Übungsblatt 7

Abgabe bearbeiteter Übungszettel bis Freitag, 24. November, 12 Uhr!

Aufgabe 1: Dispersionsrelation einer zwei-atomigen Kette

Gegeben sei eine unendlich lange Anordnung von alternierenden Massen M und m, welche in Ruhelage den gegenseitigen Abstand a haben. Jede Masse sei mit seinen beiden nächsten Nachbarn durch eine Kraftkonstante D_1 gekoppelt, für die Massen m sei die Kopplung mit den übernächsten Nachbarn D_2 und für die Massen M sei die Kopplung mit den übernächsten Nachbarn D_3. Die Massenpunkte lassen sich longitudinal auslenken, wobei die Auslenkung des Punktes s der Masse M durch die Koordinate v_s und für die Masse m durch u_s beschrieben wird.

(a) Fertigen Sie eine Skizze der linearen Kette mit ihren Kopplungen an!
(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Dispersionsrelation $\omega(q)$ der Phononen für die gegebene Anordnung!
(c) Betrachten Sie den Fall $m = M$ und $D_2 = D_3 \neq 0$ und skizzieren Sie die Dispersionsrelation!

Aufgabe 2: Phononen-Zustandsdichte

Um zum einen die Endlichkeit des Kristalls, d.h. die endliche Gesamtzahl N der Atome, und zum anderen volle Translationsinvarianz mathematisch zu realisieren, benutzt man in der Regel periodische Randbedingungen. Dies bedeutet für ein System mit Abmessung L_Ω in Ω-Richtung, dass alle für das System physikalisch relevanten Funktionen die Randbedingung $f(\dots, x_\Omega, \dots) = f(\dots, x_\Omega + L_\Omega, \dots)$ erfüllen müssen. In der Festkörperphysik werden die interessierenden Funktionen (z.B. die Auslenkungen) vom Elementarzellenindex n bzw. dem zugehörigen Gittervektor $\boldsymbol{R}_n$ abhängen. Beschreibt man diesen bezüglich einer Basis $\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_\delta$ von primitiven Translationen, und sei $N_\Omega a_\Omega$ die Länge des gesamten Kristalls in Ω-Richtung, dann gilt bei periodischen Randbedingungen: $f(\boldsymbol{R}_n) = f(\boldsymbol{R}_n + N_\Omega \boldsymbol{a}_\Omega)$ mit $\Omega = 1 \dots \delta$. Damit folgt für den Wellenvektor: $\boldsymbol{q} = \sum_{\Omega=1}^{\delta} \frac{l_\Omega}{N_\Omega} \boldsymbol{b}_\Omega$, mit einer ganzen Zahl l und reziprokem Gittervektor $\boldsymbol{b}$.

Bestimmen Sie nach dem Debye-Modell, welches von einer linearen Phononen-Dispersionsrelation $\omega = c_s q$ mit Schallgeschwindigkeit c_s ausgeht, die Zustandsdichte der Phononen

(a) für eine Kette der Länge L und
(b) für einen quadratischen Kristall der Seitenlänge L!

Mit Zustandsdichte wird die Anzahl der Zustände (hier: Schwingungsmoden) pro Volumen im Frequenzintervall $[\omega, \omega + d\omega]$ bezeichnet.

Aufgabe 3: Impuls von Phononen

Zeigen Sie, dass Phononen keinen physikalischen Impuls besitzen! Benutzen Sie zur Berechnung des Impulses: $p = M \frac{d}{dt} \sum_n u_n$, M sei die Masse und u die Auslenkung eines Atoms. Welches q entspricht einer gleichförmigen Translation des Kristalls als Ganzes?