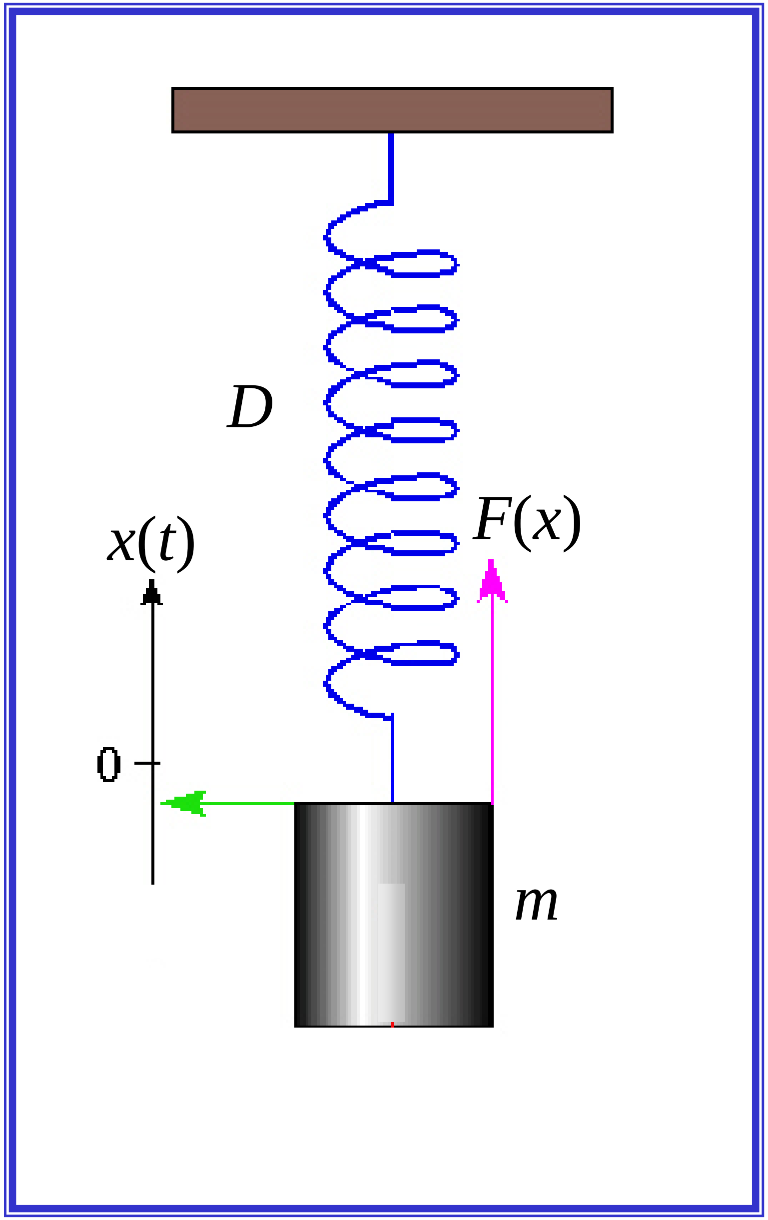
7. Einfache Differentialgleichungen



(i) Harmonischer Oszillator

Beim Federpendel ist die rücktreibende Kraft:

$$F(x) = -Dx$$

Das zweite Newton'sche Gesetz liefert die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx(t) \Leftrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{D}{m}x(t) = 0$$

bzw. kürzer geschrieben:

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Mit der Definition $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

folgt die Bewegungsgleichung einer Masse *m*, die an einer Feder mit der Federkonstanten *D* hängt, zu:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0}$$

Bei dieser Gleichung wurde die Wirkung der Gravitation vernachlässigt. Gesucht ist jetzt die zeitabhängige Funktion

$$x = x(t)$$

die die „Differentialgleichung“ löst.

Diese Gleichung kann nicht durch einfache Integration gelöst werden.

Eine Möglichkeit der Lösung ist *„gezieltes, kluges Raten“* und Überprüfung der geratenen Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

enthält die gesuchte Funktion $x(t)$ und ihre zweite Ableitung. Es handelt sich also um eine Funktion, deren zweite Ableitung ähnlich ist mit der Funktion selbst.

Lösungsansatz: $x(t) = Ae^{\Omega t}$

$$\dot{x}(t) = \Omega A e^{\Omega t}, \quad \ddot{x}(t) = \Omega^2 A e^{\Omega t}$$

Einsetzen in die Differential-Gleichung ergibt:

$$\Omega^2 A e^{\Omega t} + \omega^2 A e^{\Omega t} = 0$$

$$\left(\Omega^2 + \omega^2\right) A e^{\Omega t} = 0 \Rightarrow \Omega^2 + \omega^2 = 0$$

Daraus folgt sofort die Lösung:

$$\Omega_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\,\omega$$

Es gibt daher zwei Lösungen:

$$x_1(t) = A_1 e^{+i\omega t}$$

$$x_2(t) = A_2 e^{-i\omega t}$$

Damit ist die allgemeine Lösung:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$= A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

Die Konstanten A_1 und A_2 werden durch die *Anfangsbedingungen* bestimmt: $t = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = x_0$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$$

Für die Geschwindigkeit gilt jetzt:

$$\dot{x}(t) = i\omega A_1 e^{+i\omega t}$$
$$-i\omega A_2 e^{-i\omega t}$$

Dann ergeben die Anfangsbedingungen:

$$x_0 = A_1 + A_2$$

$$v_0 = \dot{x}_0 = i\,\omega A_1 - i\,\omega A_2$$

Also ist:

$$A_2 = x_0 - A_1$$

$$v_0 = i\omega A_1 - i\omega\left(x_0 - A_1\right)$$

$$= 2\,i\,\omega\,A_1 - i\,\omega\,x_0$$

Aufgelöst nach A_1 ergibt sich

$$A_1 = \frac{v_0 + i\omega x_0}{2i\omega} = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)$$

und

$$A_2 = x_0 - \frac{x_0}{2} + i\frac{v_0}{2\omega} = \frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)$$

Es ist also :

$$A_1 = A_2^* \quad \text{(konjugiert komplex)}$$

Mit der Euler-Formel:

$$e^{+i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$$

ergibt sich:

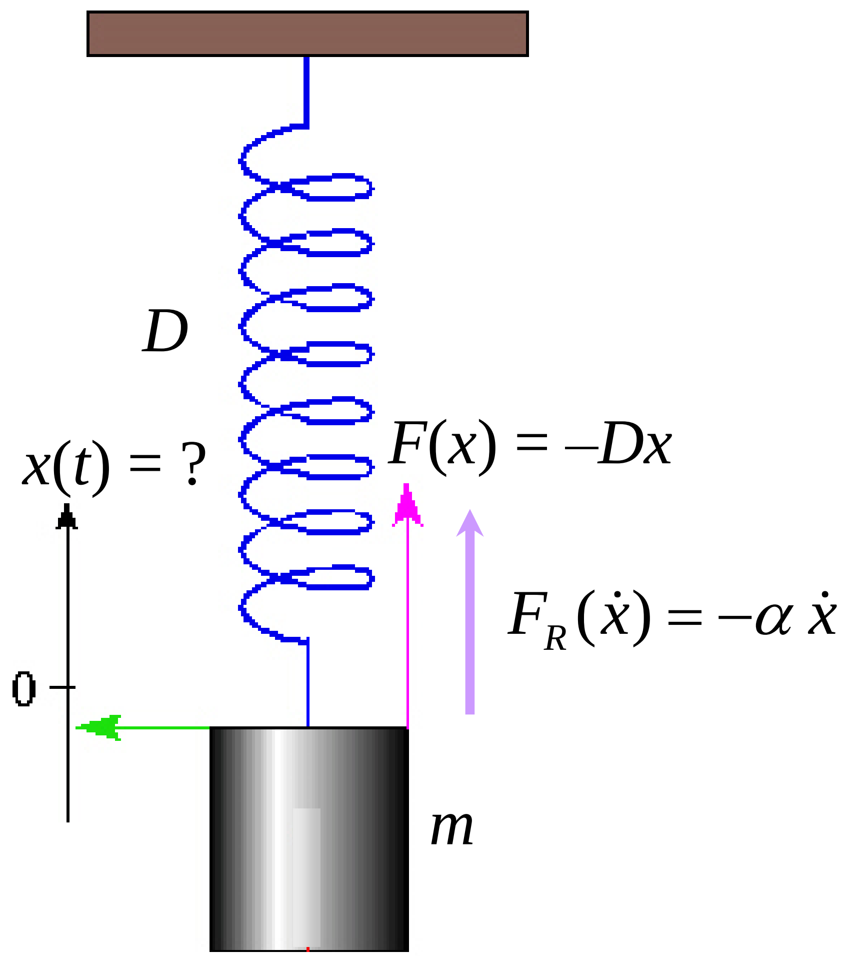
$$x(t) = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Das Ergebnis ist wieder reell, die komplexen Zahlen dienten nur als Rechenhilfe. Dieser Rechenweg führt bei einer bestimmten Klasse von Diff. Gleichungen immer zum Zeil.

(ii) Klassifizierung von DGLen



Für den gedämpften harmonischen Oszillator ergab sich die folgende Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

mit den Abkürzungen:

$$\frac{\alpha}{m} = 2\gamma \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Generell liegen Naturgesetze immer in Form von *Differentialgleichungen* (DGLen) vor. Es existiert kein allgemeines Verfahren zur Lösung solcher Gleichungen. Bestimmte Typen können aber systematisch gelöst werden. Um diese zu erkennen, müssen DGLen *klassifiziert* werden.

Schreibweise für DGLen: Bei einer DGL schreibt man immer alle Terme, in denen die gesuchte Funktion $x(t)$ vorkommt, auf die linke Seite. Sollten explizite Funktionen von t vorkommen, dann schreibt man diese auf die rechte Seite vom Gleichheitszeichen.

Klassifizierungsschema für DGLen

- Ordnung der DGL = höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion $x(t)$
- linear, nicht-linear = Eine DGL heißt linear, falls die gesuchte Funktion $x(t)$ und alle ihre Ableitungen linear vorkommen; ansonsten ist es eine nicht-lineare DGL.
- homogen, inhomogen = Eine DGL heißt homogen, falls keine explizite isolierte Funktion der Variablen t auftritt. Andern-falls nennt man die Gleichung inhomogen.
- konstante oder nicht konstante Koeff. = Falls die Koeffizienten vor der gesuchten Funktion und vor allen Ableitungen konstant sind, dann liegt eine DGL mit konstanten Koeffizienten vor, ansonsten ist es eine DGL mit nicht-konstanten Koeffizienten.

Beispiel 1:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \, x(t) = 0$$

$\Rightarrow$ Lineare, homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiel 2:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\left(x(t)\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Nicht-lineare, homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiel 3:

$$\dddot{x}(t) + t\,\ddot{x}(t) + 4\,x(t) = \sin(a\,t)$$

$\Rightarrow$ Lineare, inhomogene DGL 3. Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten. Im Fall $a = 0$ ist die DGL homogen.

Beispiel 4:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t)\,x(t) = 7$$

$\Rightarrow$ Nicht-lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

(iii) Lineare, homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare, homogene DGL der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ sieht allgemein so aus:

$$a_n \frac{d^{(n)}x(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0$$

Die gesuchte Funktion $x(t)$ kann immer mit dem folgenden Ansatz ermitelt werden

$$x(t) = A \cdot e^{\Omega t}$$

mit zunächst unbekannten (komplexen !!) Konstanten A und Ω.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\Omega e^{\Omega t} \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = A\Omega^2 e^{\Omega t} \qquad \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^{(k)}x(t)}{dt^k} = A\Omega^k e^{\Omega t} = \Omega^k x(t) \quad \text{für} \;\; k = 1, 2, \ldots, n$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\left(a_n\Omega^n + a_{n-1}\Omega^{n-1} + \cdots + a_2\Omega^2 + a_1\Omega + a_0\right)x(t) = 0$$

Da $x(t) = Ae^{\Omega t} \neq 0$ für alle t gilt, ergibt sich jetzt eine algebraische Gleichung für die Unbekannte Ω:

$$a_n\Omega^n + a_{n-1}\Omega^{n-1} + \cdots + a_2\Omega^2 + a_1\Omega + a_0 = 0$$

$\Rightarrow$ Polynom n – ten Grades in Ω

$\Rightarrow$ hat immer n (komplexe !!) Nullstellen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$

(Doppelte Nullstellen bereiten leichte Probleme !)

$\Rightarrow$ Lösung der DGL:

$$x(t) = A_1 e^{\Omega_1 t} + A_2 e^{\Omega_2 t} + \cdots + A_n e^{\Omega_n t}$$

mit n (komplexen !!) Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_n$, die an n Anfangsbedingungen anzupassen sind.

(iv) DGL des gedämpften harmonischen Oszillators

Es war:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

Dies ist eine lineare, homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Der Ansatz $\quad x(t) = A e^{\Omega t}$

führt daher sofort auf die algebraische Gleichung

$$\Omega^2 + 2\gamma\,\Omega + \omega_0^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen:

$$\Omega_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\Omega_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Damit wird die allgemeine Lösung für die gesuchte Funktion $x(t)$:

$$x(t) = A_1 e^{\Omega_1 t} + A_2 e^{\Omega_2 t}$$

Die beiden Konstanten A_1 und A_2 werden für $t = 0$ durch die *Anfangs-bedingungen* festgelegt:

$$x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Daraus ergibt sich:

$$x_0 = A_1 + A_2 \qquad v_0 = A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2$$

Für $\gamma = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall) liefert dieses Verfahren nicht die vollständige Lösung (siehe die Vorlesung!).