters verbringt, dann hängt das Resultat von der relativen Position der Erde in Bezug auf den Jupiter während dieser Messung ab.
Ole Römer erhielt so den schon recht guten Wert von c = 240000 km/s für die Lichtgeschwindigkeit.



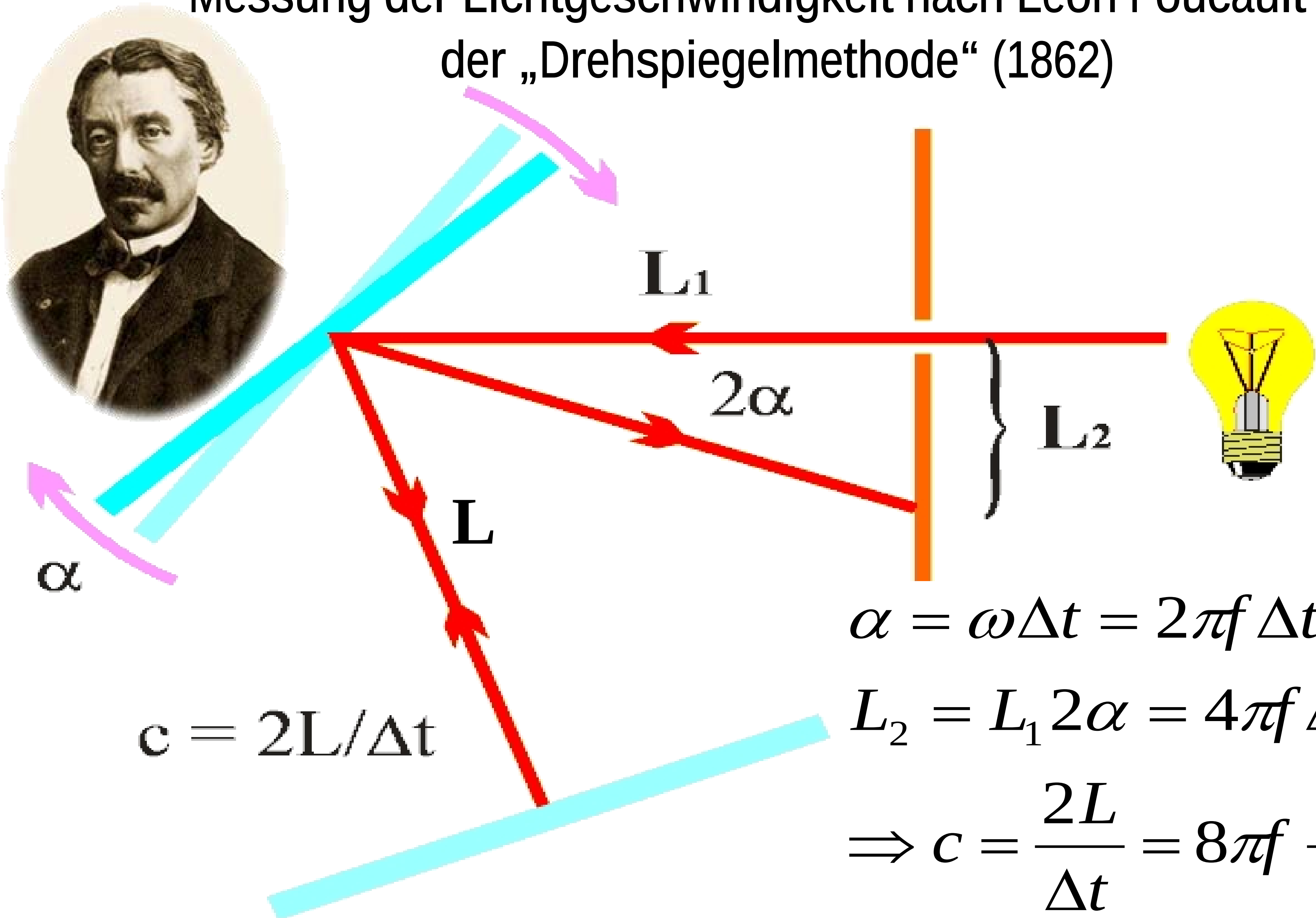
$$c = \frac{|\vec{a}| - |\vec{b}|}{\Delta t}$$

Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Armand Fizeau (1849) „Zahnradmethode“



Originalaufbau von Fizeau (1849)

Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Leon Foucault mit der „Drehspiegelmethode“ (1862)



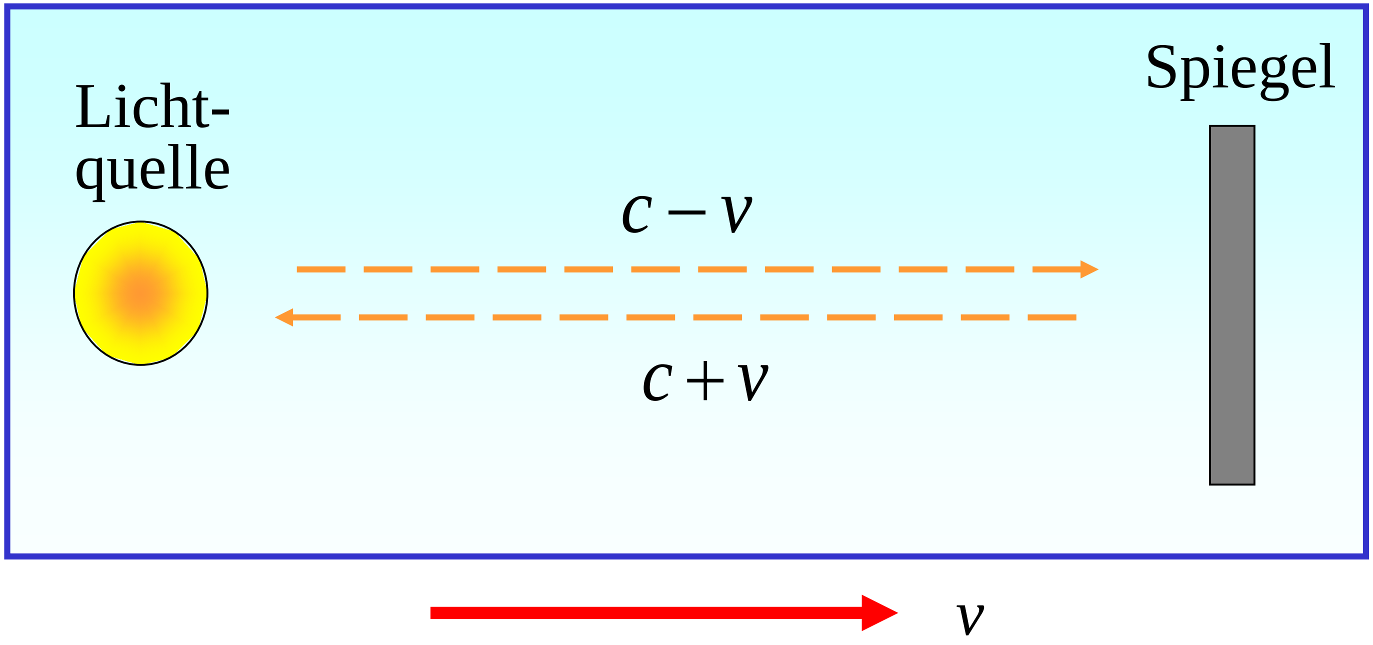
$$\alpha = \omega \Delta t = 2\pi f \Delta t$$

$$L_2 = L_1 2\alpha = 4\pi f \Delta t L_1$$

$$\Rightarrow c = \frac{2L}{\Delta t} = 8\pi f \frac{L L_1}{L_2}$$

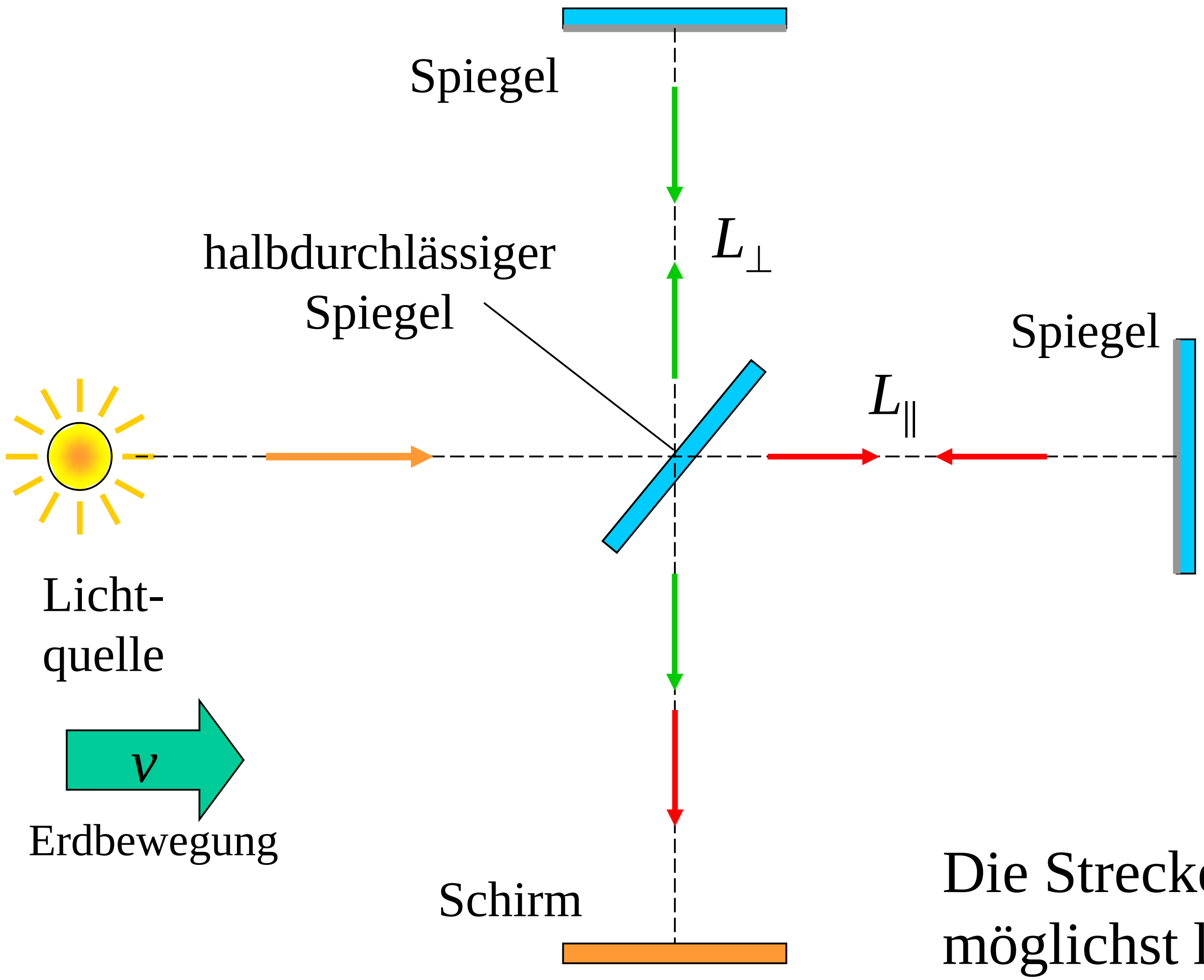
In einem Inertialsystem, das sich mit der Geschwindigkeit v gegen den absoluten Raum bewegt, wird eine Lichtquelle und ein Spiegel aufgebaut. Nach der Galilei-Transformation wäre dann die Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Bewegung

$c' = c - v$ und in Gegenrichtung $c' = c + v$



Die Lichtgeschwindigkeit wäre also in verschiedenen Inertialsystemen je nach deren Bewegung unterschiedlich.

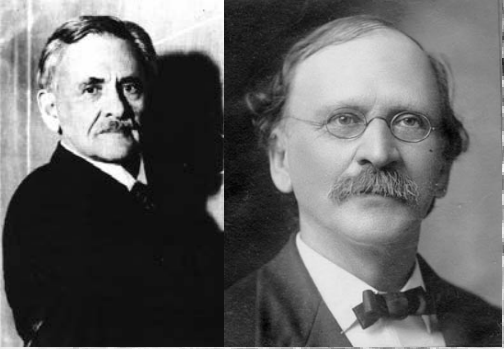
Mit einem empfindlichen Interferometer haben Michelson & Morley 1887 versucht, diese unterschiedlichen relativen Lichtgeschwindigkeiten zu messen.

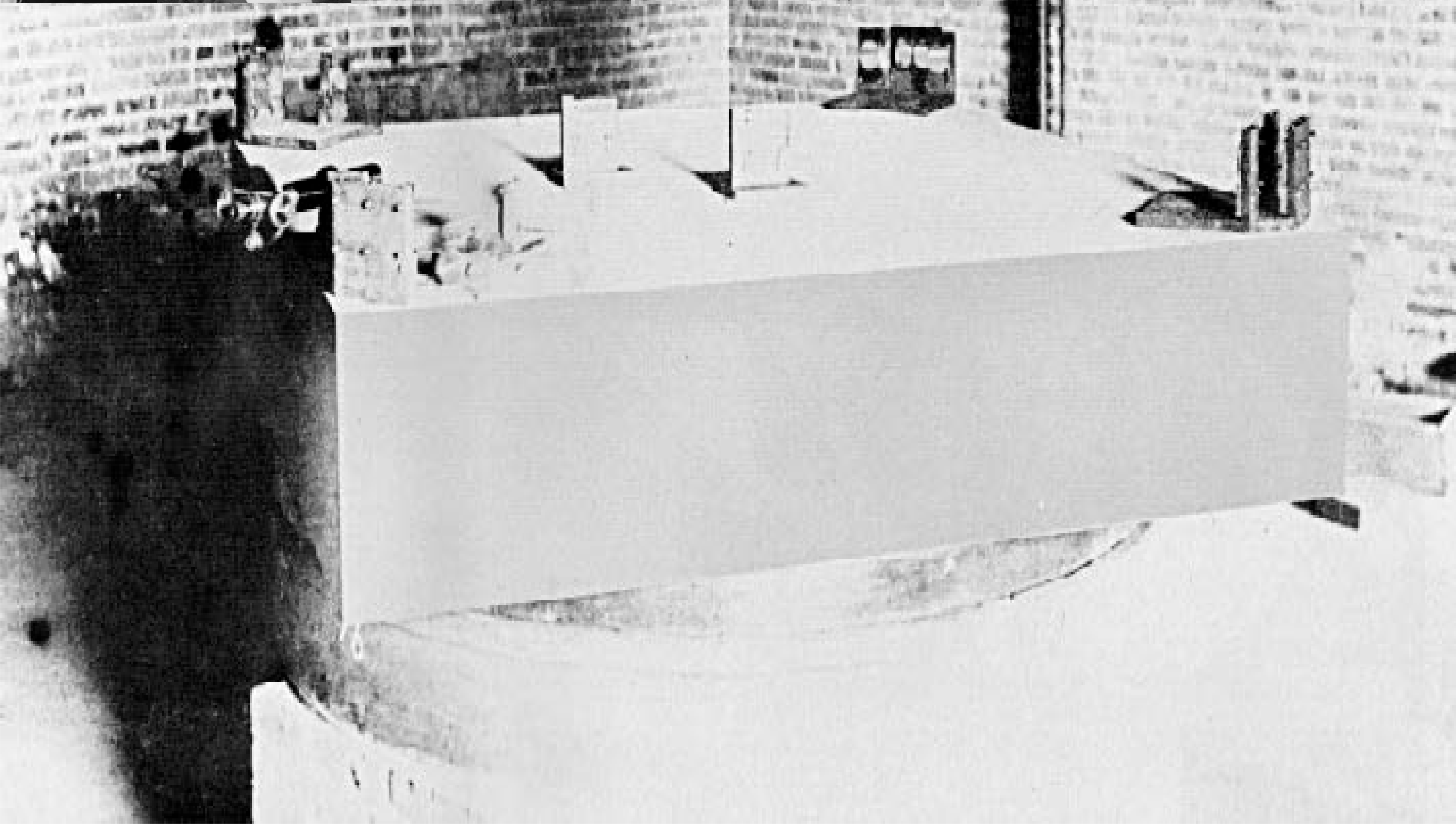


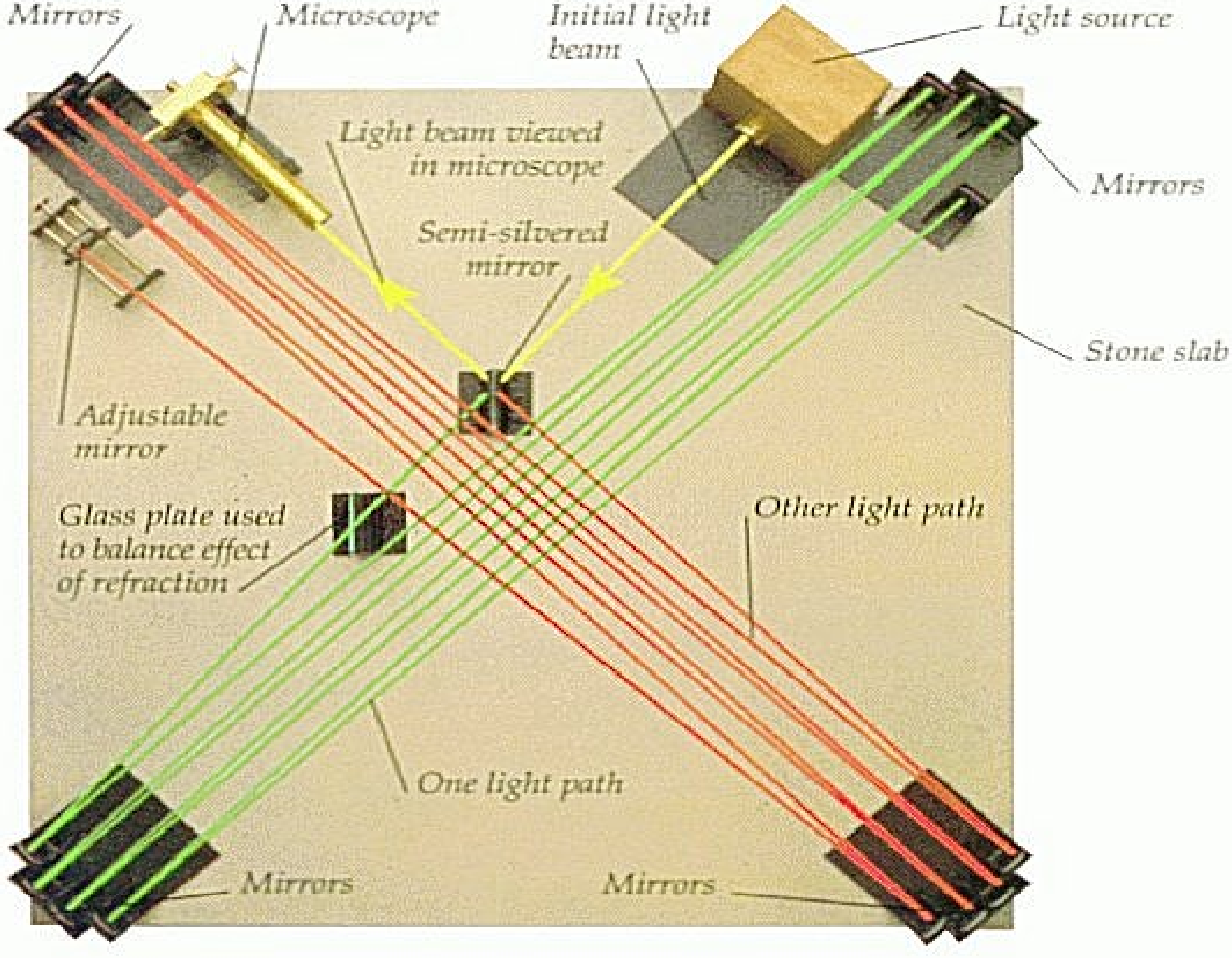
Der Lichtstrahl wird vom halbdurchlässigen Spiegel in zwei senkrecht zueinander verlaufende Strahlen aufgespalten, die nach Reflexion an den beiden Spiegeln wieder überlagert werden.

Die Strecken $L_\parallel$ und $L_\perp$ sollten möglichst lang sein.

Michelson-Morley Experiment（1887）

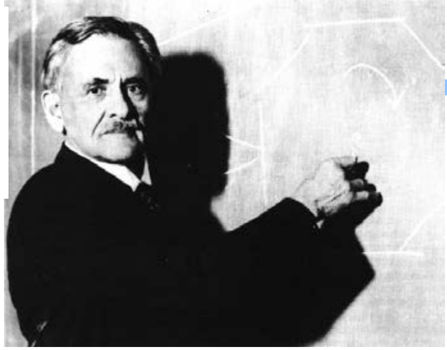






Mirrors
Microscope
Initial light beam
Light source
Light beam viewed in microscope
Mirrors
Semi-silvered mirror
Stone slab
Adjustable mirror
Glass plate used to balance effect of refraction
Other light path
One light path
Mirrors
Mirrors

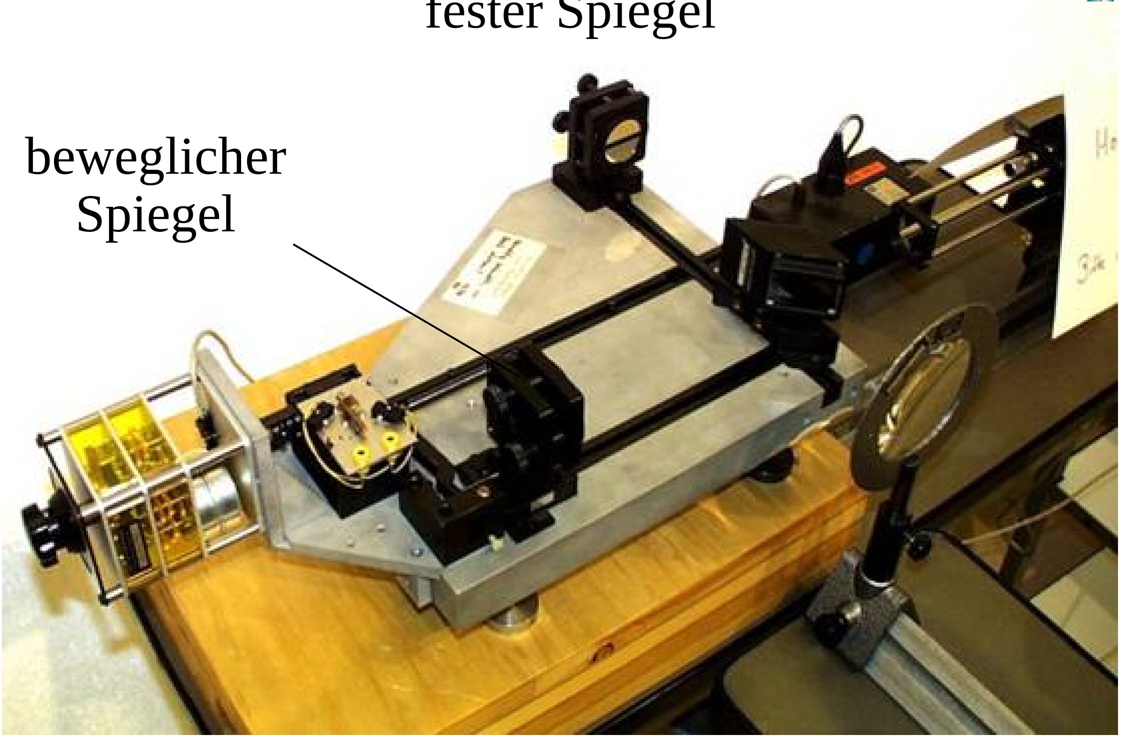
Albert Abraham Michelson (1852-1931)



Das Michelson-Interfereometer

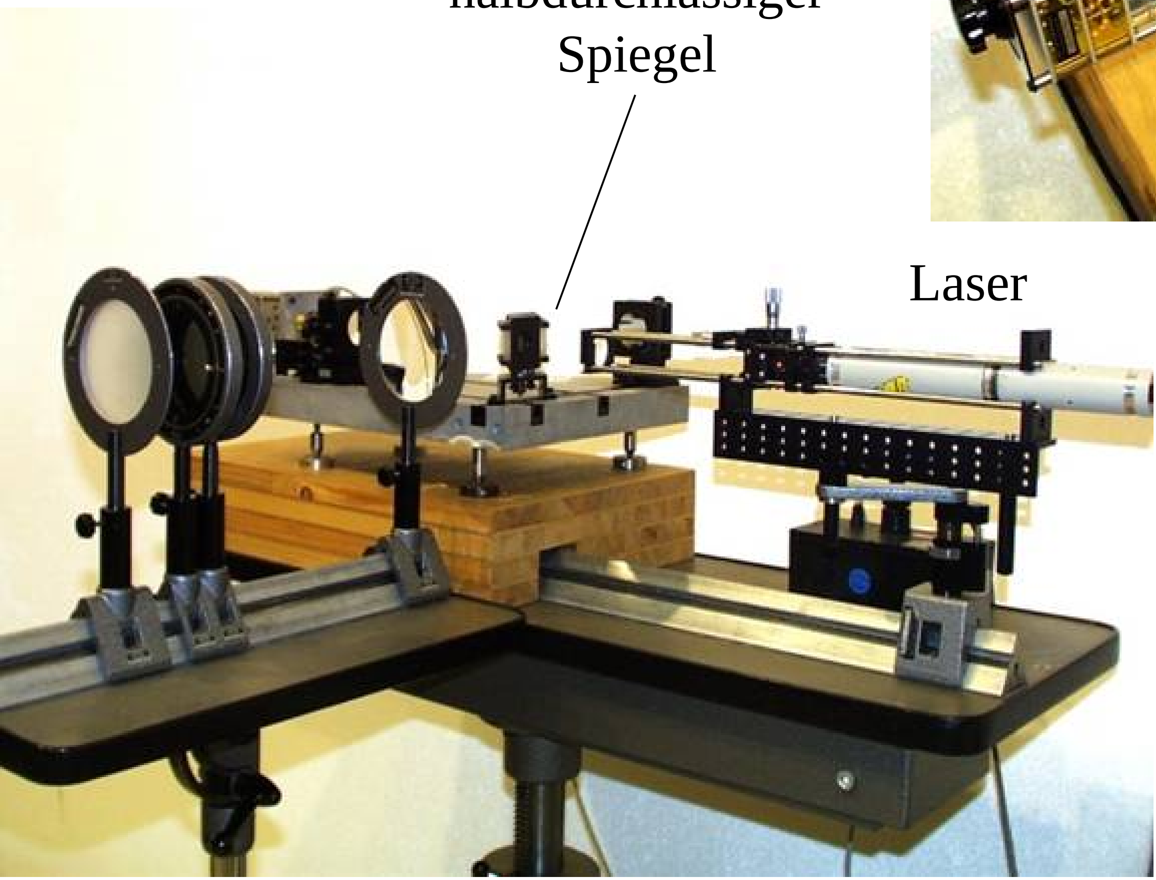
fester Spiegel

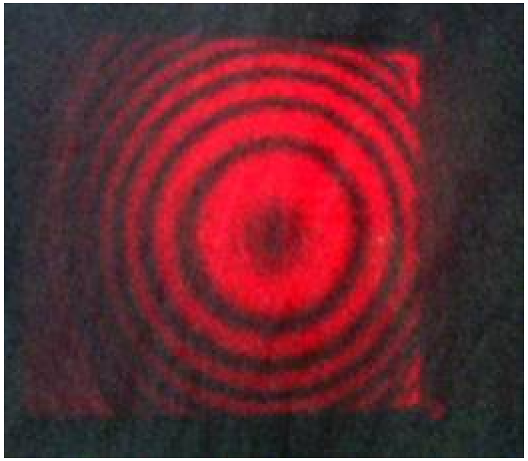
beweglicher Spiegel



halbdurchlässiger Spiegel

Laser





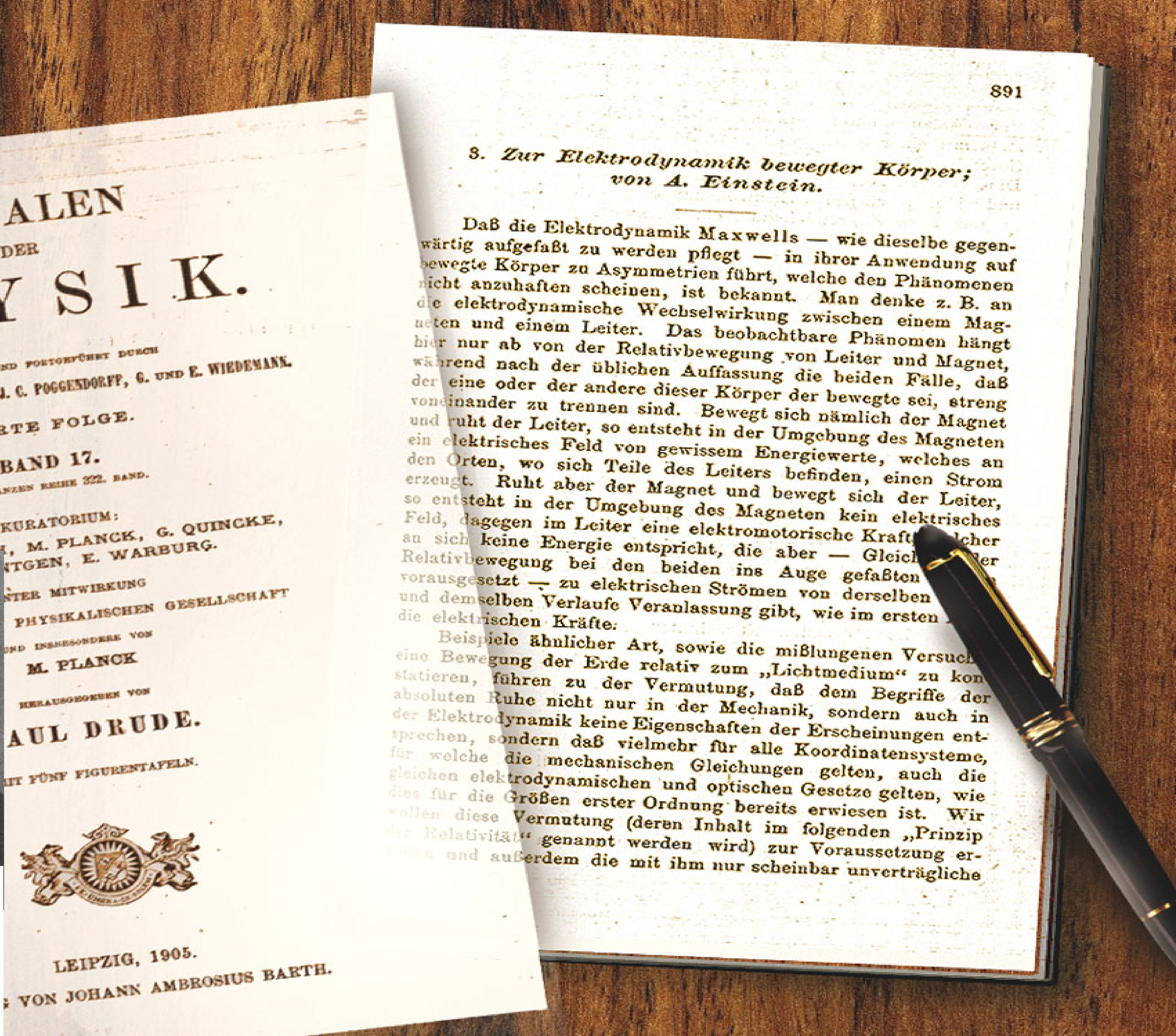
Beobachtete Interferenzringe

Es entstehen Interferenzstreifen auf dem Schirm. Dreht man das Interferometer um 90° und 180°, sollten sich die Interferenzstreifen entsprechend der unterschiedlichen Relativgeschwindigkeit der Erde verschieben. **Das wurde bei keiner Messung beobachtet, obwohl die Empfindlichkeit des Meßaufbaus ausgereicht hätte!**

Interferenzstreifen im Michelson-Interferometer

Daraus zog Einstein 1905 den Schluß, dass die Galilei-Transformationen nicht exakt richtig sein können. Er stelle die folgenden Postulate auf:

1. Es gibt kein absolut ruhendes Inertialsystem. Alle gleichförmig bewegten Systeme sind gleichberechtigt.
2. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich groß und unabhängig von der Bewegung.


ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 17.

DER GANZEN REIHE 322. BAND.

KURATORIUM:
…CH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
…NTGEN, E. WARBURG.

…NTER MITWIRKUNG
… PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
…ND INSBESONDERE VON
M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON
…AUL DRUDE.

…IT FÜNF FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1905.
… VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

891

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft… …lcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleich… …er Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten … vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben … und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten … die elektrischen Kräfte.

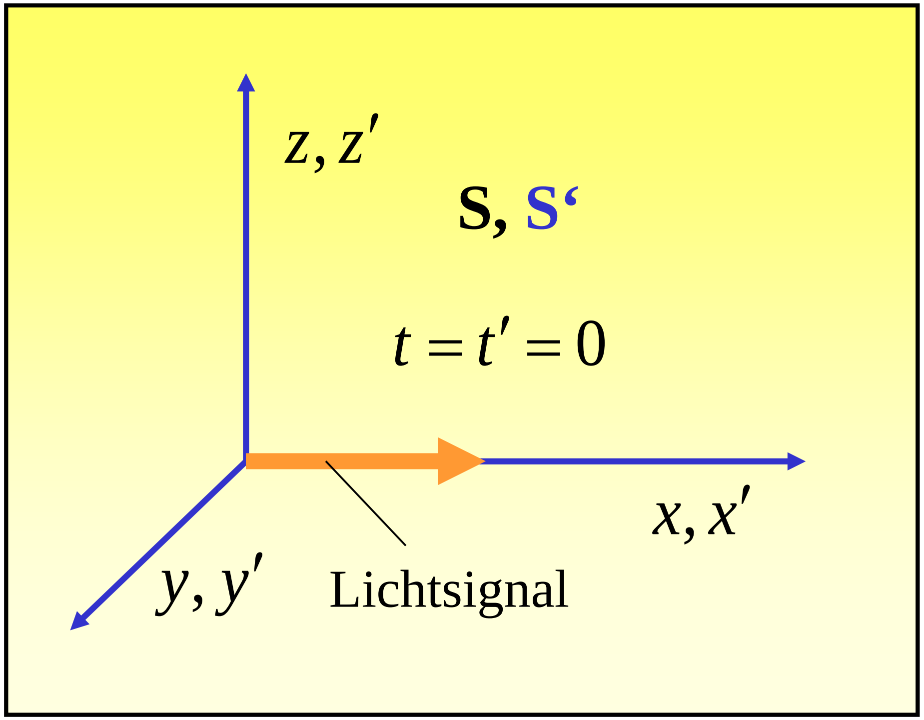
Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuch… eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium" zu kon… statieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität" genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Albert Einstein (1879-1955)

Die Lorentz-Transformation

Zur Bestimmung der neuen Trans-formation nehmen wir an, daß sie bis auf einen Faktor γ identisch ist mit der Galilei-Transformation:

$$x = \gamma\left(x' + v\,t'\right), \qquad x' = \gamma\left(x - v\,t\right)$$



Zum Zeitpunkt $t = t‘ = 0$ sollen die beiden Systeme **S** und **S‘** gerade übereinander liegen. Dann müssen die Gleichungen für die x-Kompo-nenten gleich lauten, also

$$x = c\,t \quad \text{und} \quad x' = c\,t'$$

Setzt man das in die Transformation ein, folgt

$$c\,t = \gamma\left(c\,t' + v\,t'\right) = \gamma\left(c + v\right)t' \quad (*)$$

$$c\,t' = \gamma\left(c\,t - v\,t\right) = \gamma\left(c - v\right)t \quad (**)$$

Aus (*) erhält man

$$t = \gamma \frac{c + v}{c} t'$$

Setzt man das in (**) ein, kann der Faktor γ berechnet werden.

$$ct' = \gamma(c-v)\gamma\frac{c+v}{c}t'$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \gamma^2\frac{(c-v)(c+v)}{c^2} = \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Der gesuchte Faktor ist damit:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Die Zeit ist jetzt nicht mehr absolut.
Sie vergeht in den verschiedenen Inertialsystemen unterschiedlich!
Die Transformation berechnen wir mit

$$x' = \gamma\left[\gamma(x'+vt') - vt\right]$$

Löst man diese Gleichung nach *t* auf, ergibt sich:

$$t = \frac{1}{v}\left[\gamma(x'+vt') - \frac{x'}{\gamma}\right]$$

$$= \gamma t' + \gamma\frac{x'}{v}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

Mit

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

findet man die Zeittransformation:

$$t = \gamma\left(t' + x'\frac{v}{c^2}\right)$$

Damit ergibt sich die Transformation vom System **S'** in das System **S** zu:

Lorentz-Transformation

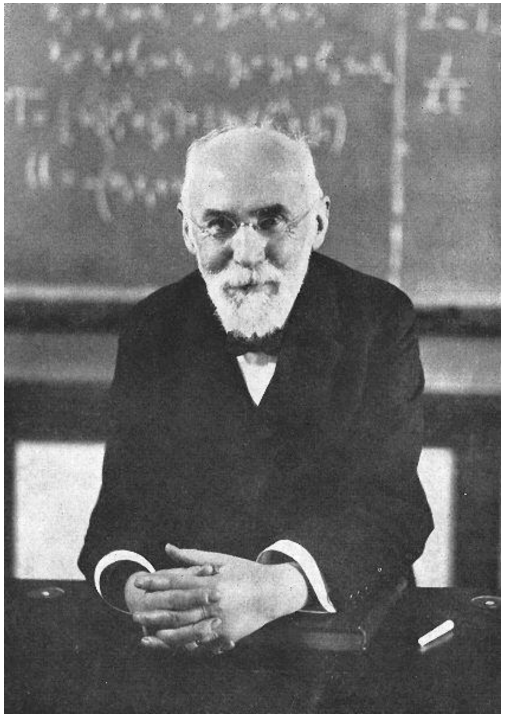
$$x = \gamma\left(x' + v\,t'\right) \qquad y = y' \qquad z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right) \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die umgekehrte Transformation vom System **S** in das System **S‘** lautet dann:

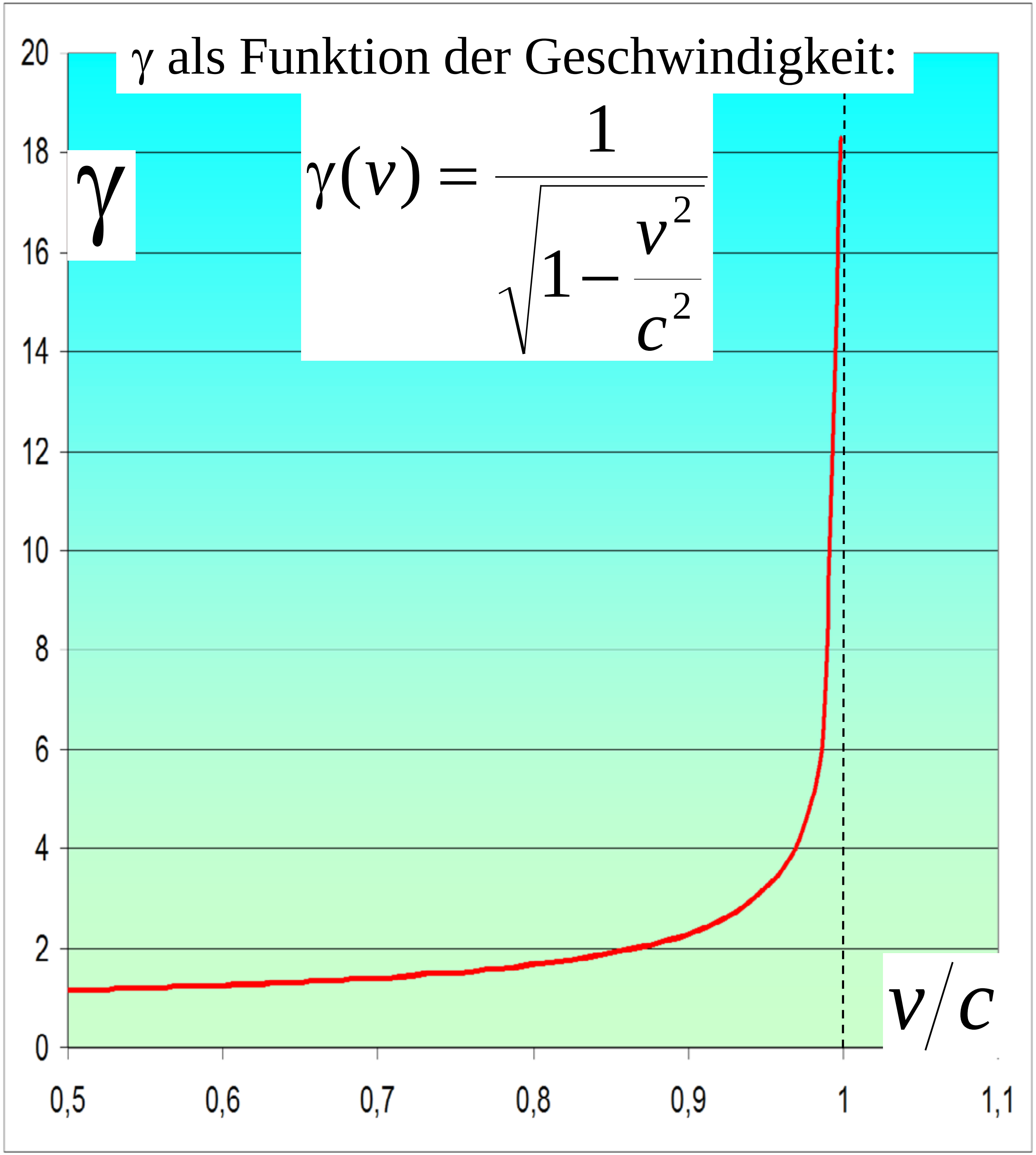
$$x' = \gamma\left(x - v\,t\right) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{x\,v}{c^2}\right)$$



Antoon Lorentz
(1853-1928)

Für $v << c$ gehen diese Transformationen in die bekannte Galilei-Transformation über, d.h. diese gilt nach wie vor für kleine Geschwindigkeiten.



Beispiel:

In dem Speicherring DELTA der Universität Dortmund erreichen die Elektronen eine Energie von 1.5 GeV. Dabei haben sie die Geschwindigkeit

$$v = 2.99792483 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

das entspricht

$$99.9999942\ \%\ \text{von}\ c$$

Damit wird

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 2935{,}42$$

Die Zeitdilatation

Die Zeit ist keine absolute Größe mehr, sondern sie verläuft in jedem Inertial-system anders. Wir betrachten im bewegten System **S‘** am Ort x_0‘ zwei Ereignisse zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 . Die Zeiten im System **S** sind dann

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{v\,x_0'}{c^2}\right)$$

$$t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{v\,x_0'}{c^2}\right)$$

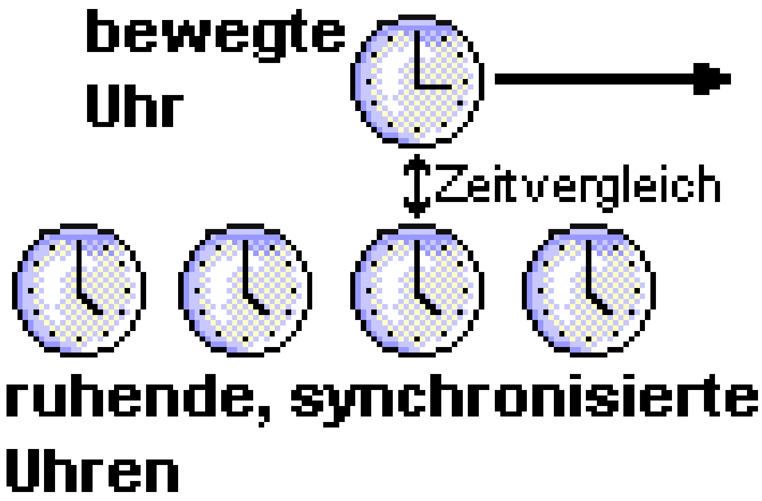
Das Zeitintervall ist also

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' - t_1'\right)$$

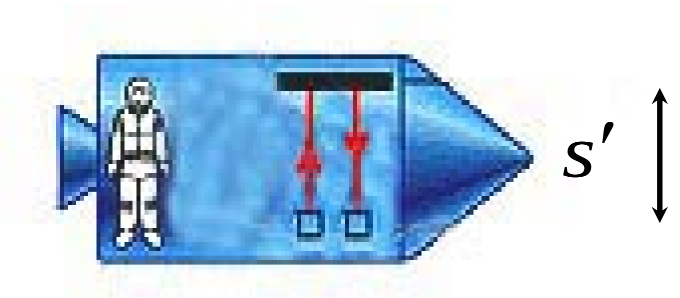
Es ergibt sich also die sog. „Zeit-dilatation“ oder Zeitehnung“

$$\boxed{\Delta t = \gamma\,\Delta t'}$$

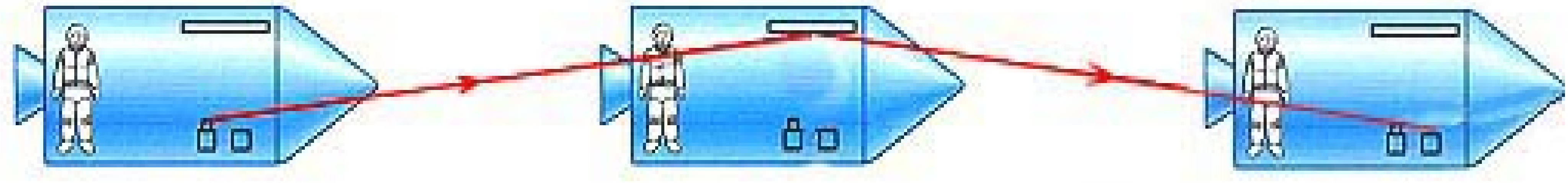
„Bewegte Uhren gehen langsamer!“



Veranschaulichung der Zeitdilatation



$$\Delta t' = \frac{s'}{c}$$



$\vec{v}$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{v^2(\Delta t)^2 + s'^2}}{c} = \sqrt{\frac{v^2}{c^2}(\Delta t)^2 + (\Delta t')^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t'$$

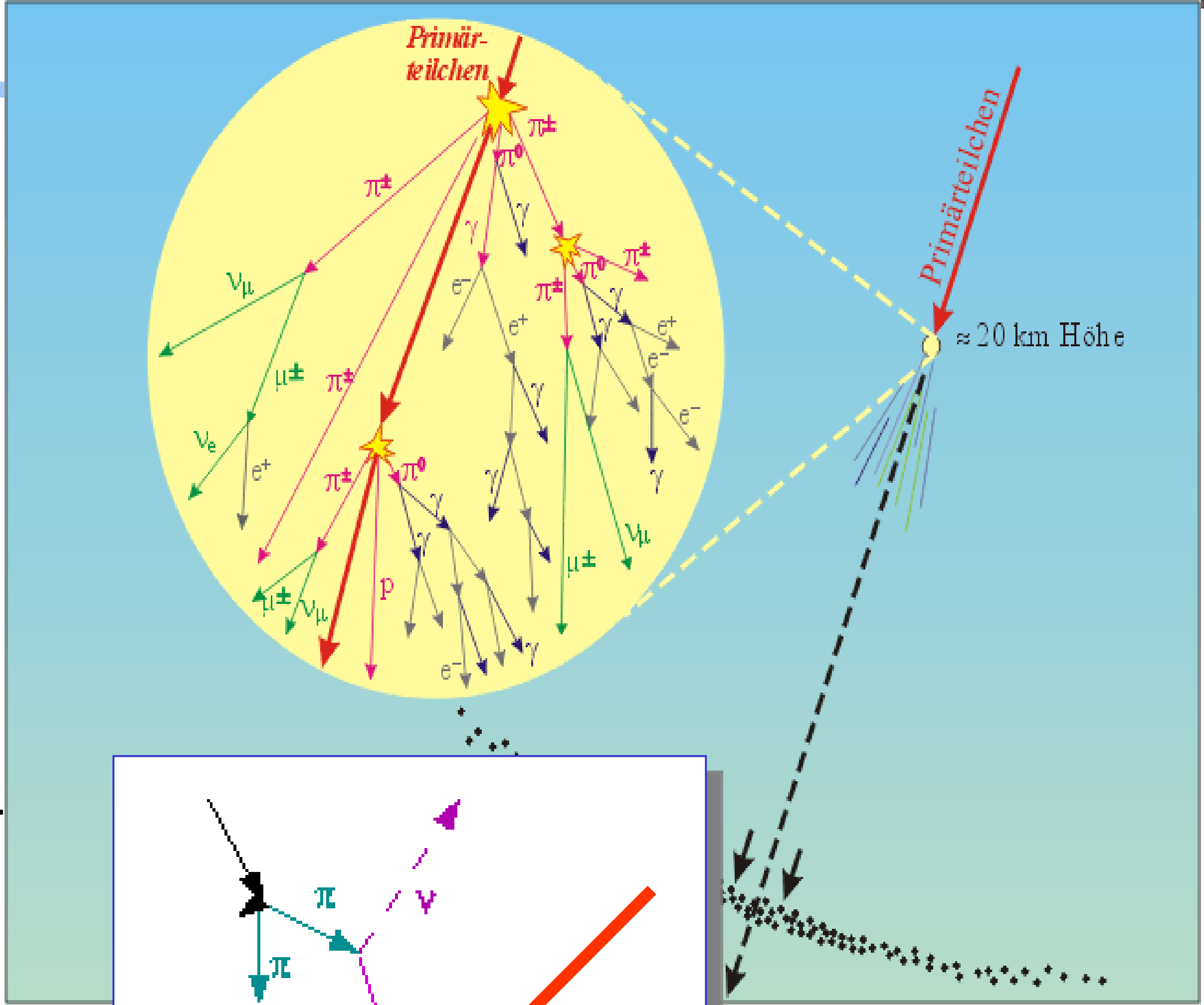
Earth observer sees light travel farther than does the astronaut

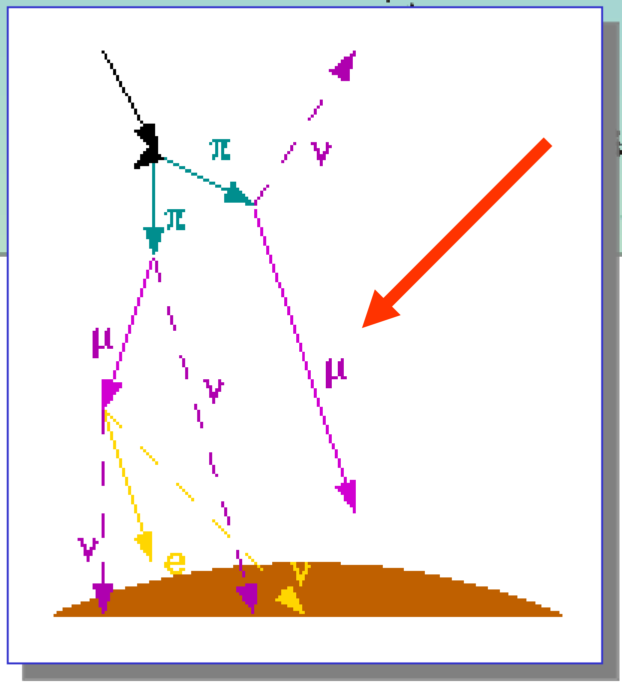
Beispiel: Zerfall der Myonen

Die Lebensdauer der Myonen beträgt im Ruhesystem $\tau = 2$ μs. Sie werden in großer Höhe erzeugt und fliegen mit einer Geschwindigkeit von $v = 0.998\ c$ zur Erdoberfläche.
Ohne Zeitdilatation würden sie
In den 2 μs von der Erde aus betrachtet eine Strecke von

$$s = v\,\tau = 600 \text{ m}$$

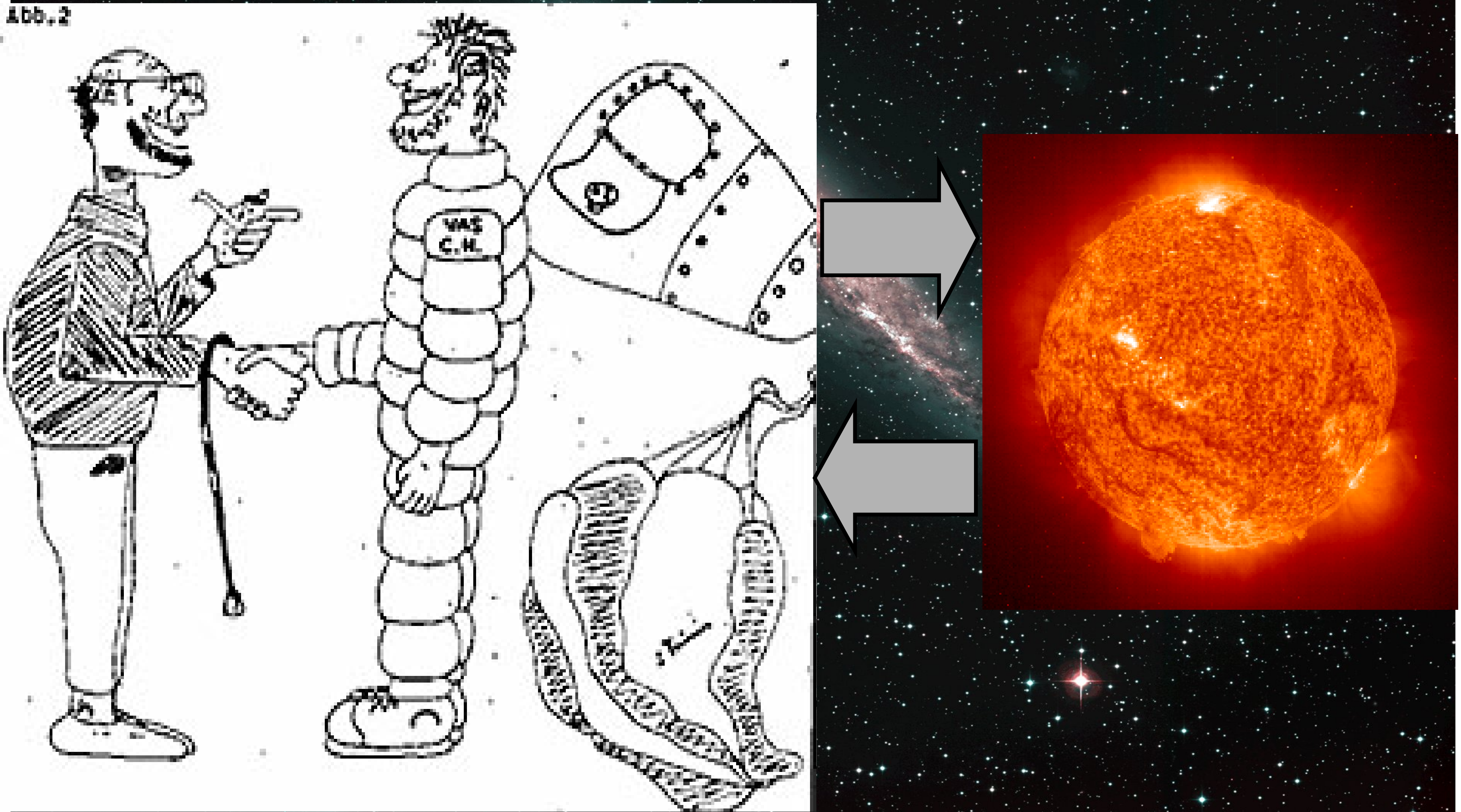
zurücklegen.
Da aber $\gamma = 15.8$ ist, wird die Lebensdauer im Erdsystem zu $\tau_{\text{Erde}} = 31.6$ μs, die Strecke ist somit $s_{\text{Erde}} = 9500$ m. Daher kann man Myonen an der Erdoberfläche nachweisen!





Entstehung der Myonen durch hochenergetische Primärteilchen.

„Zwillingsparadoxon“



Die Längenkontraktion

Auch Längen ändern sich bei der Messung aus einem anderen Inertialsystem. Man beobachtet zum Zeitpunkt t_0 im System **S** einen mit der Geschwindigkeit v bewegten Stab der Länge L‘. In **S‘** sind Anfang und Ende des Stabes x_1' und x_2'. Also ist hier seine Länge

$$L' = x_2' - x_1'$$

Nun gilt der Zusammenhang zwischen den Systemen **S** und **S‘**:

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - v\,t_0\right)$$
$$x_2' = \gamma\left(x_2 - v\,t_0\right)$$

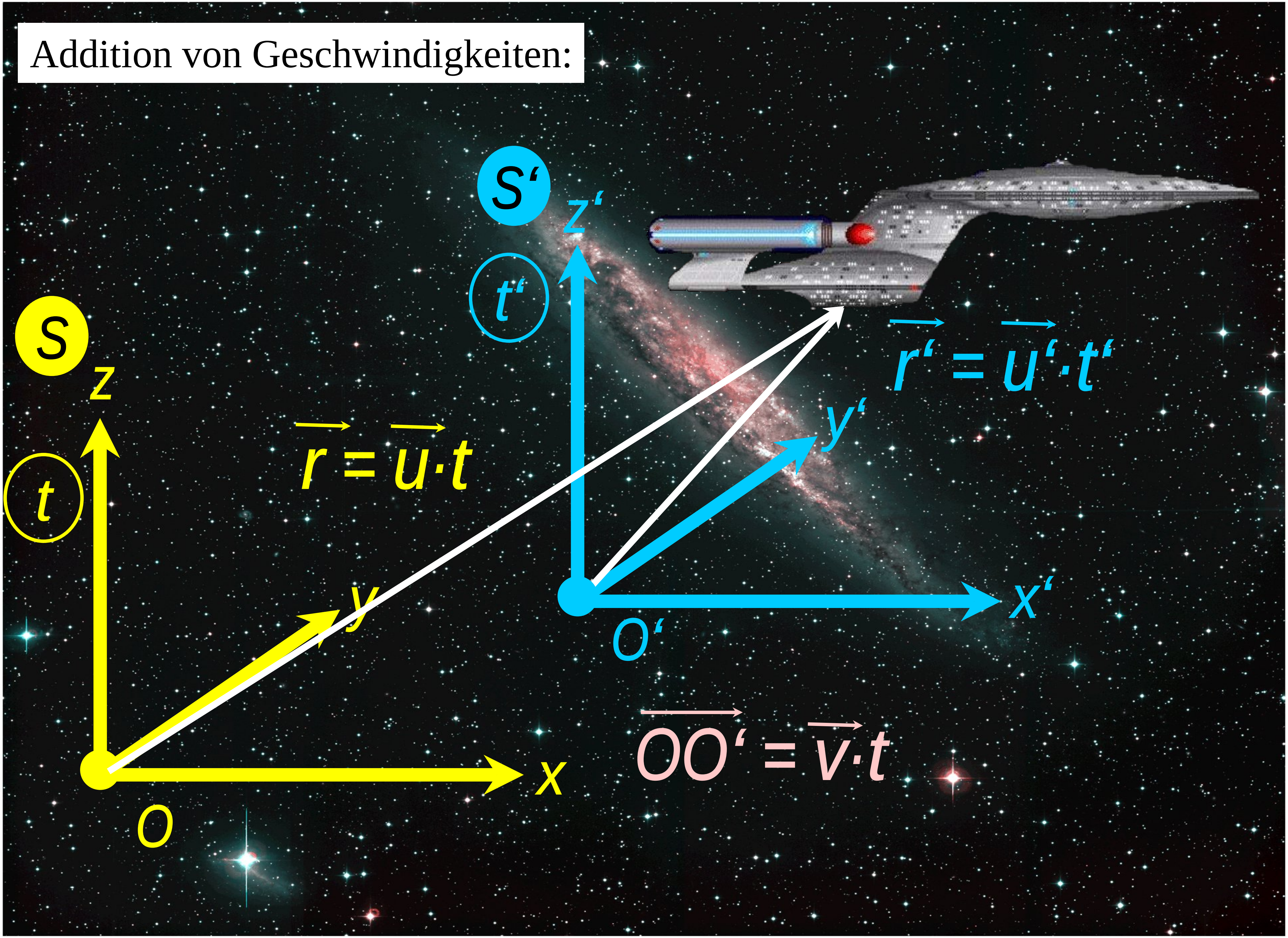
Damit wird die Länge

$$\begin{aligned} L' &= x_2' - x_1' \\ &= \gamma\left(x_2 - x_1\right) \\ &= \gamma\, L \end{aligned}$$

Also gilt für die gemessene Länge im System **S**:

$$\boxed{L = \frac{1}{\gamma} L'}$$

Der schnell bewegte Stab erscheint dem Beobachter im System **S** also um den Faktor 1/γ verkürzt. Dieses Phänomen heißt „Längenkontraktion“.


Addition von Geschwindigkeiten:
S
z
t
y
x
O
r = u·t
S‘
z‘
t‘
y‘
x‘
O‘
r‘ = u‘·t‘
OO‘ = v·t

Geschwindigkeitstransformation

Aus der Lorentztransformation

$$x = \gamma\left(x' + v\,t'\right)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v\,x'}{c^2}\right)$$

folgt für die Differentiale

$$dx = \gamma\left(dx' + v\,dt'\right)$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v\,dx'}{c^2}\right)$$

Die Geschwindigkeit im System **S** ist dann

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v\,dx'}{c^2}}$$

und weiter

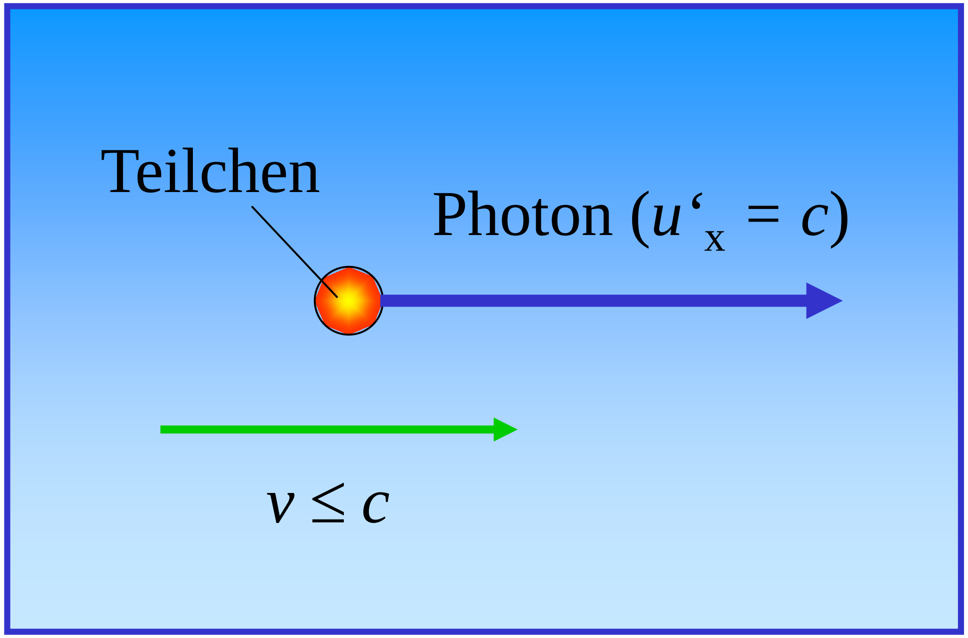
$$u_x = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{\frac{dt'}{dt'} + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}$$

Damit ist die transformierte Geschwindigkeit u_x im System **S** wenn u_x‘ die Geschwindigkeit im mit v bewegten System **S‘** ist:

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v\,u'_x}{c^2}}}$$

Beispiel:

Ein Teilchen fliegt mit der Geschwindigkeit v und sendet dabei in Flugrichtung ein Photon mit $u_x' = c$ aus.



Die Geschwindigkeit des Photon im Ruhesystem **S** ist dann

$$u_x = \frac{c+v}{1+\frac{vc}{c^2}} = c$$

Selbst für $v = c$ ist $u_x = c$. Die Summe zweier Lichtgeschwindigkeiten ergibt wieder nur c. Die Lichtgeschwindigkeit kann nicht überschritten werden!

Durch die Lorentztransformation wird offenbar die Kopplung zwischen Raum und Zeit aufgehoben, d.h. „Raum“ und „Zeit“ müssen auf einer Stufe behandelt werden.

Dies geschieht im vierdimensionalen Minkowski-Raum.

verallgemeinerter „Ortsvektor“ in diesem Raum:

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Dementsprechend
gibt es auch ein verallgemeinerten „Impulsvektor“:

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

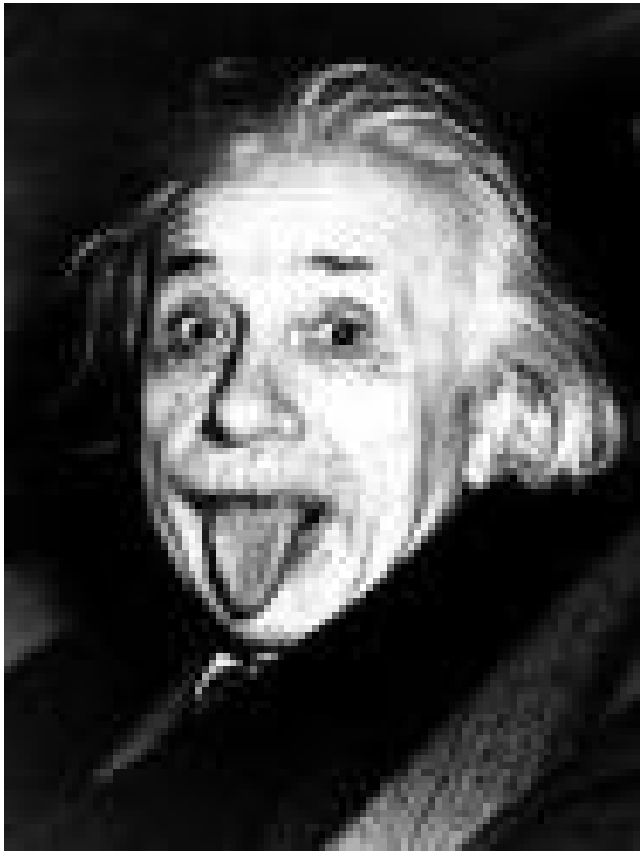
Weitere wichtige Fakten der speziellen Relativitätstheorie:

Energie-Masse Äquivalenz nach Einstein

Betrachtung des Ruhesystems eines Teilchens der Masse m:

$$E = mc^2$$

Das ist eine gewaltige Energiemenge!



Beispiel: Mensch mit m = 100 kg

$$E = mc^2 \approx 9 \cdot 10^{18}\, J$$

Würde sich der Mensch dazu entschließen, einen Beitrag zur Energieversorgung zu liefern, indem er sich binnen 24h in Energie umwandelt, so entspräche das einer Leistung von

$$P \approx 100 TW$$

zum Vergleich:
AKW P=0.001TW

Die Energie eines Teilchen in Bewegung erhält man durch eine Lorentz-transformation:

Energie

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$$

Impuls

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Achtung:

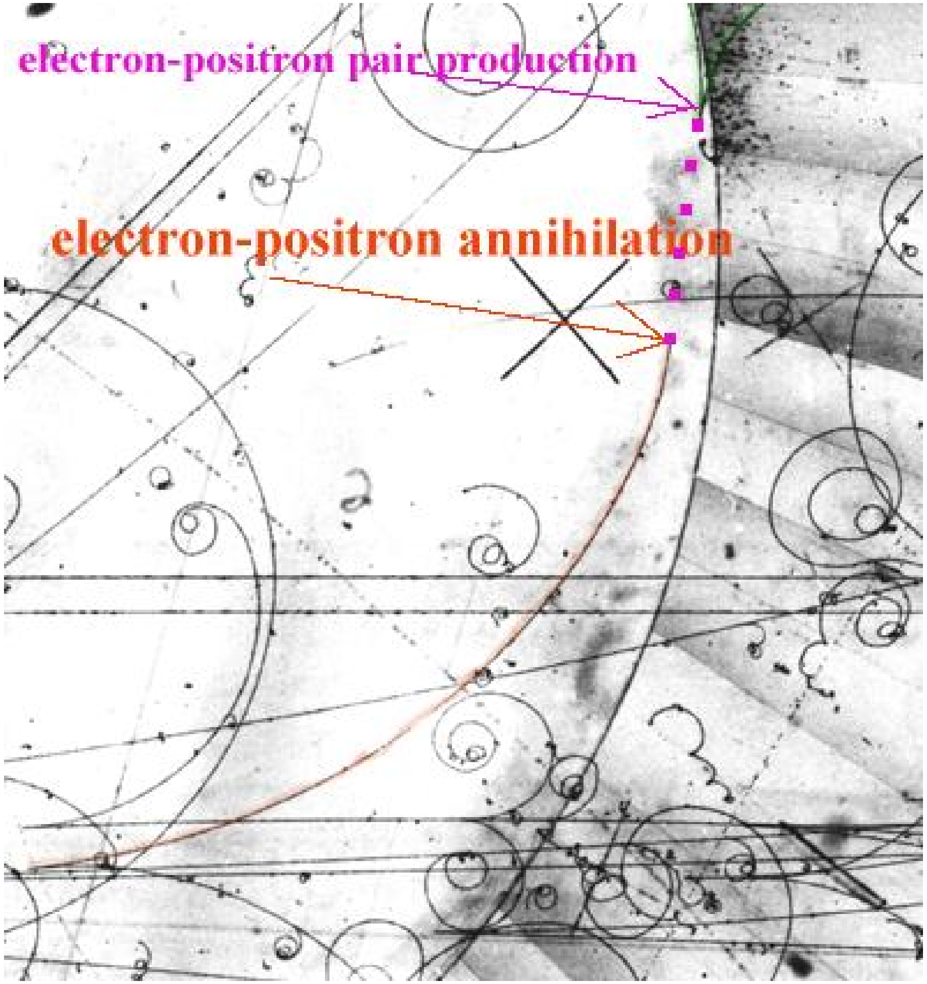
Der Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit ist nicht mehr linear. Um einen solchen Zusammenhang herzustellen, wird oft (begrifflich nicht ganz korrekt) eine geschwindigkeitsabhängige Masse definiert:

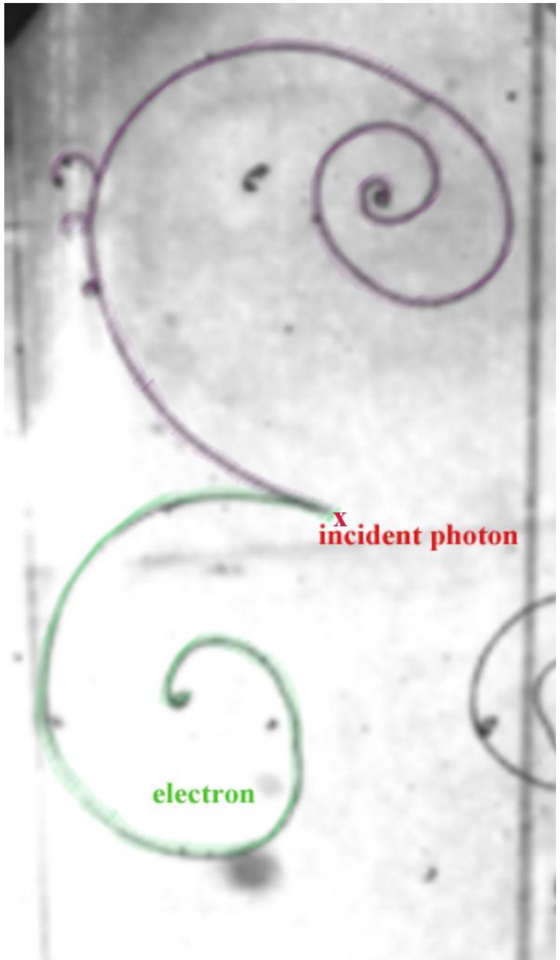
$$\vec{p} = m(v)\vec{v} \qquad \text{mit} \qquad m(v) = m \Big/ \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}$$

Experimenteller Nachweis der Energie-Masse Äquivalenz: Elektron-Positron-Vernichtung

Electron - Positron Annihilation

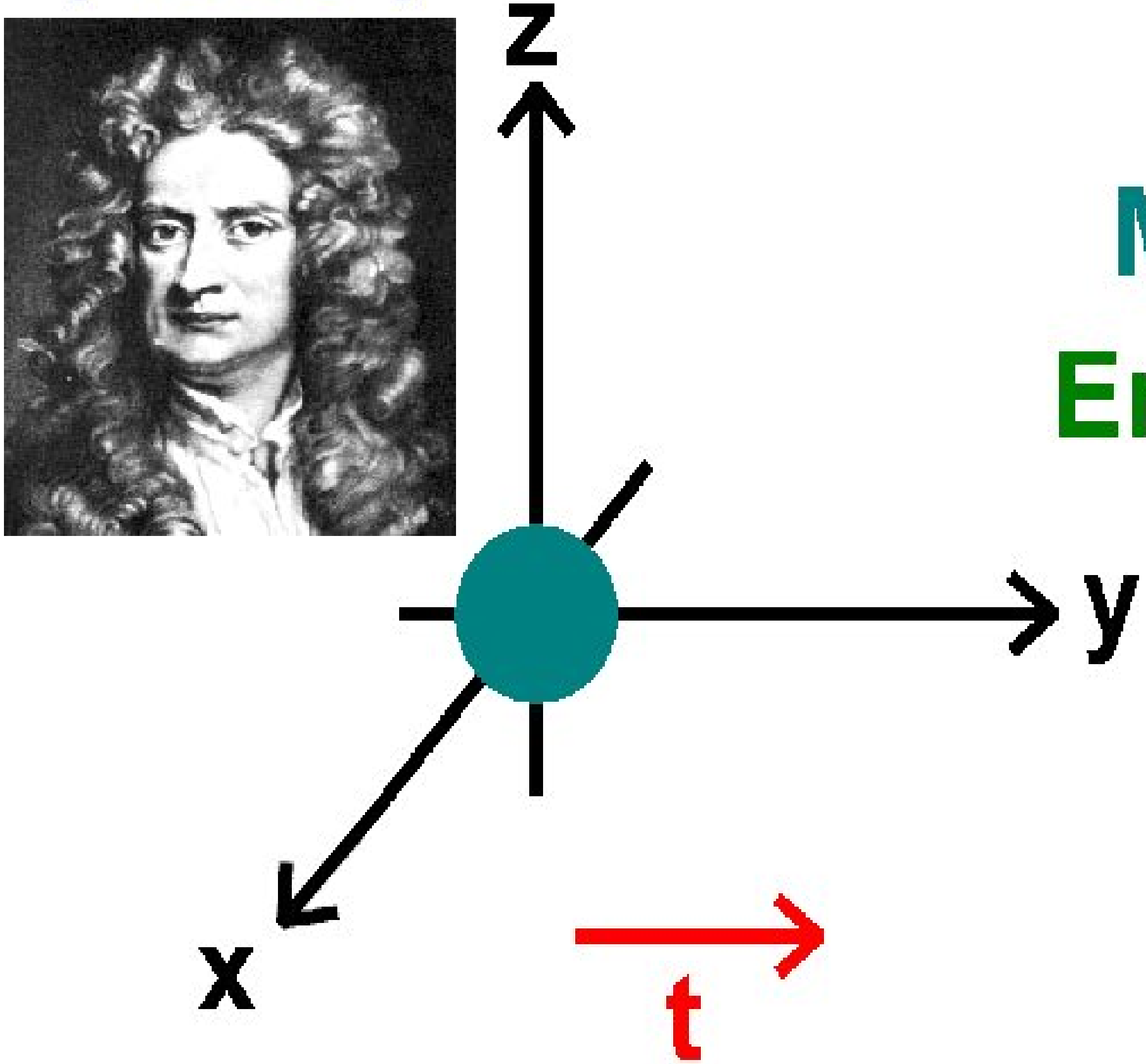
NASA - Goddard Space Flight Center
Scientific Visualization Studio





(v) Zusammenfassung

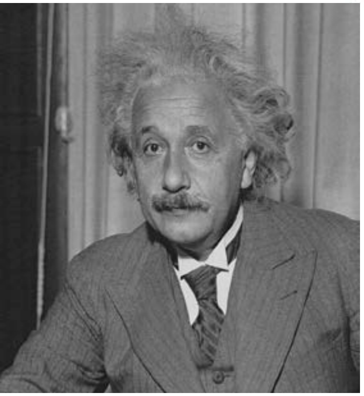
Newton
(1687)

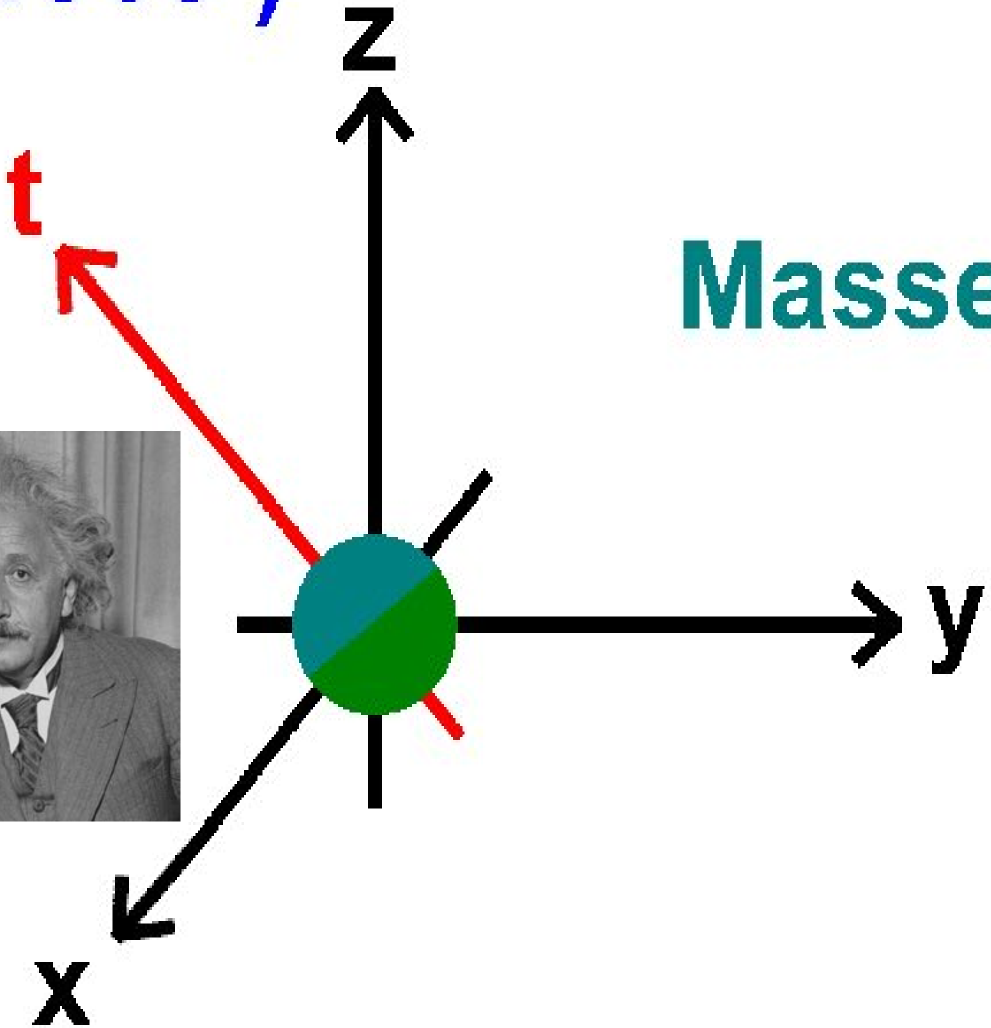


3D Raum	(x,y,z)
Zeit	(t)
Masse	m
Energie	E

Klassische Mechanik

Einstein
(1905)





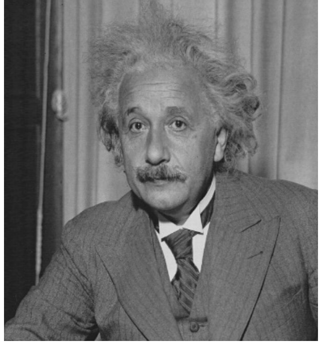
4D ebene "Raumzeit"
(x,y,z,t)

Masse / Energie
Äquivalenz

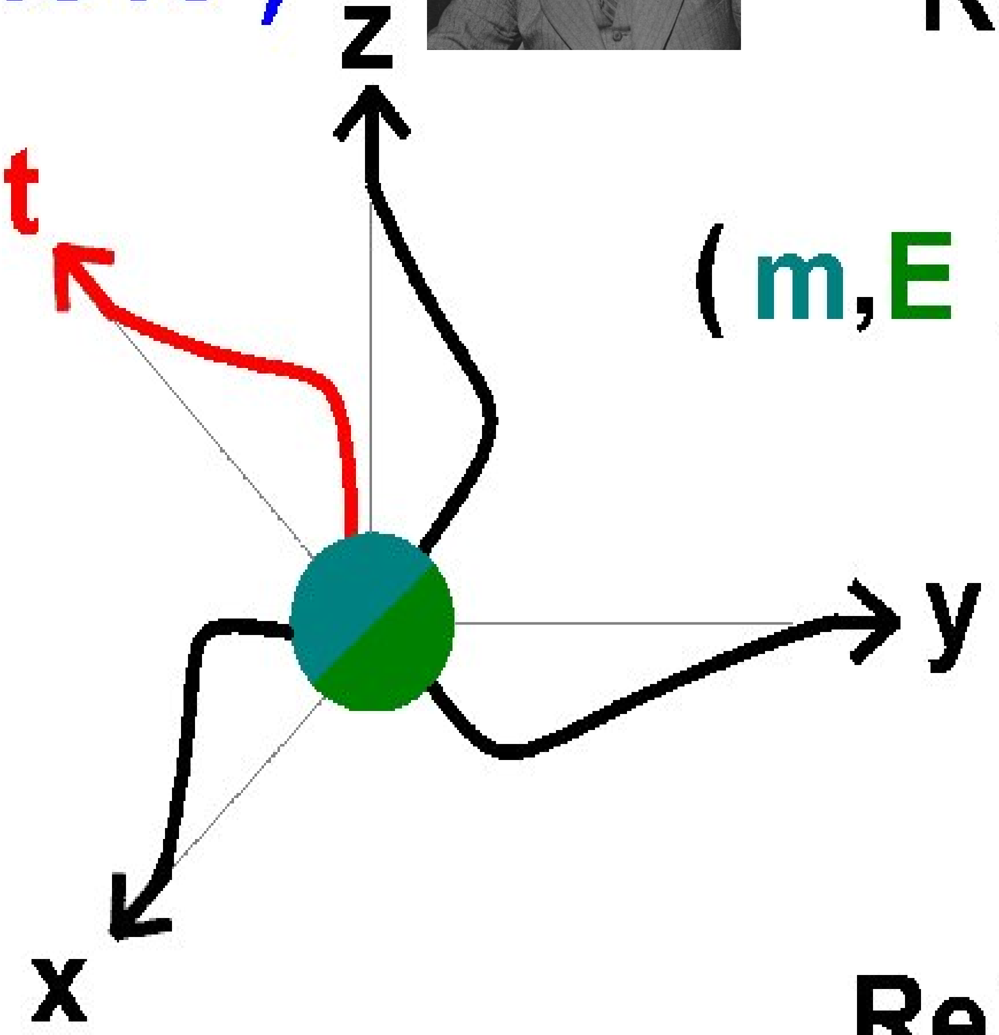
$$E = mc^2$$

Spezielle Relativitätstheorie

Einstein
(1916)



4D gekrümmte
"Raumzeit"



$(m,E) \Longleftrightarrow (x,y,z,t)$

Allgemeine
Relativitätstheorie

Die 4D *Raumzeit* wird durch Massen „verzerrt“