Inhalt der Vorlesung A1

2. Teilchen

A. Einzelne Teilchen

Beschreibung von Teilchenbewegung
- Kinematik: Quantitative Erfassung
- Dynamik: Ursachen der Bewegung

Kräfte

Arbeit + Leistung, Energie

Erhaltungssätze: Energie+Impulserhaltung

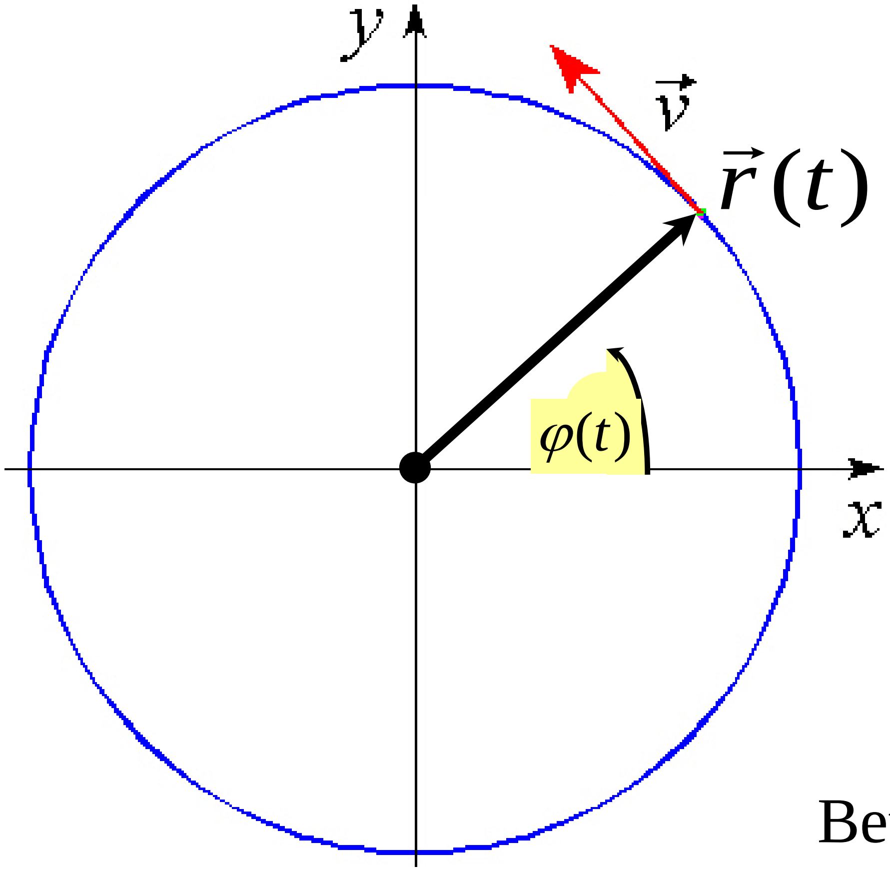
Reibungskräfte

Schwingungen

Rotationsbewegung: Drehimpuls+Drehmoment

Wiederholung: Kreisbewegung

Kinematik



Die Bewegung ist vollständig durch Angabe des Winkels charakterisiert.

Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Betrag der Bahngeschwindigkeit: $v = \omega r$

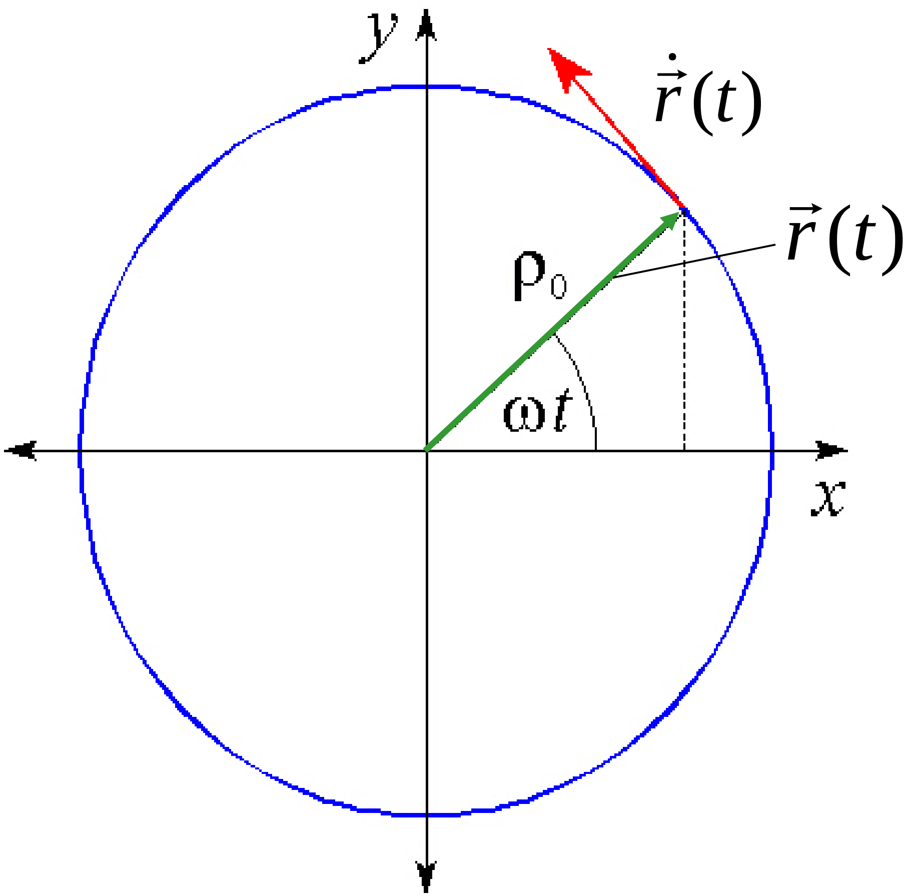
Winkelbeschleunigung:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$$

Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{\parallel} = r\,\alpha(t) \\ a_{\perp} = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r} \end{array}$$

Beispiel: Gleichförmige Kreisbewegung



Der zeitabhängige Ortsvektor ist dann

$$\vec{r}(t) = \rho_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \rho_0\, \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \left|\vec{v}(t)\right| = \rho_0 \omega = \text{const.}$$

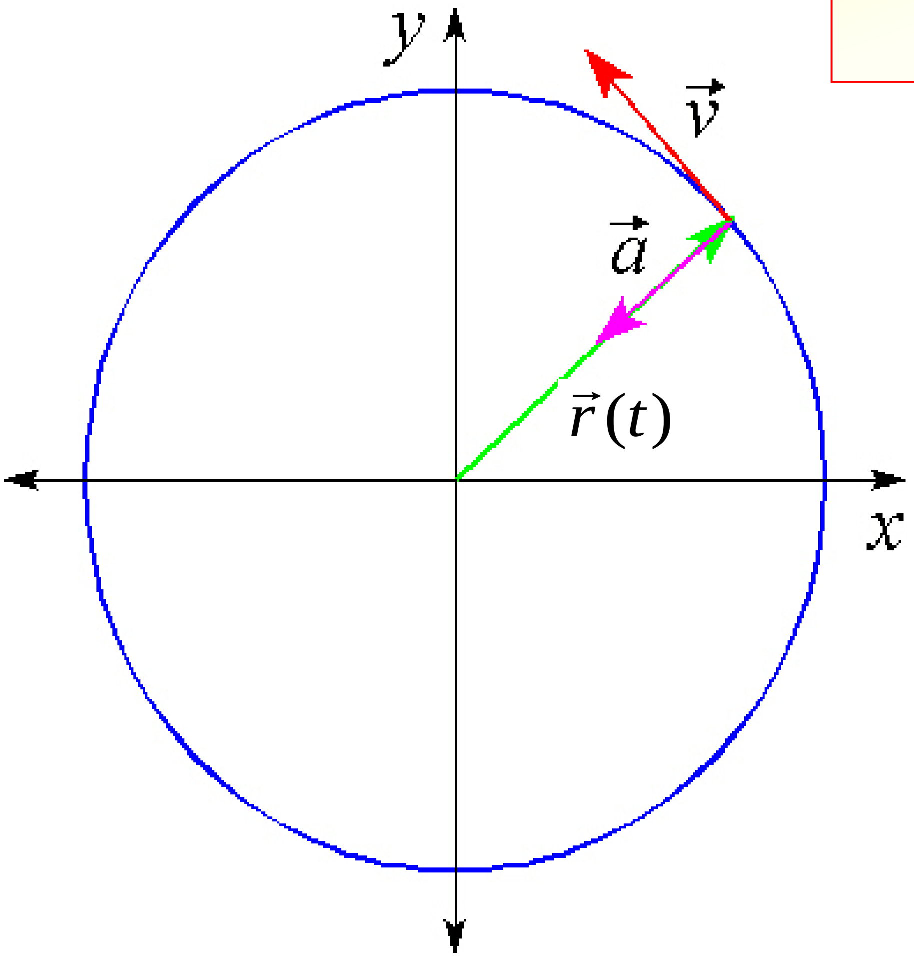
Winkelgeschwindigkeit : $\omega = 2\pi\, f$

Periode : $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Die Frequenz f gibt die Anzahl der Umläufe pro Sekunde an.

Die Kreisbeschleunigung ist

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t) = -\rho_0 \omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

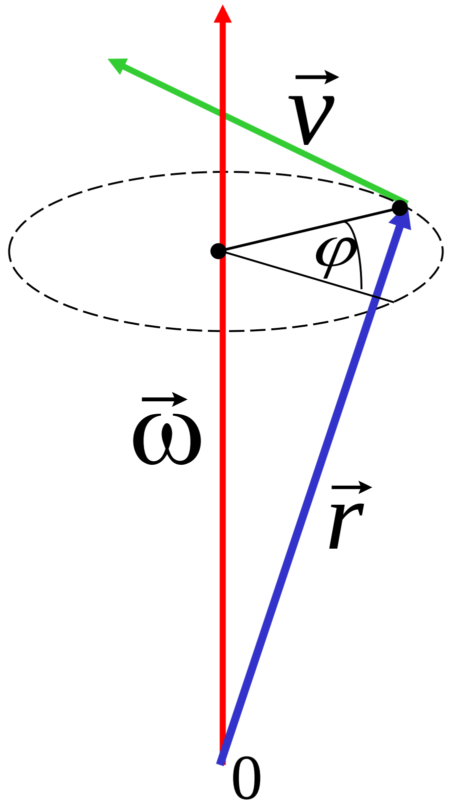


Die Kreisbeschleunigung steht senkrecht auf der Geschwindigkeit, sie weist immer zum Kreismittelpunkt (Zentripetalbeschleunigung).

Weiterhin folgt, daß die Kreisbeschleunigung proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ist:

$$|\vec{a}| = \rho_0 \omega^2 \propto \omega^2$$

Wichtig ist nicht nur die Angabe der Drehfrequenz, sondern auch die Orientierung der Drehachse, um die die Rotation erfolgt.



Winkelgeschwindigkeit als Vektor

> Der Vektor $\vec{\omega}$ legt mit seiner Richtung die Drehachse und mit seinem Betrag die Frequenz.

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$$

Die Bahngeschwindigkeit ist dann: $$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Dynamik

Untersuchung des Einflusses
einer Kraft:

Entscheidend bei der Drehbewegung sind nicht nur Betrag und Richtung der Kraft, sondern auch Abstand von der Drehachse!

Beispiel: TÜR
Der Türgriff sollte immer maximal weit weg von der Drehachse montiert sein!

Dieser Abstandsabhängigkeit trägt der Begriff der Kraft allein nicht Rechnung

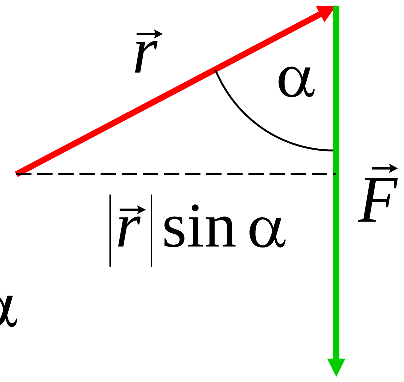
Definition eines neuen Begriffs: **Drehmoment**

Wenn die Kraft F und der Abstand r senkrecht aufeinander stehen, nennt man das Produkt

$$M = F \cdot r$$

das Drehmoment.

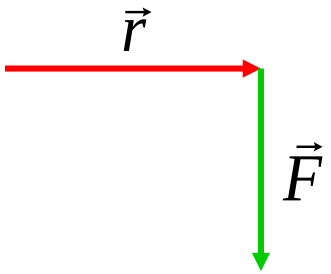
Allgemein:



$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha$$

Verschiedene Fälle für Drehmomente:

Fall 1:



$$\vec{F} \perp \vec{r}$$

$$M = M_{\max}$$

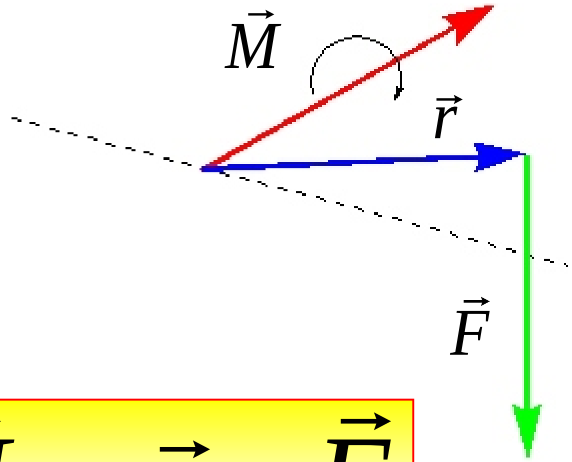
Fall 2:

$$\vec{F} \parallel \vec{r}$$

$$M = 0$$

keine Wirkung durch die Kraft!

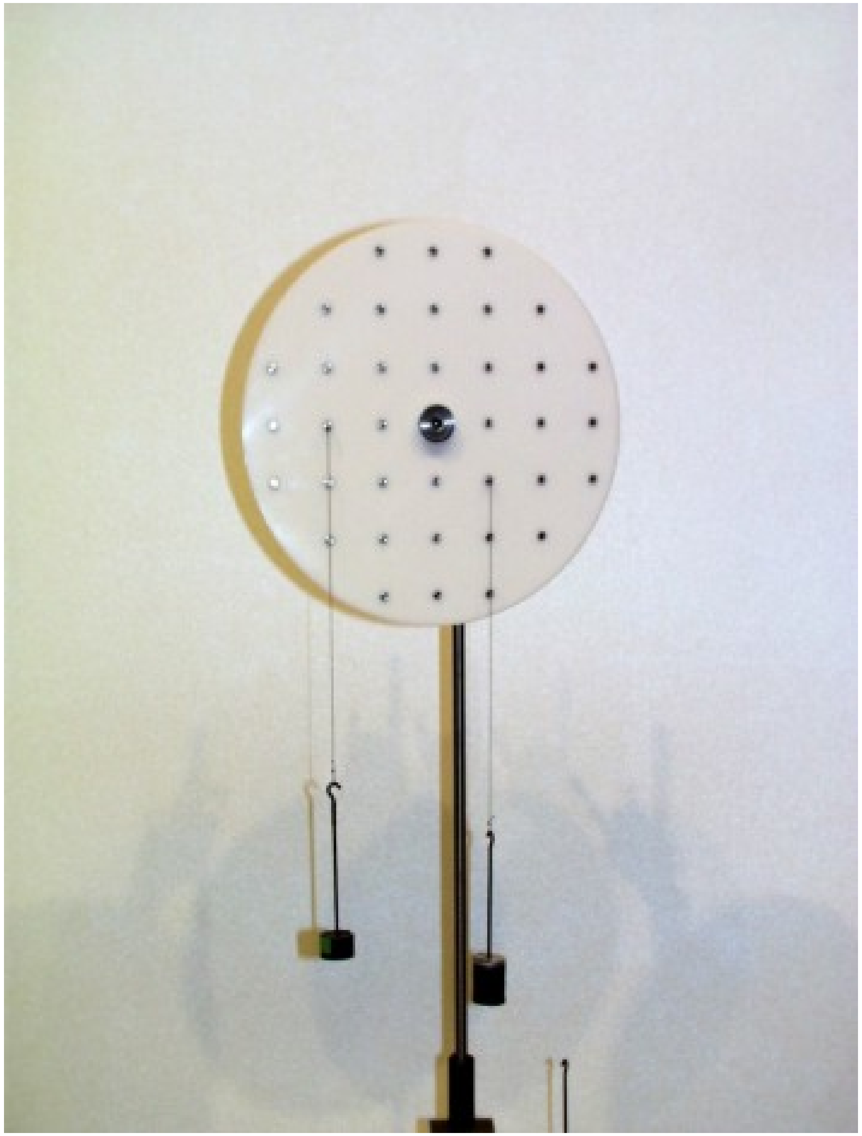
Daraus folgt die allgemeine Definition des **Drehmoments**:



$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Experimentelle Veranschaulichung der Drehmomentdefinition:

Momentenscheibe



Aus diesen beiden Übereinkünften,

Benutzung des Drehwinkels zur Beschreibung der Bewegung

Benutzung von Drehmomenten zur Beschreibung der Dynamik

ergeben sich eine Vielzahl anderer Größen:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \vec{M}$$

Drehimpuls

Der lineare Impuls war definiert durch: $\vec{p} = m\vec{v}$

Der Drehimpuls eines Massepunktes ist definiert als:

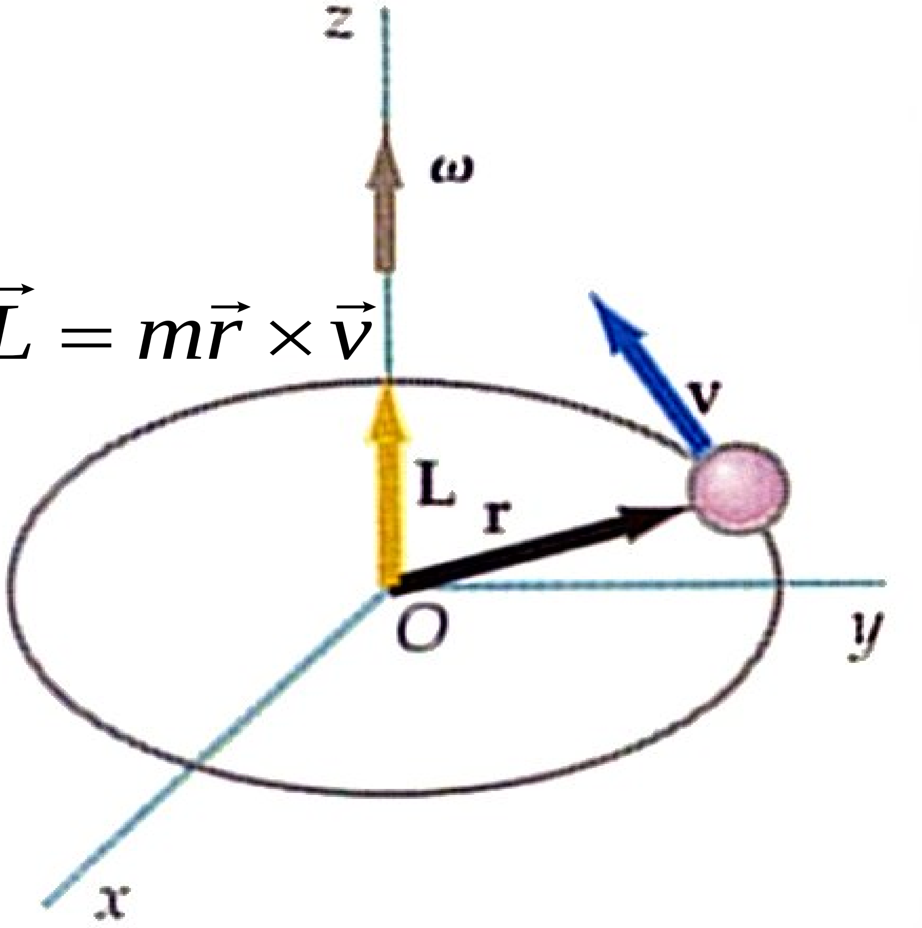
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Es sollte beachtet werden, dass der Drehimpuls davon abhängt, auf welchen Ursprungspunkt er bezogen wird.

L bezogen auf den Kreismittelpunkt O

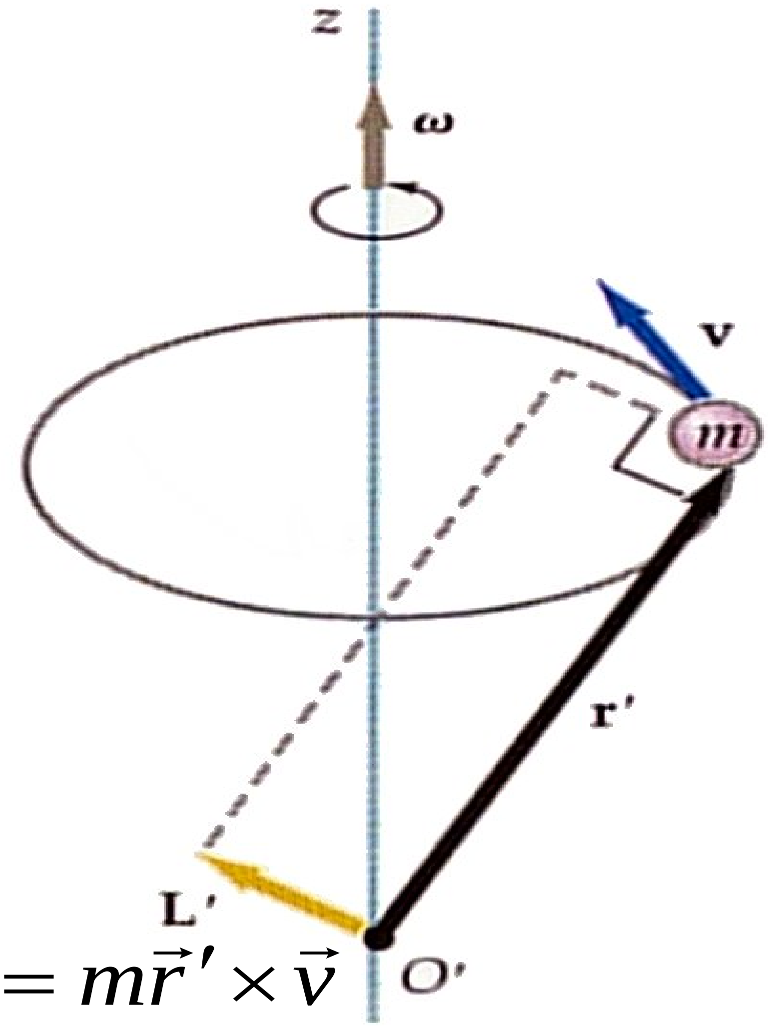
$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$



L‘ bezogen auf den Punkt O‘

$$\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$$



$$\vec{L}' = m\vec{r}\,' \times \vec{v}$$

Der Drehimpuls eines Massepunktes ist definiert als:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Orts- und Geschwindigkeitsvektor sollen senkrecht zueinander stehen. Dann kann gilt für den Betrag des Drehimpulses:

$$L = r \cdot p = mr \cdot v = mr \cdot \omega r = \left(mr^2\right)\omega$$

Den Ausdruck $I = mr^2$ nennt man das Trägheitsmoment des Körpers.

Zudem ist der Drehimpuls parallel zur Winkelgeschwindigkeit orientiert.

Drehmoment

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega \cdot r)^2 = \frac{1}{2}\left(mr^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Bewegungsgleichung

Der Drehimpuls ist nach der ursprünglichen Definition:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Daraus folgt durch Ableiten nach der Zeit:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

Wegen

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} \parallel \vec{p}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{0}$$

ergibt sich:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

Wegen des 2. Newton‘schen Axioms gilt:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

Das Drehmoment wurde definiert als:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Also folgt

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$$

Ein Drehmoment $\vec{M}$ bewirkt eine Änderung des Drehimpulses $\vec{L}$.

Drehimpulserhaltung

Aus der Bewegungsgleichung des starren Körpers folgt sofort der nächste wichtige Erhaltungssatz. In einem abgeschlossenen System, auf das keine externen Momente einwirken, gilt:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \overrightarrow{const.}}$$

Der Gesamtdrehimpuls des Systems bleibt also erhalten. Da der Drehimpuls ein Vektor ist, gilt diese Aussage für jede einzelne Komponente.

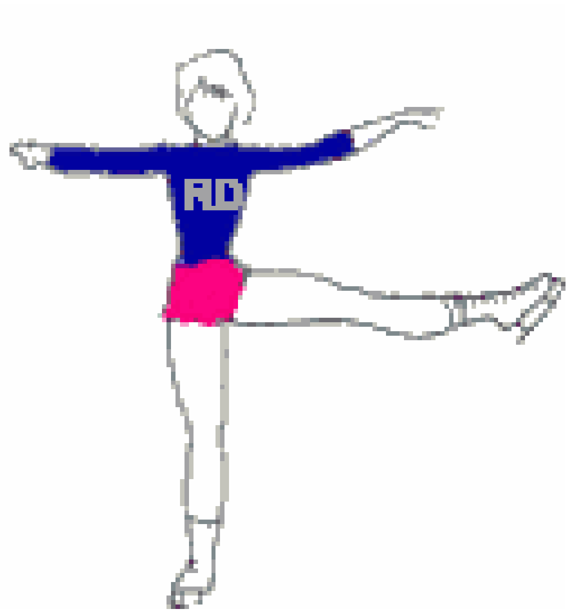
<u>Beispiel:</u> Drehimpulserhaltung bedeutet, dass der Vektor

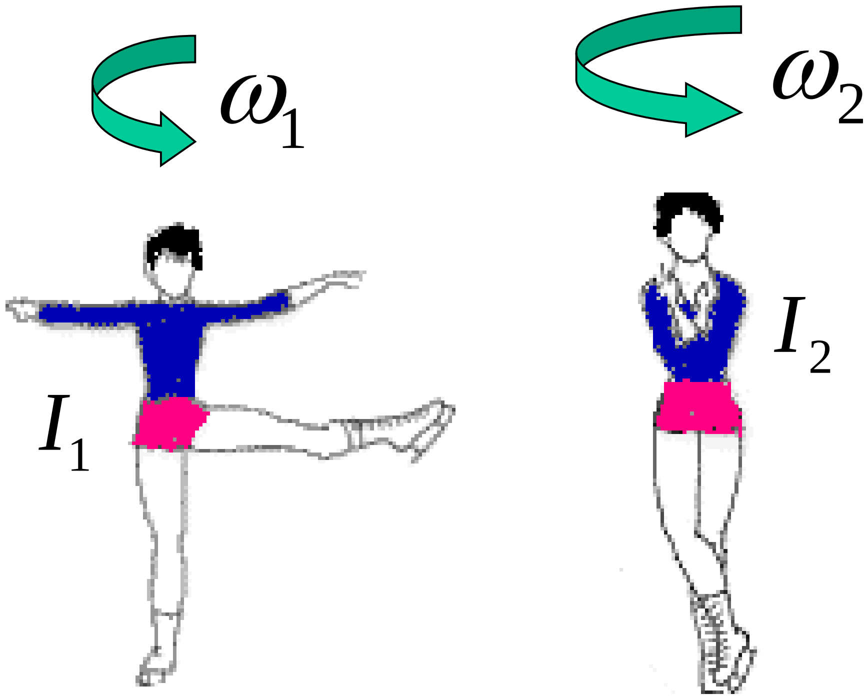
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \overrightarrow{const.}$$

konstant bleiben muß, selbst wenn das Trägheitsmoment *I* sich während der Bewegung verändert.

$\Rightarrow$ Pirouetteneffekt

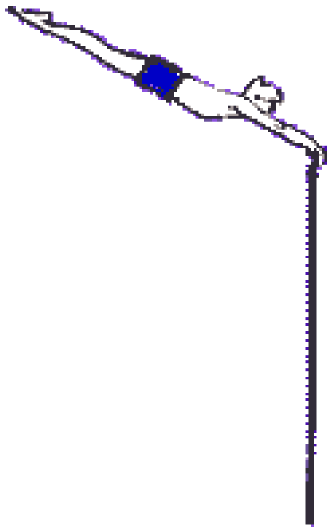
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$



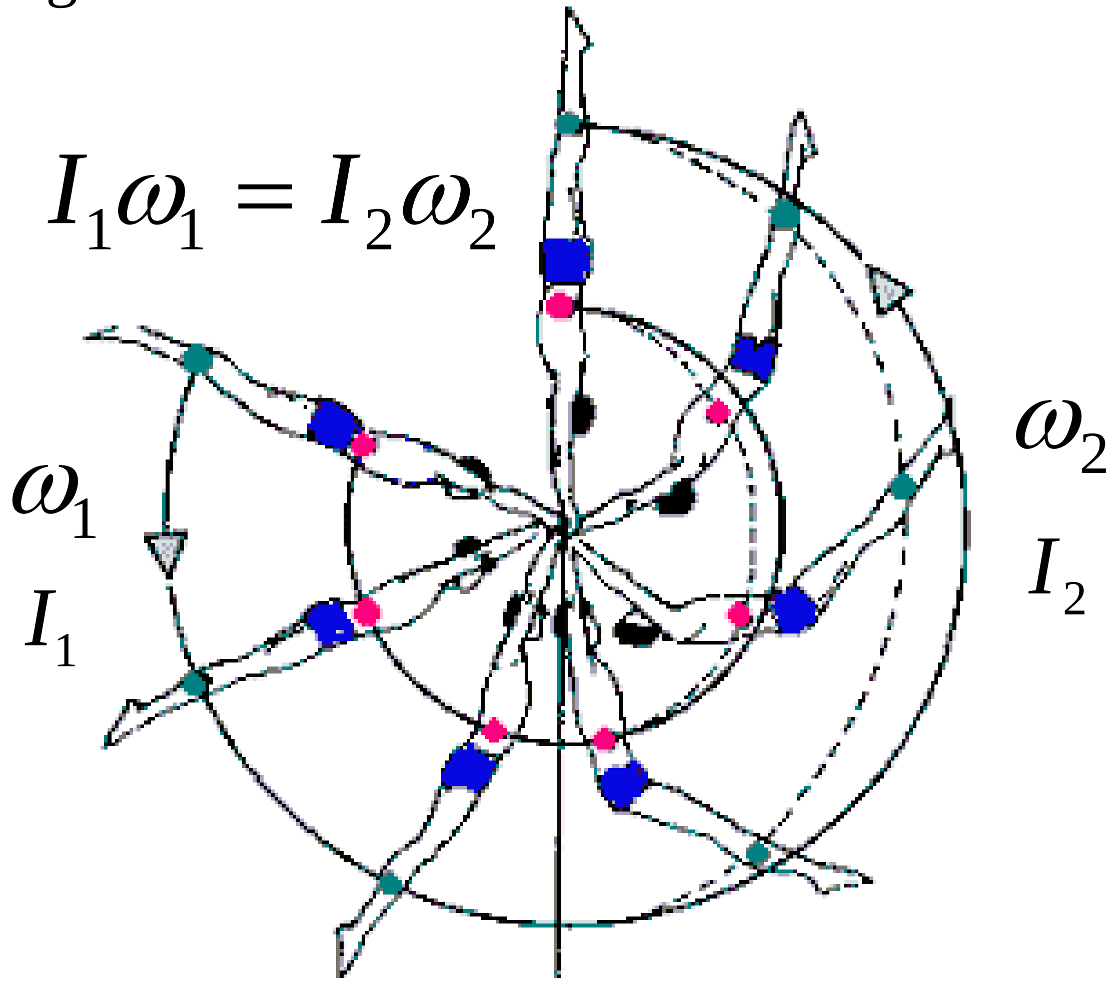


$$I_1 > I_2 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$$

Beispiel: Drehimpulserhaltung beim Turnen
„Schwungholen“ bei einer Riesenfelge:



$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

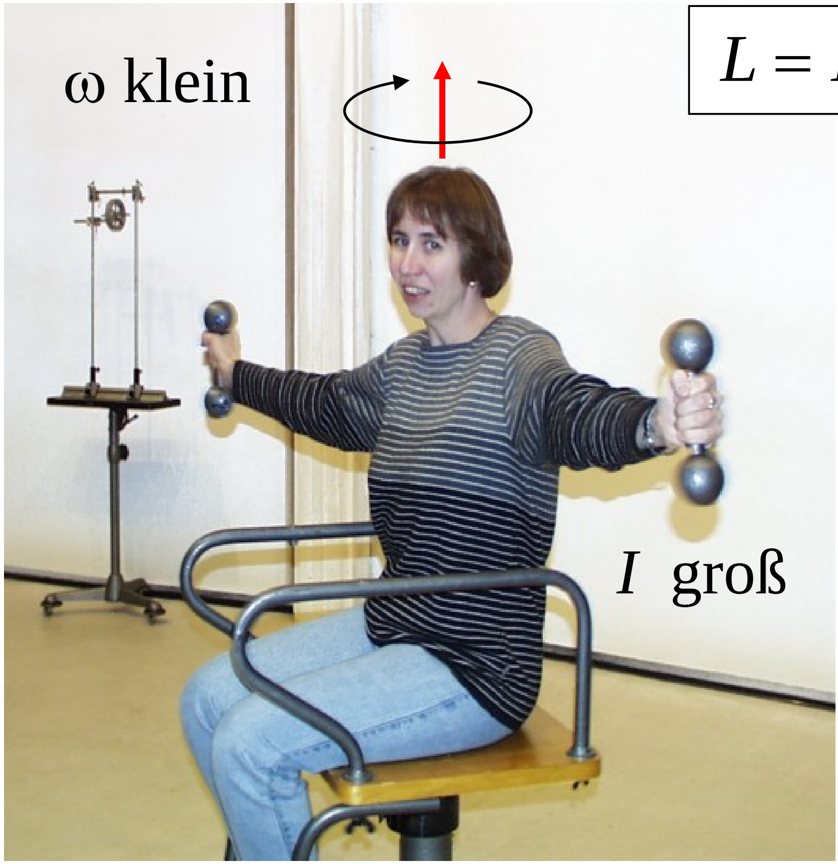


$$I_1 > I_2 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$$

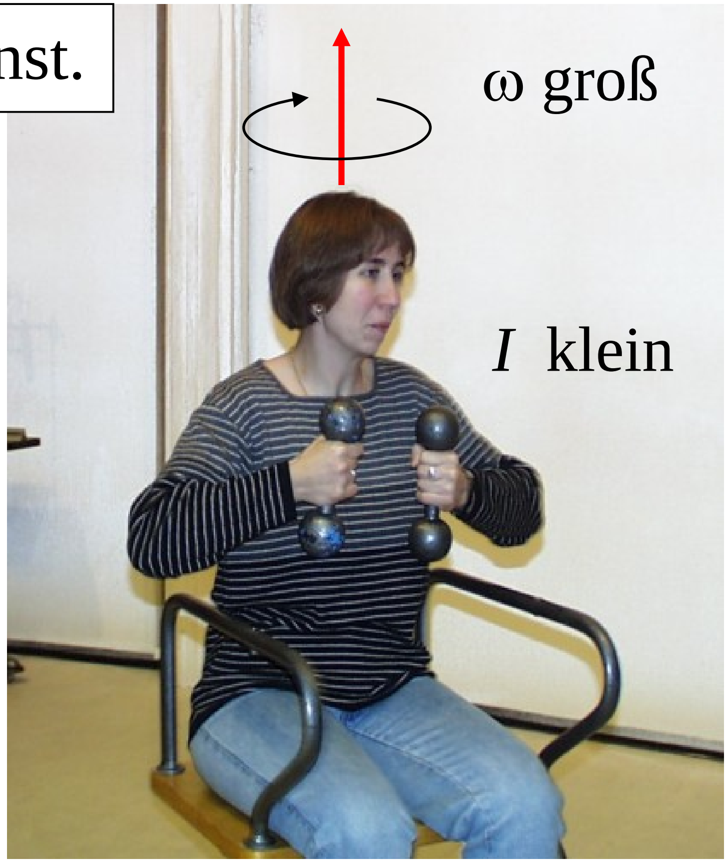
Beispiel: Der Salto

Versuch: Drehimpulserhaltung am Drehstuhl: „*Pirouetteneffekt*“

$$L = I \cdot \omega = \text{const.}$$



Eine Person mit ausgestreckten Hanteln wird in Drehbewegung versetzt. Das Trägheitsmoment ist relativ groß.



Die Hanteln werden dann an den Körper gezogen. Das Trägheits-moment verringert sich und die Rotationsfrequenz nimmt zu.

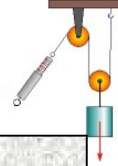
Vergleich: Translations- und Rotationsbewegung

Lineare Bewegung		Rotationsbewegung	
Ortskoordinate	x	Drehwinkel	φ
Masse	m	Trägheitsmoment	I
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \dot{v} = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Kraft	$\vec{F}$	Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
linearer Impuls	$p = m v$	Drehimpuls	$L = I \omega$
Translationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	Rotationsenergie	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$

Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$F = ma = m\ddot{x} \qquad M = I\alpha = I\ddot{\varphi}$$



Inhalt der Vorlesung A1

2. Teilchen

A. Einzelne Teilchen

Beschreibung von Teilchenbewegung

- Kinematik: Quantitative Erfassung
- Dynamik: Ursachen der Bewegung

Kräfte

Arbeit + Leistung, Energie

Erhaltungssätze: Energie+Impulserhaltung

Reibungskräfte

Schwingungen

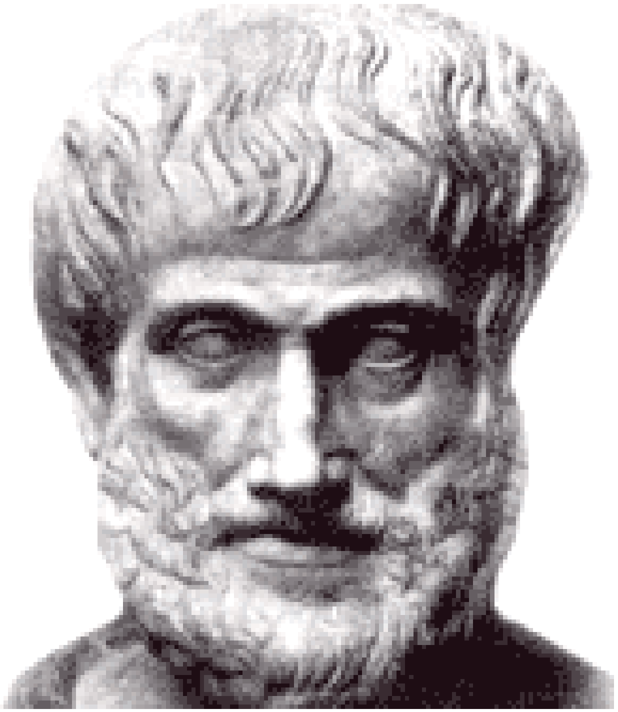
Rotationsbewegung: Drehimpuls+Drehmoment

Planetenbewegung

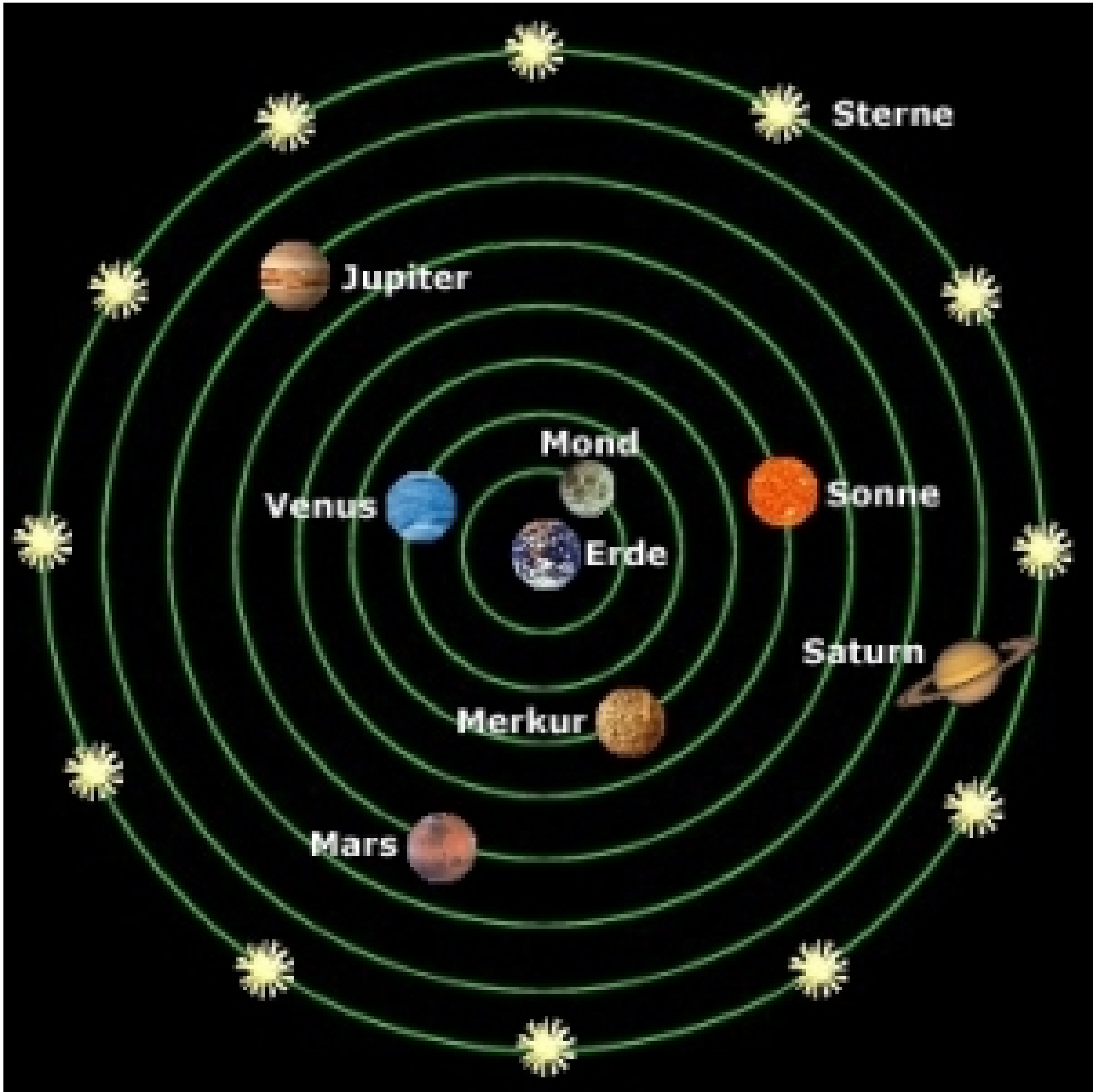
Die Planetenbewegung

Geozentrisches Weltbild

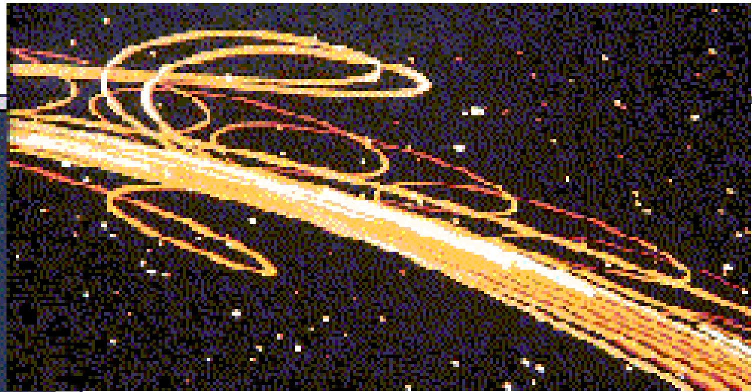
Historische Übersicht:

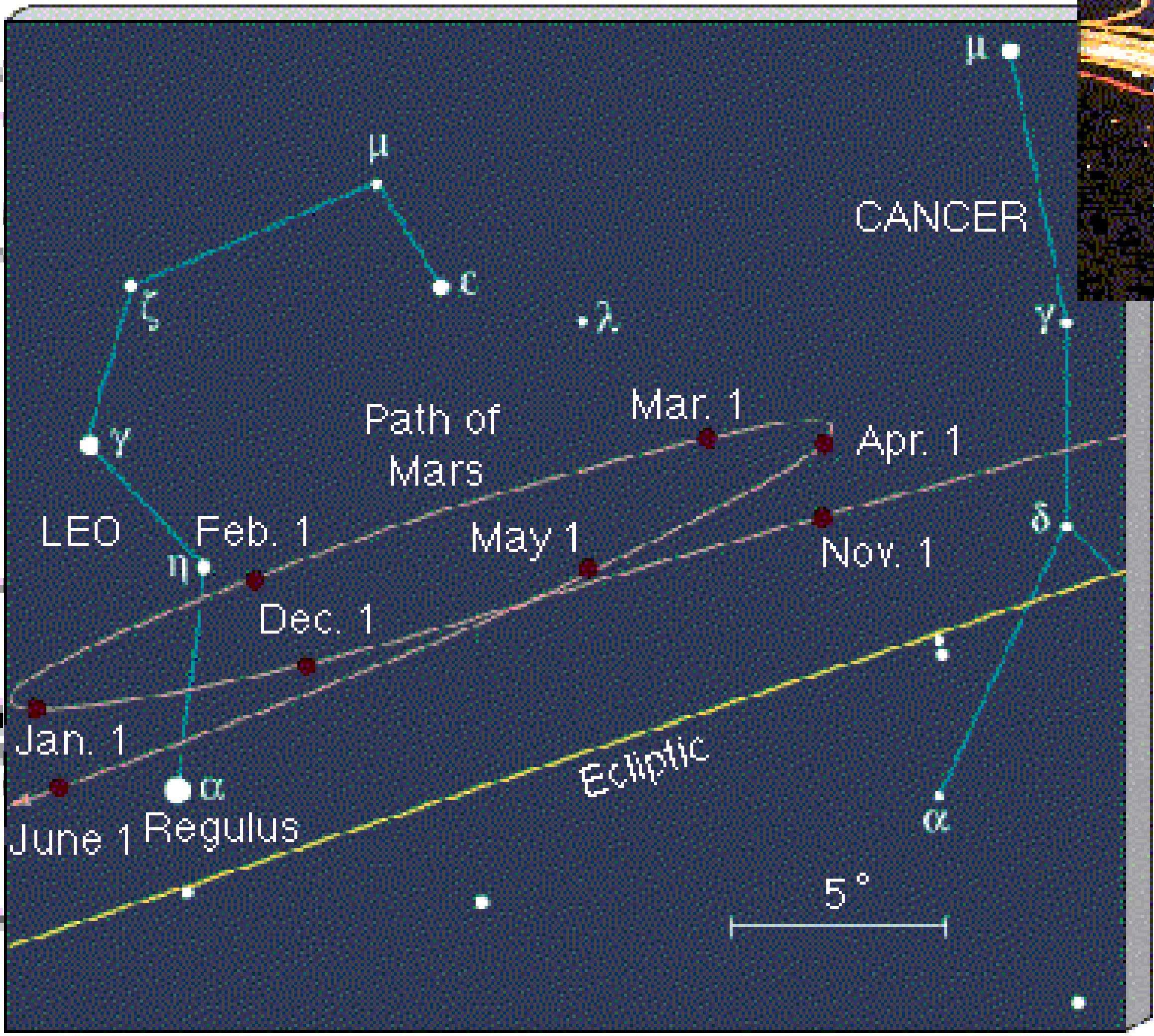


Aristoteles (384-322 v.Chr.)



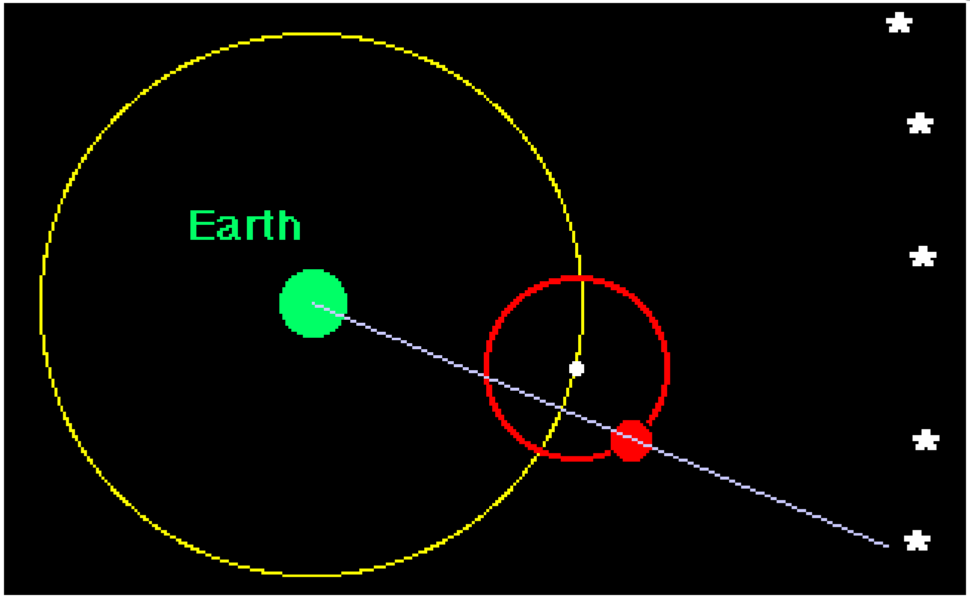
Problem: Planetenbahnen beschreiben am Himmel „Schleifen“!

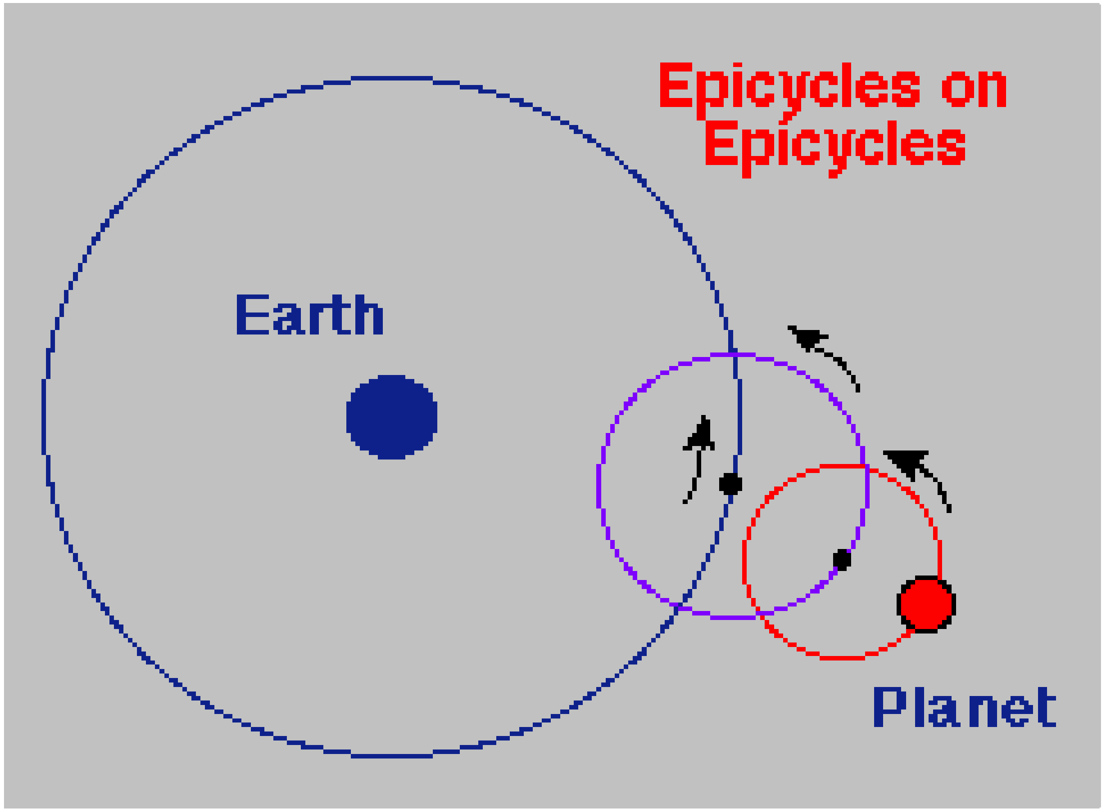


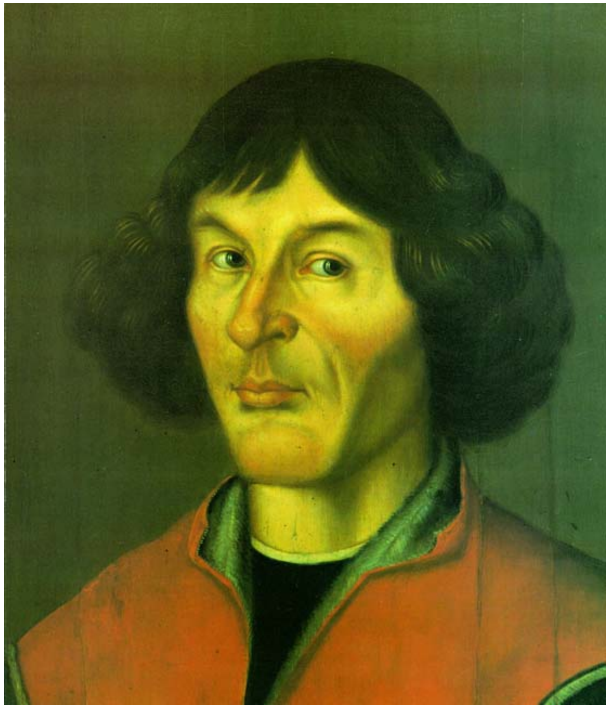


Claudius Ptolemäus
(ca. 100-178 n.Chr.)

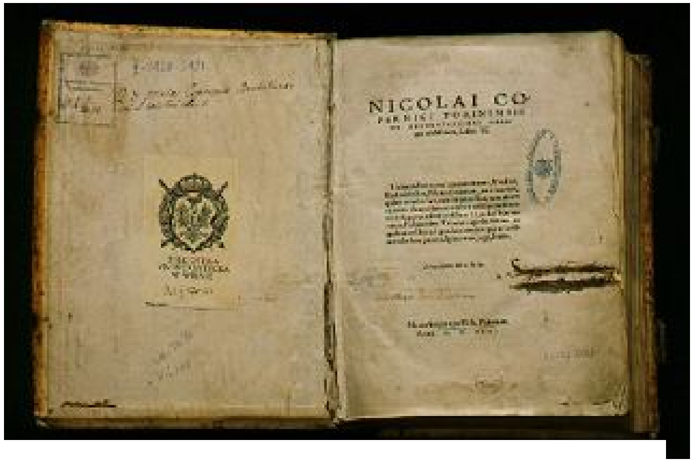
Almagest: „Epizykeltheorie“





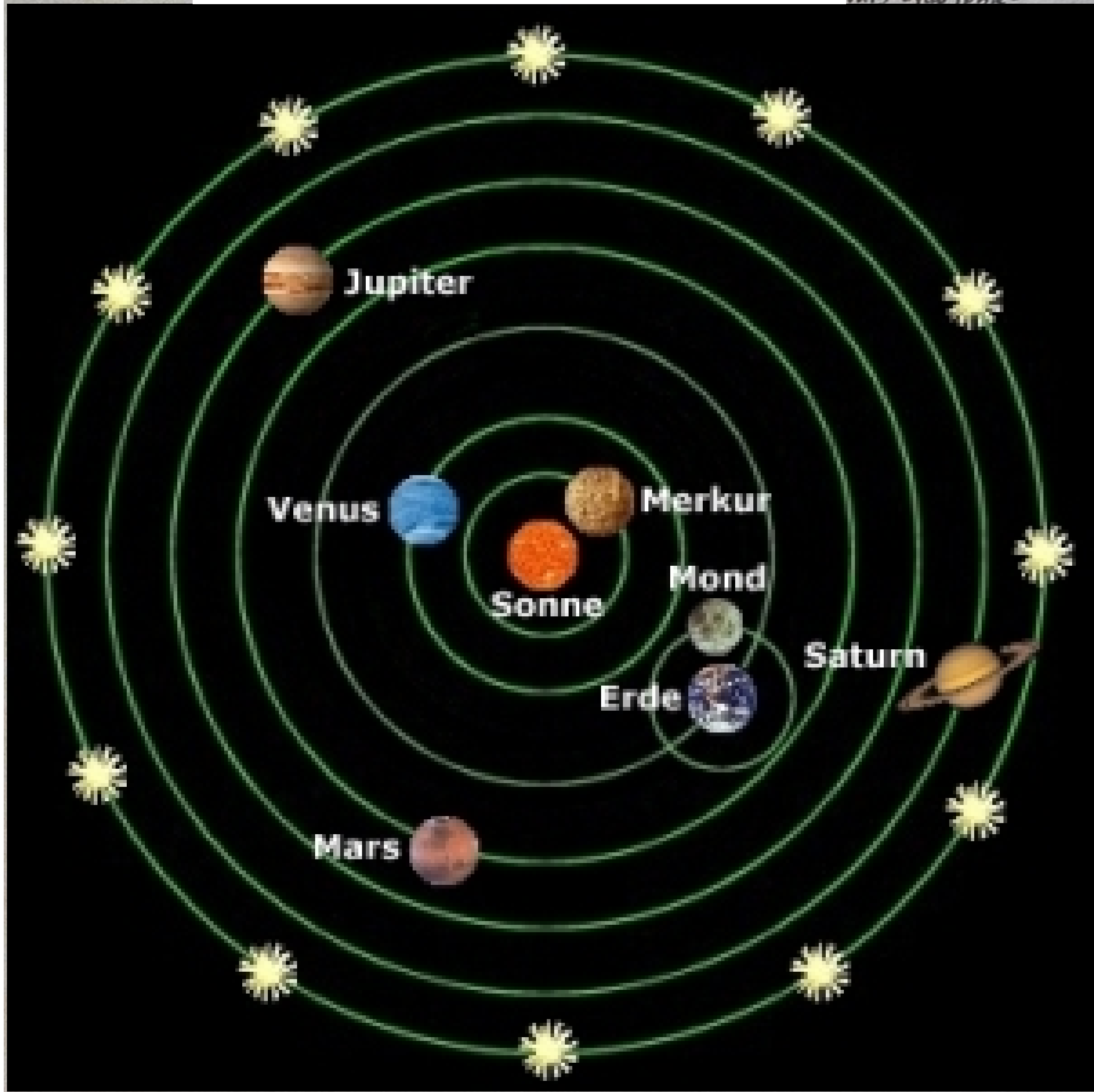


Nikolaus Kopernikus
(1473-1543)

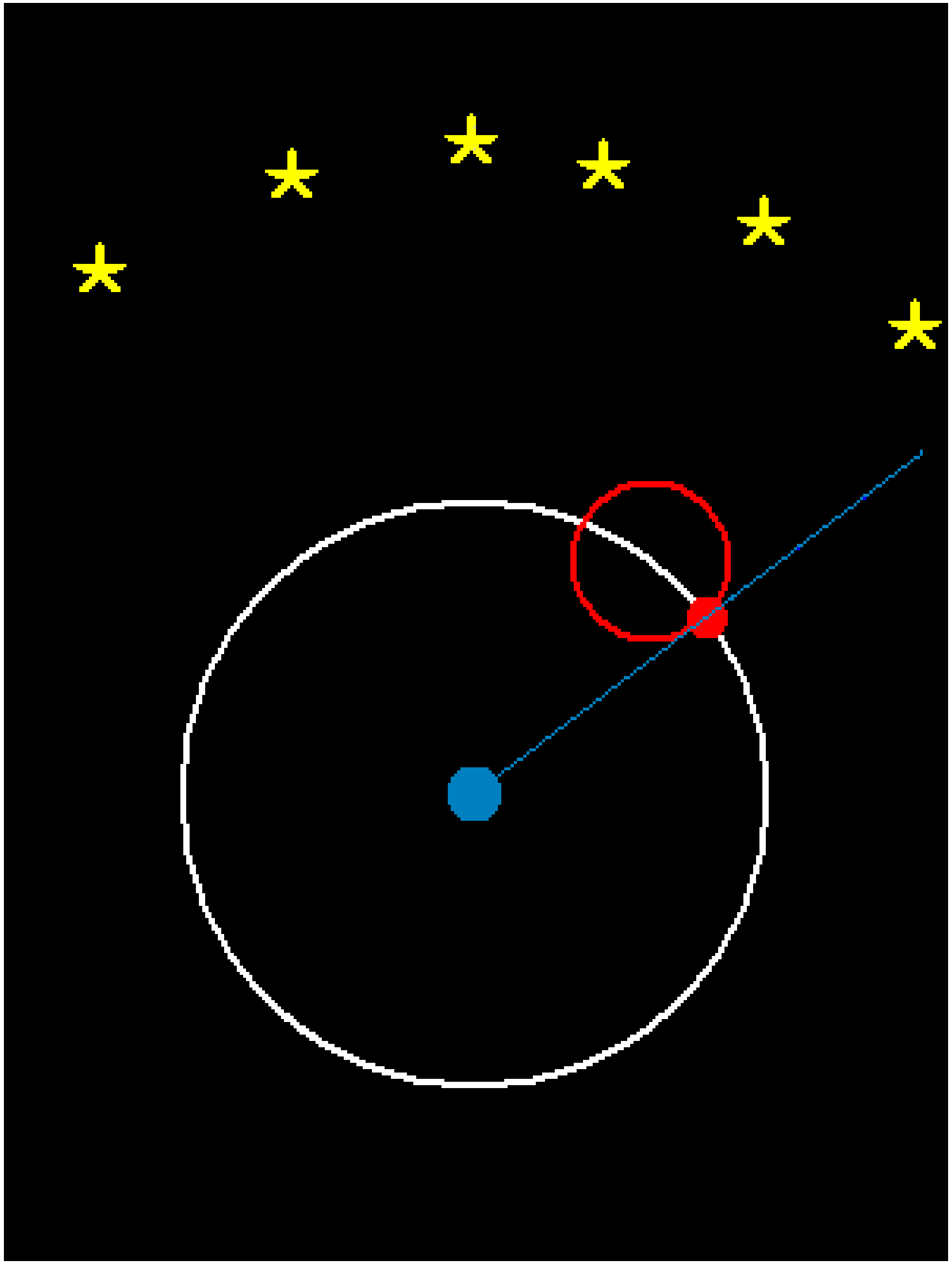


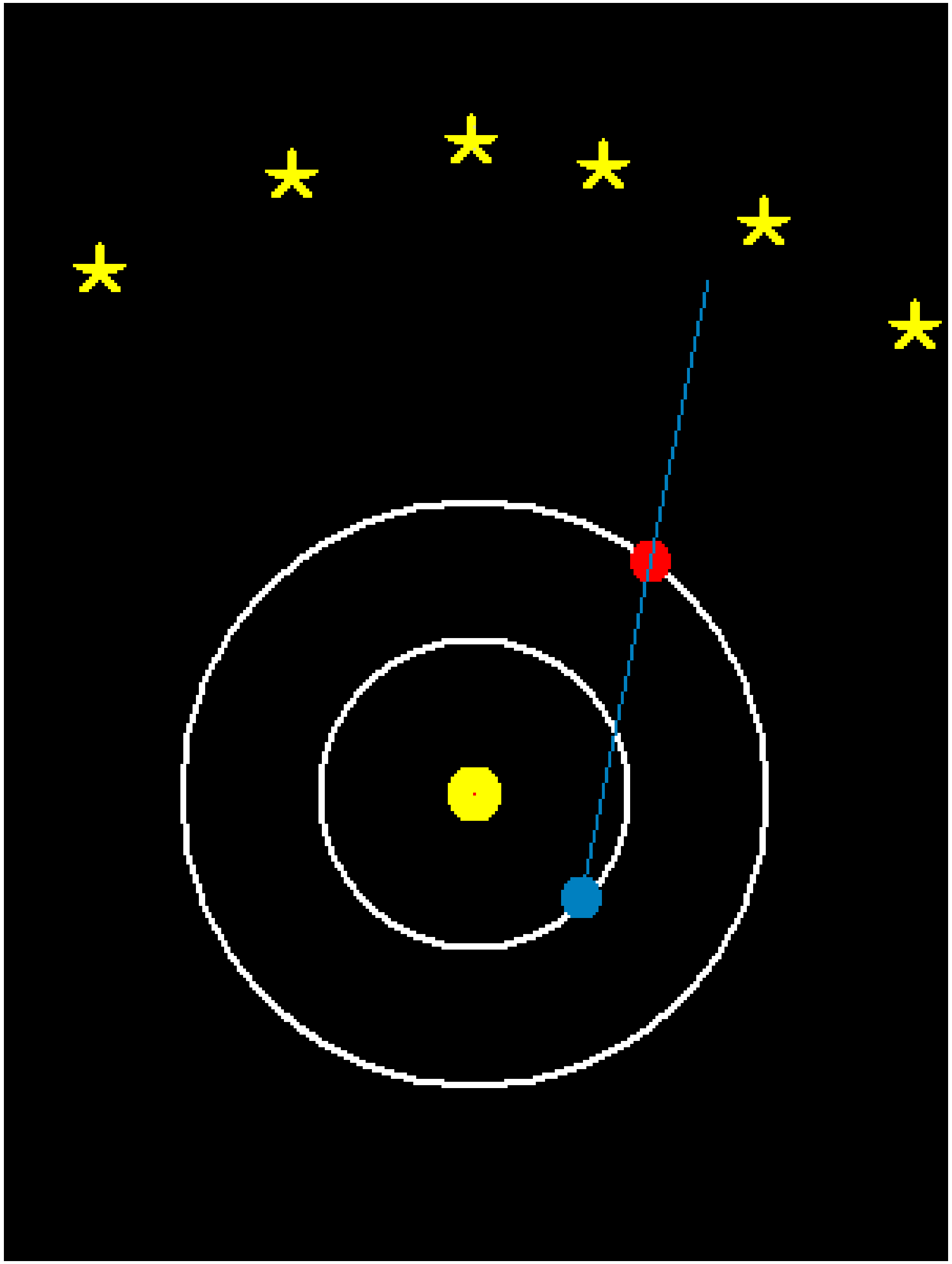
1543: De-Revolutionibus

Heliozentrisches Weltbild

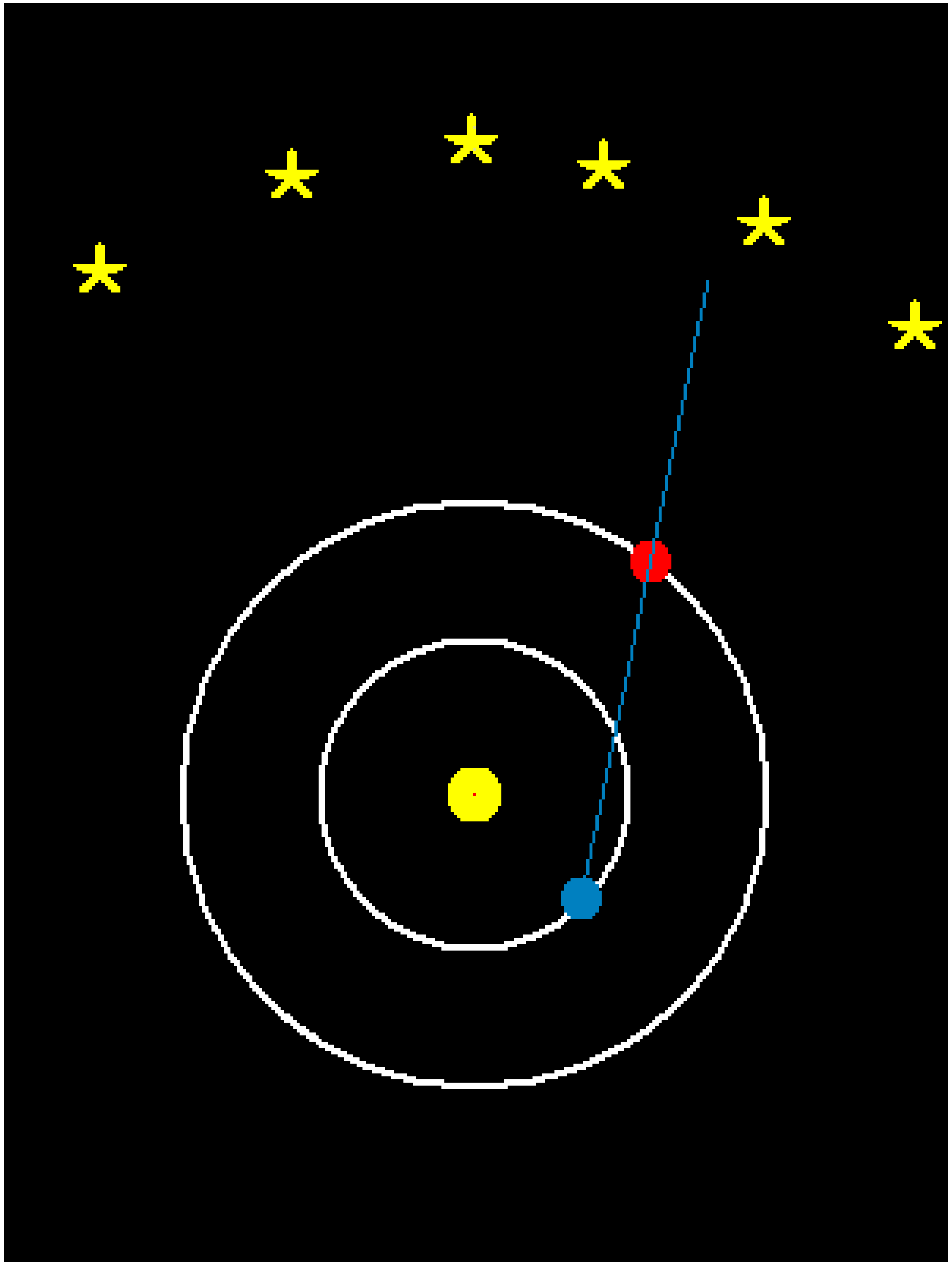


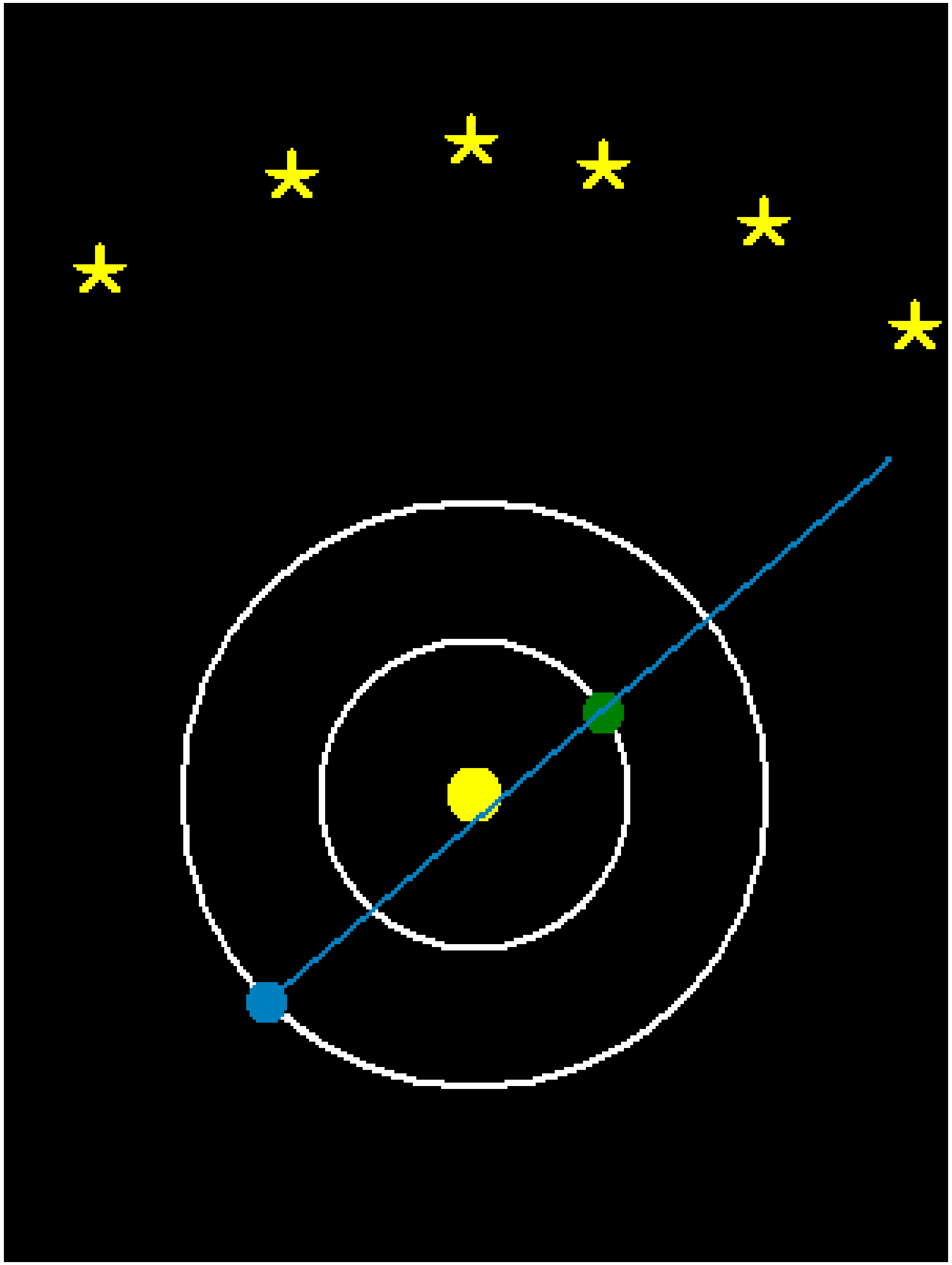
Äquivalenz der Ptolemäischen und Kopernikanischen Sichtweise

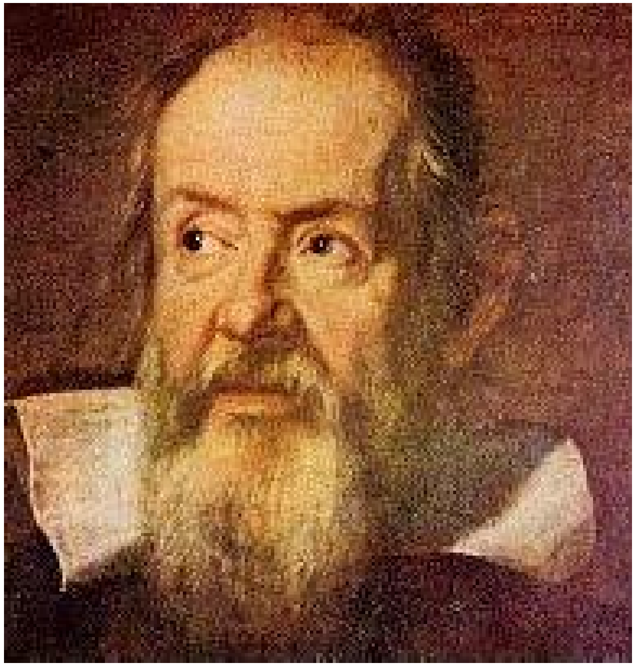




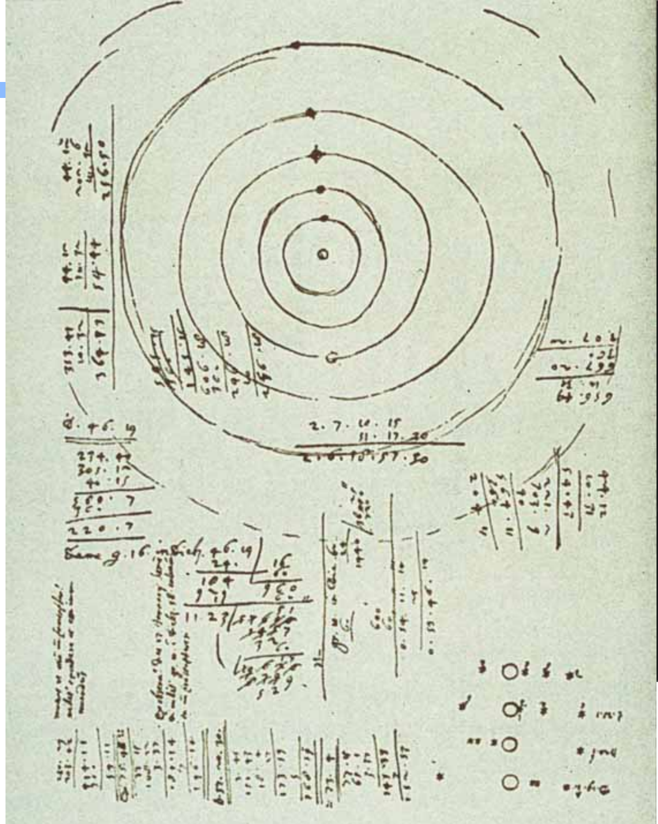
Unterschiedliche Schleifen von inneren und äußeren Planeten





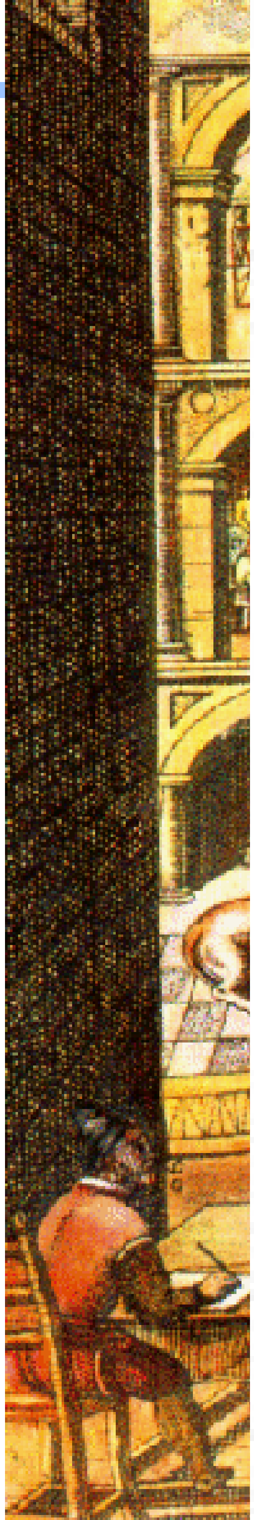


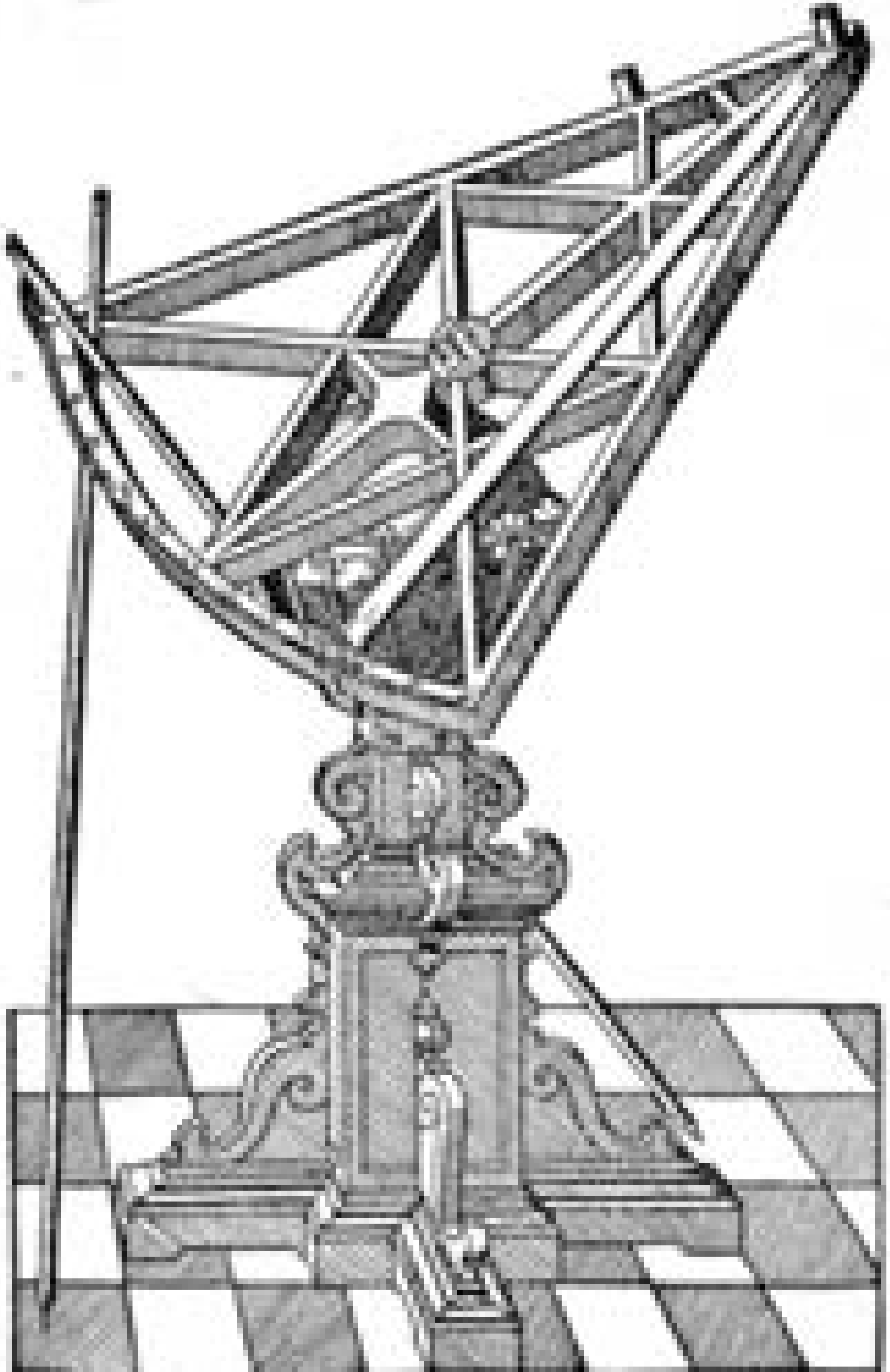
Galileo Galilei
(1564-1642)



1610:
Beobachtung
der
Jupitermonde

Tycho Brahe
(1564-1601)

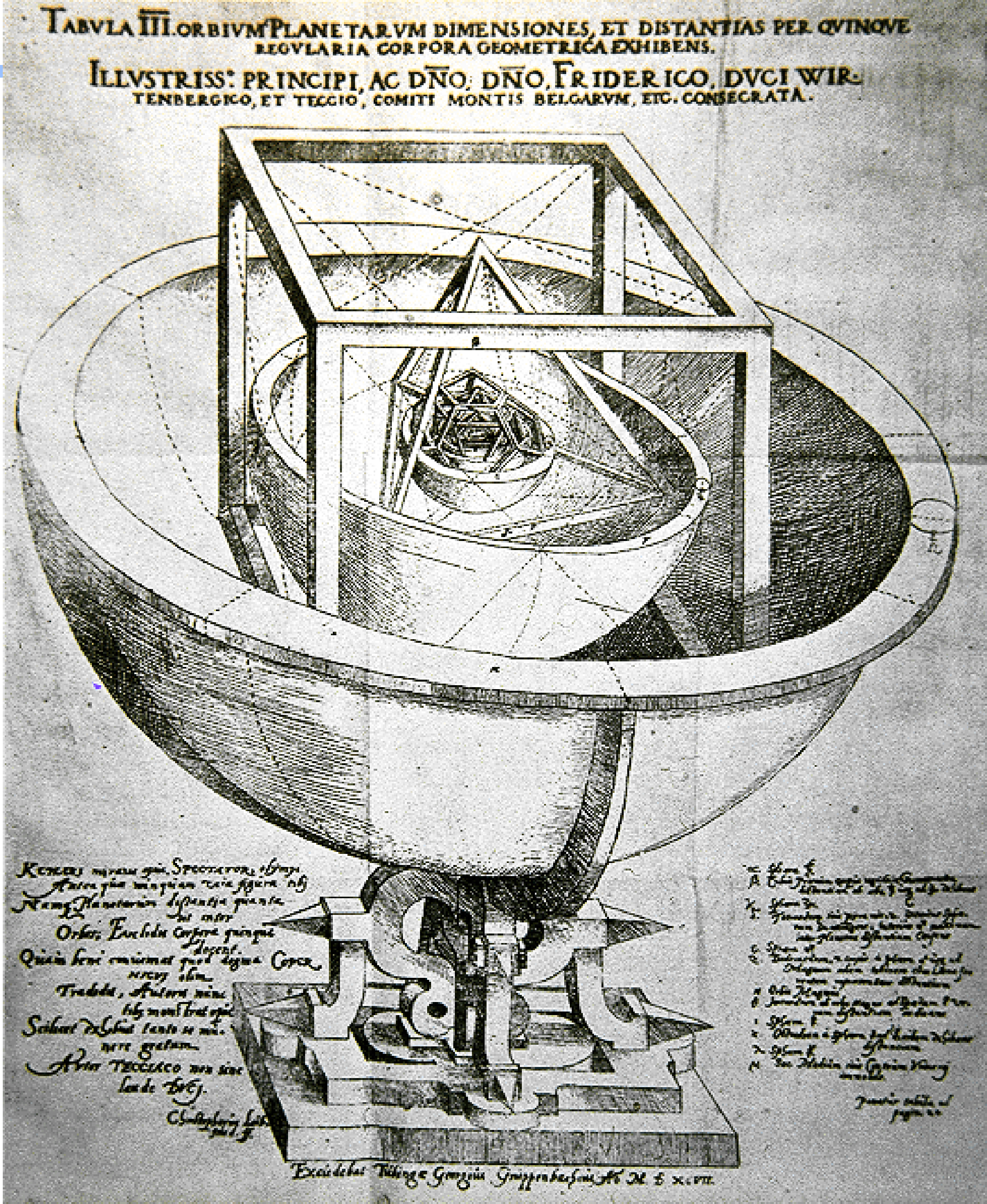




Er lieferte für seine Zeit extrem präzise Bestimmungen derPlanetenbahnen.

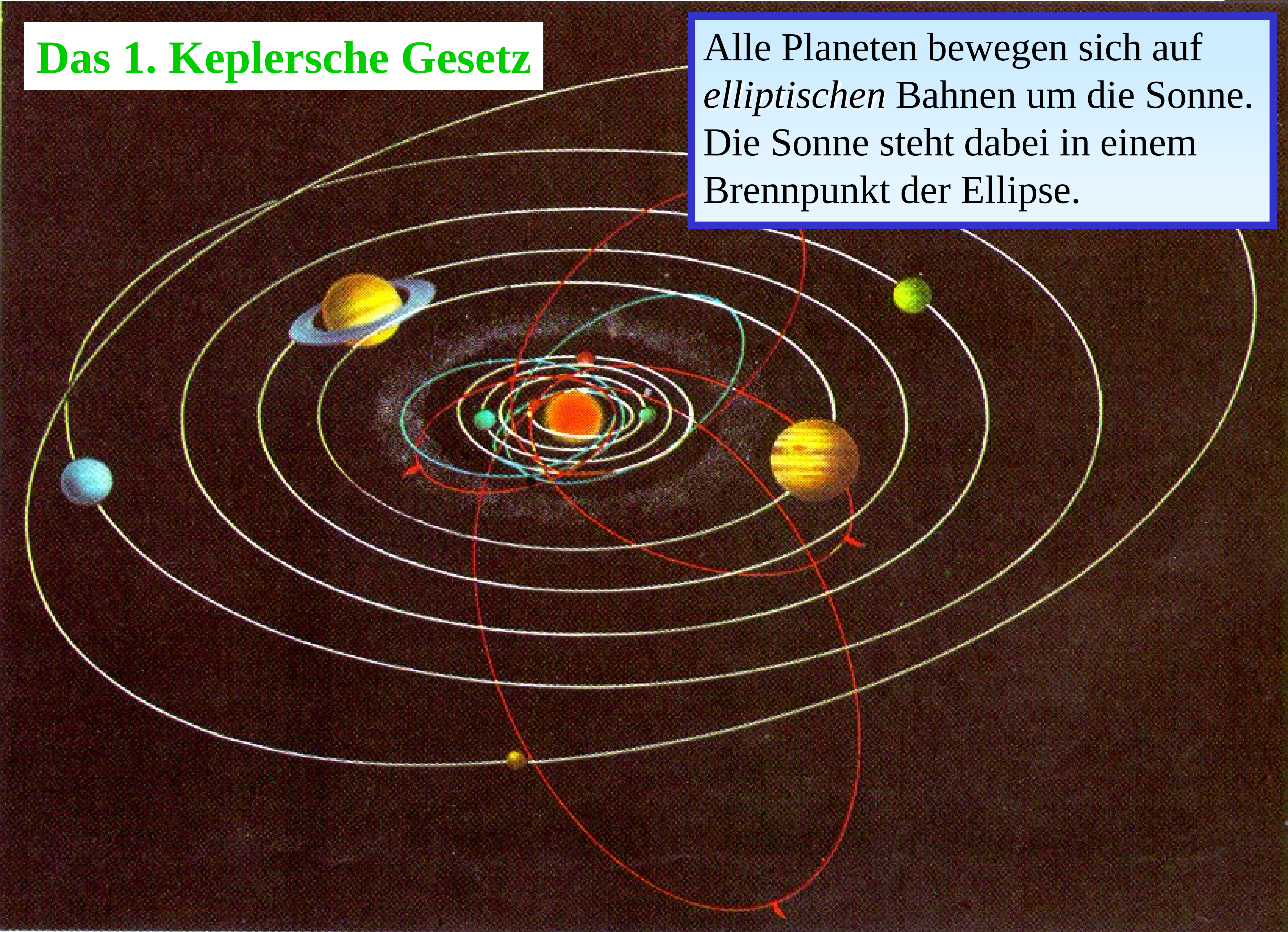
Johannes Kepler
(1571-1630)

Astronomica Nova (1609)
Harmonici Mundi (1619)



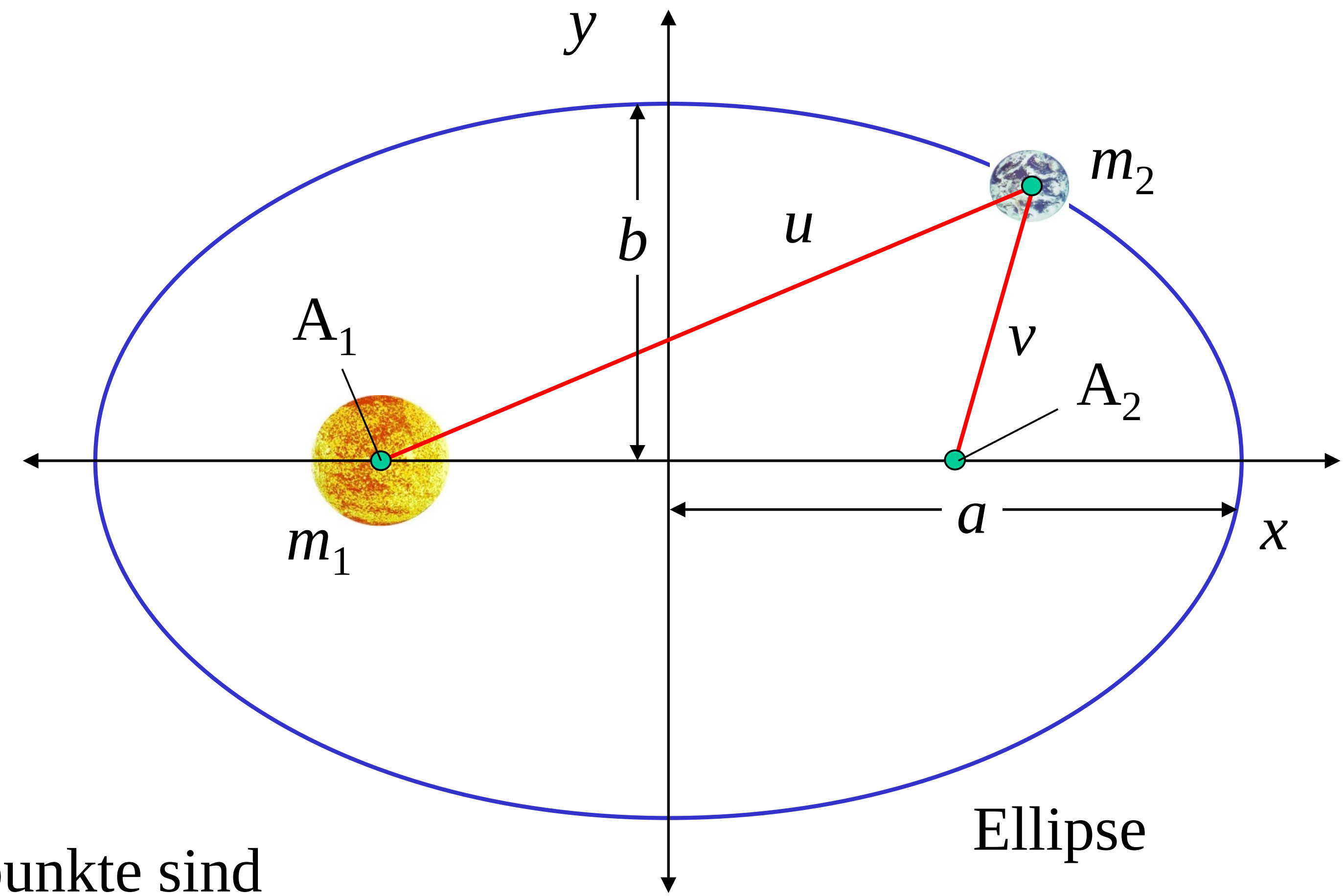
Das 1. Keplersche Gesetz

Alle Planeten bewegen sich auf *elliptischen* Bahnen um die Sonne. Die Sonne steht dabei in einem Brennpunkt der Ellipse.



Die Ellipse ist eine geschlossene Kurve der Beziehung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



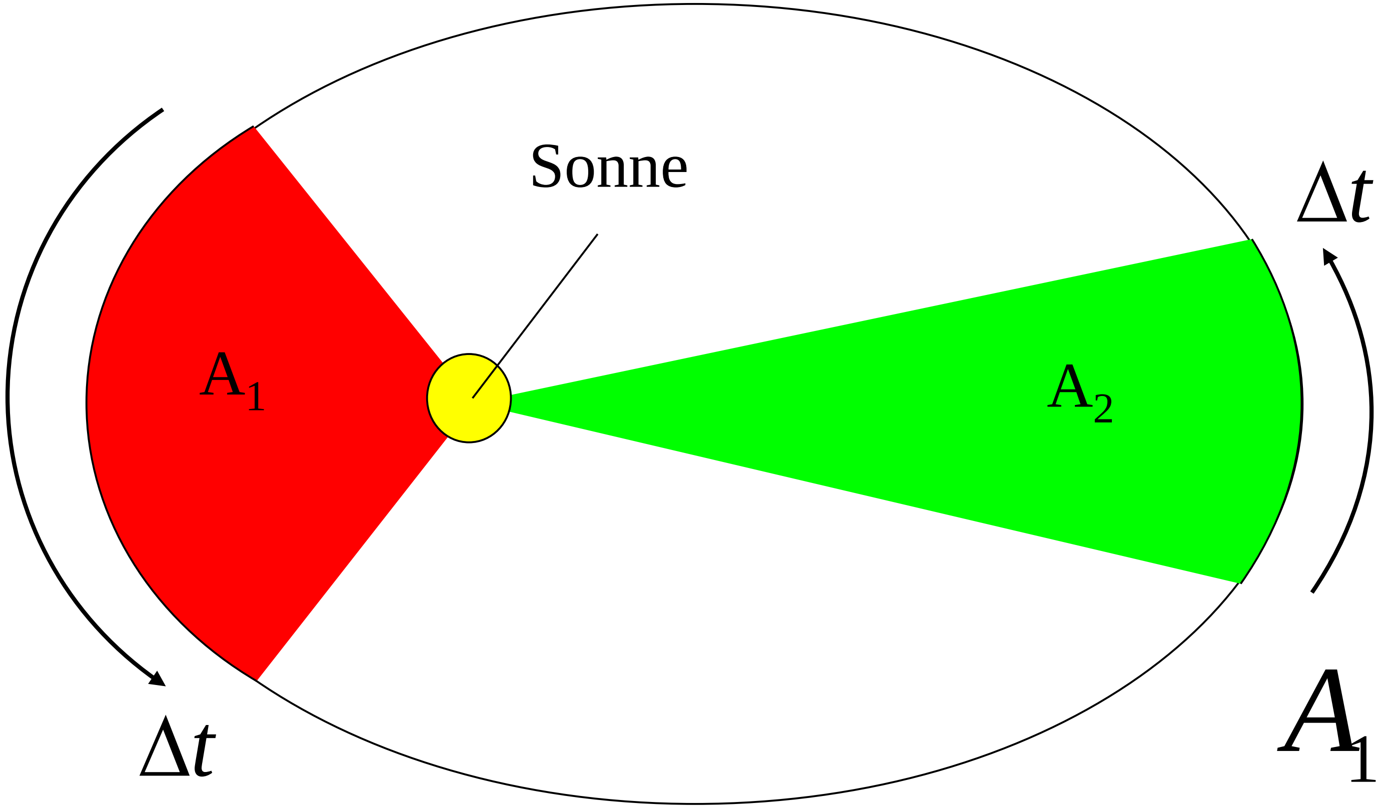
Im Grenzfall $a = b$ geht die Ellipse in einen Kreis über.

Die Brennpunkte sind A_1 und A_2.
Für die Verbindungslinien zu jedem Punkt der Ellipse gilt $u + v = \text{const.}$

Das 2. Keplersche Gesetz

Die Verbindungslinie zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

In der Nähe der Sonne läuft der Planet schneller und legt in der Zeit Δt eine größere Strecke zurück.

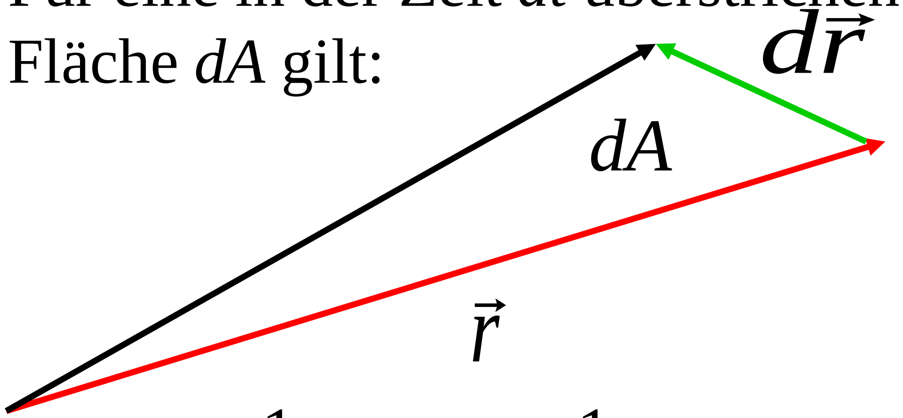


$$A_1 = A_2$$

Daher sind die in der Zeit Δt überstrichenen Flächen immer gleich, also

$$A_1 = A_2$$

Dieses Gesetz kann man so erklären: Für eine in der Zeit *dt* überstrichene Fläche *dA* gilt:



$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times d\vec{r}\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\times m\,d\vec{r}\right|$$

$$= \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\times m\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt$$

$$= \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\times m\,\vec{v}\right|dt$$

Es folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\times m\,\vec{v}\right|$$

Der Drehimpuls ist nun eine Konstante!

$\vec{L} = \vec{r}\times m\,\vec{v}$ konstant ist.

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right| = \text{const.}$$

Also:

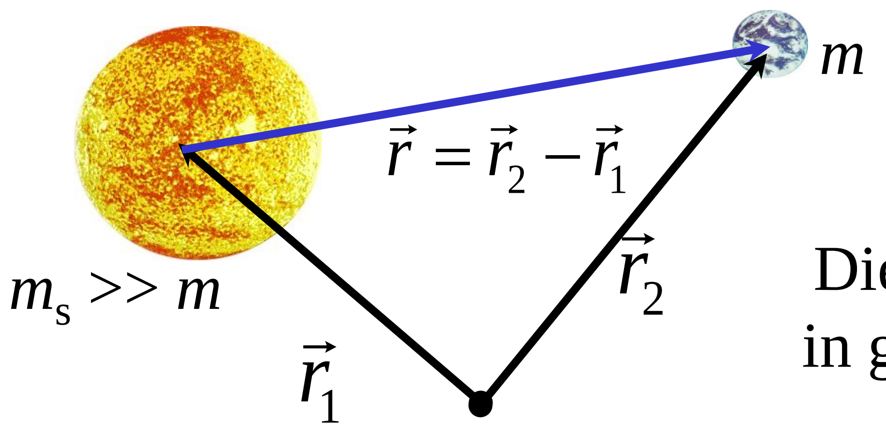
$$A(\Delta t) = \int_0^{\Delta t}\frac{dA}{dt}dt = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right|\Delta t$$

d.h. für gleiche Zeiten Δt werden gleiche Flächen $A(\Delta t)$ überstrichen!

Warum ist der Drehimpuls eine Konstante?

Weil die Gravitation eine sog. Zentralkraft ist, die auf ein Zentrum hin orientiert ist.

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m m_S}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$



$m_s >> m$

Die Sonne bewegt sich in guter Näherung nicht: $\vec{r}_1 \approx 0$

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m m_S}{\left|\vec{r}\right|^3} \vec{r} = f(r)\vec{r}$$

Dann gilt:

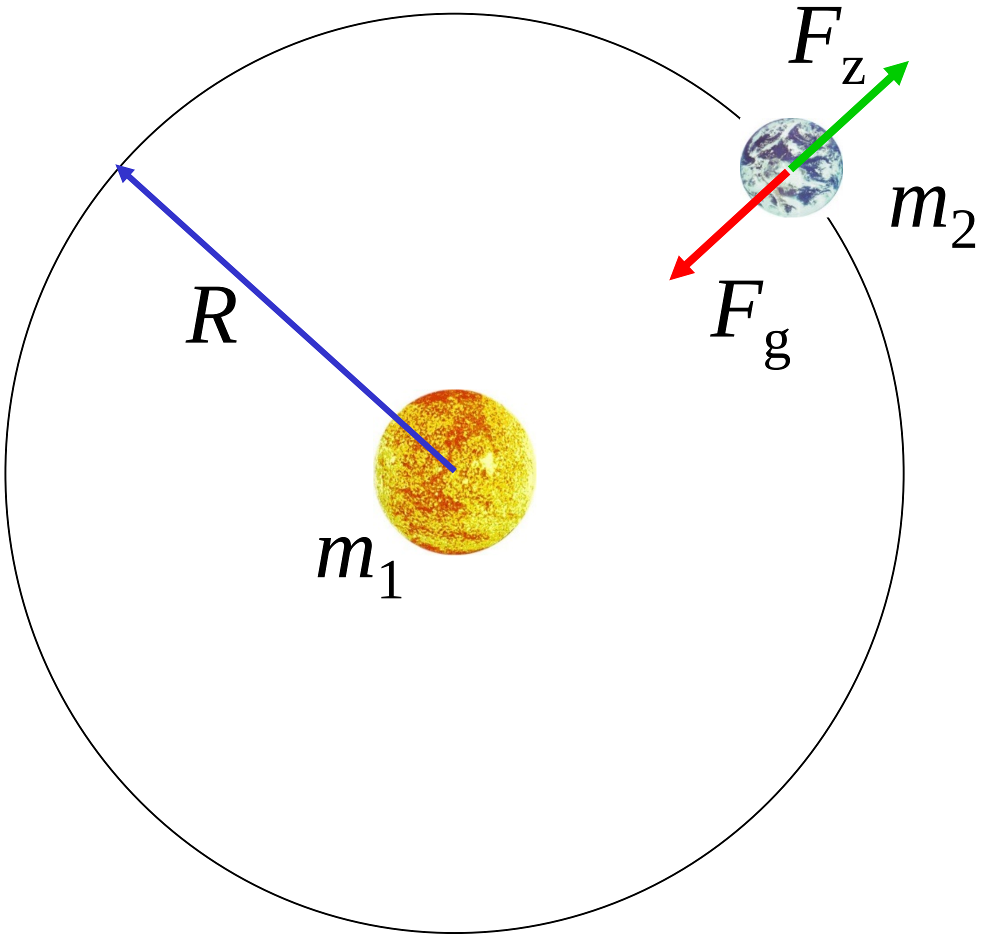
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \times f(r)\vec{r} = \vec{0}$$

In Zentralkraftfeldern bleibt der Drehimpuls also erhalten.

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ist $\vec{L} \perp \vec{r}$

In Zentralfeldern ist die Bewegung zweidimensional.
In allen Zentralfeldern gilt das 2. Kepler'sche Gesetz.

Das 3. Keplersche Gesetz



Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne.

Im Fall einer Kreisbewegung kann dieses Gesetz einfach gezeigt werden. Dabei wirken Gravitations- und Zentrifugalkraft (T = Umlaufdauer, $\omega = 2\pi/T$):

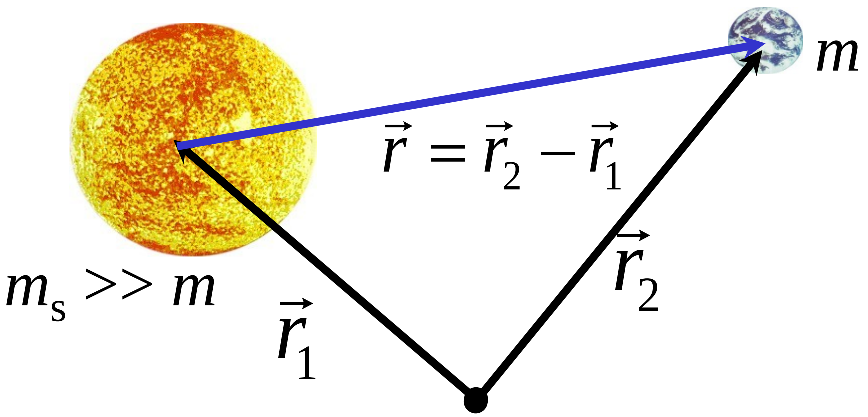
$$F_G = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad F_z = m_2 R \omega^2$$

$$\text{Wegen}: \; F_z = F_G \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} = m_2 R \frac{(2\pi)^2}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1} = const.$$

Berechnung der Planetenbahnen mit dem Newton‘schen Gravitationsgesetz:

Annahme: Nur ein Planet der Masse m bewegt sich um die Sonne, deren Masse m_s sehr viel größer ist $\Rightarrow$ Die Sonne bewegt sich nicht.

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_1 \approx const.$$



2. Newton - Axiom für die Masse m:

$$m\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = -\gamma \frac{m_s m}{|\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1|}$$

Lösung dieser (drei!) Gleichungen:

$\Rightarrow$ $\vec{r}_2(t)$ liegt in einer Ebene und beschreibt eine Ellipse, mit der Sonne in einem Brennpunkt! $\Rightarrow$ 1. Kepler - Gesetz!

Anmerkungen:

- Die anderen Planeten „stören“ die elliptischen Bahnkurven leicht.
- Es gibt auch andere mögliche Bahnen: Kreise, Hyperbeln oder Parabeln.
- Falls $m_s >> m$ nicht gilt, dann bewegen sich beide Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt.

Inwiefern ist es realistisch, dass Raumschiffe mit 1/4 der Mondmasse in die Nähe der Erde kommen können?

Gravitation :

Geostationärer Orbit $\Rightarrow r_{\mathrm{RS}} \approx 36000\ \mathrm{km}$

Abstand Erde - Mond $\Rightarrow r_{\mathrm{Mond}} \approx 360000\ \mathrm{km}$

$$\frac{F_{\mathrm{RS}}}{F_{\mathrm{Mond}}} = \frac{m_{\mathrm{RS}} / r_{\mathrm{RS}}^2}{m_{\mathrm{Mond}} / r_{\mathrm{Mond}}^2} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{10^2}{1} = 25!!$$

Weiterhin würden sich das Raumschiff und die Erde um ihren *gemeinsamen* Schwerpunkt bewegen und das System aus den drei Körpern Erde-Mond-Raumschiff wäre wahrscheinlich instabil !

Selbst wenn die „Aliens“ friedlich wären, würde allein die Existenz des Raumschiffes ausreichen, um die Erde zu vernichten !!!