Übungsblatt 12

Abgabe bearbeiteter Übungszettel bis Freitag, 12. Januar, 12 Uhr!

Aufgabe 1: Wärmekapazität von Kupfer

a) Berechnen Sie für Kupfer im Modell der freien Elektronen den elektronischen Beitrag $c_{\mathrm{V,el}}$ zur spezifischen Wärmekapazität bei $T = 300\ \mathrm{K}$!

b) Schätzen Sie den phononischen Beitrag der spezifischen Wärmekapazität bei dieser Temperatur ab!

c) Bei welcher Temperatur stimmen beide Wärmekapazitäten überein?

d) Bestimmen Sie die Sommerfeld-Konstante $\gamma = c_{\mathrm{V,el}}/T$ und vergleichen Sie diese mit dem experimentell ermittelten Wert $\gamma_{\mathrm{exp}} = 97{,}53\ \mathrm{Jm^{-3}K^{-2}}$! Finden Sie eine Erklärung für die Diskrepanz zwischen den Werten!

Aufgabe 2: Elektronengas in harmonischer Potentialfalle

Betrachten Sie ein nahezu freies Elektronengas in drei Dimensionen, das in einer isotropen Potentialfalle $V(\boldsymbol{r}) = 1/2\, m\omega_{\mathrm{f}}^2 \boldsymbol{r}^2$ eingeschlossen ist. Die Zahl der Elektronen ist $N \gg 1$, ihr Spin wird vernachlässigt. Beachten Sie, dass die Teilchenzustände nicht mehr durch den Impuls charakterisiert werden. Nun sind sie harmonische Oszillatorzustände ($d = 3$) und werden durch die diskreten Quantenzahlen n_x, n_y und n_z beschrieben. Die Summen über diese Quantenzahlen können durch Integrale ersetzt werden, da $N \gg 1$ gilt. Die Nullpunktsenergie sei vernachlässigbar, diese führt letztlich nur zu einer Verschiebung des Nullpunkts des chemischen Potentials.

a) Berechnen Sie die Fermi-Energie als Funktion von ω_{f} und N!

b) Bestimmen Sie die Zustandsdichte!

c) Berechnen Sie das chemische Potential als Funktion der Temperatur, bis zu einer nichttrivialen Ordnung von T!

d) Bestimmen Sie die gesamte Energie des Systems $E(T, N)$!

e) Bestimmen Sie die gesamte Wärmekapazität $C(T, N)$, d.h. nicht die Wärmekapazität pro Einheitsvolumen!

Aufgabe 3: Landau-Diamagnetismus

Der Hamilton-Operator für ein Elektron im Magnetfeld hat die Form $H = 1/2m\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2$, unter Vernachlässigung des Elektronspins.

Das Magnetfeld sei in z-Richtung orientiert, d.h. $\boldsymbol{B} = (0,0,B)$. Das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ sei in der Landau-Eichung über $\boldsymbol{A} = (-By, 0{,}0)$ gegeben.

a) Schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung auf und leiten Sie eine Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ her unter Verwendung der Elektronwellenfunktion $\psi = \chi(y) \exp\left[i(p_x x + p_z z)/\hbar\right]$!
b) Die Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ sollte die Form der Schrödinger-Gleichung für einen linearen harmonischen Oszillator haben. Bestimmen Sie das Zentrum y_0 der Schwingung sowie die Eigenfrequenz und -niveaus des Oszillators!
c) Bestimmen Sie die Energieniveaus des Elektrons in dem homogenen Magnetfeld! Finden Sie den Entartungsgrad der Energieniveaus!
d) Bestimmen Sie für ein ideales Elektronengas in dem homogenen Magnetfeld das großkanonische Potential!

Bonusaufgabe: Matthiessen-Regel

Nehmen Sie an, dass ein Metall N unterschiedliche Verunreinigungen mit Konzentrationen n_i und Transportzeiten $\tau_i(E)$ enthält, $i = 1,2, \dots N$.

a) Zeigen Sie, dass der Widerstand $\rho = \sum_i \rho_i = \sum_i 1/\sigma_i$ der Matthiessen-Regel bei $T = 0$ genügt!
b) Zeigen Sie, dass die Matthiessen-Regel nicht im Allgemeinen für endliche Temperaturen gilt, außer, wenn alle τ_i energie-unabhängig sind!