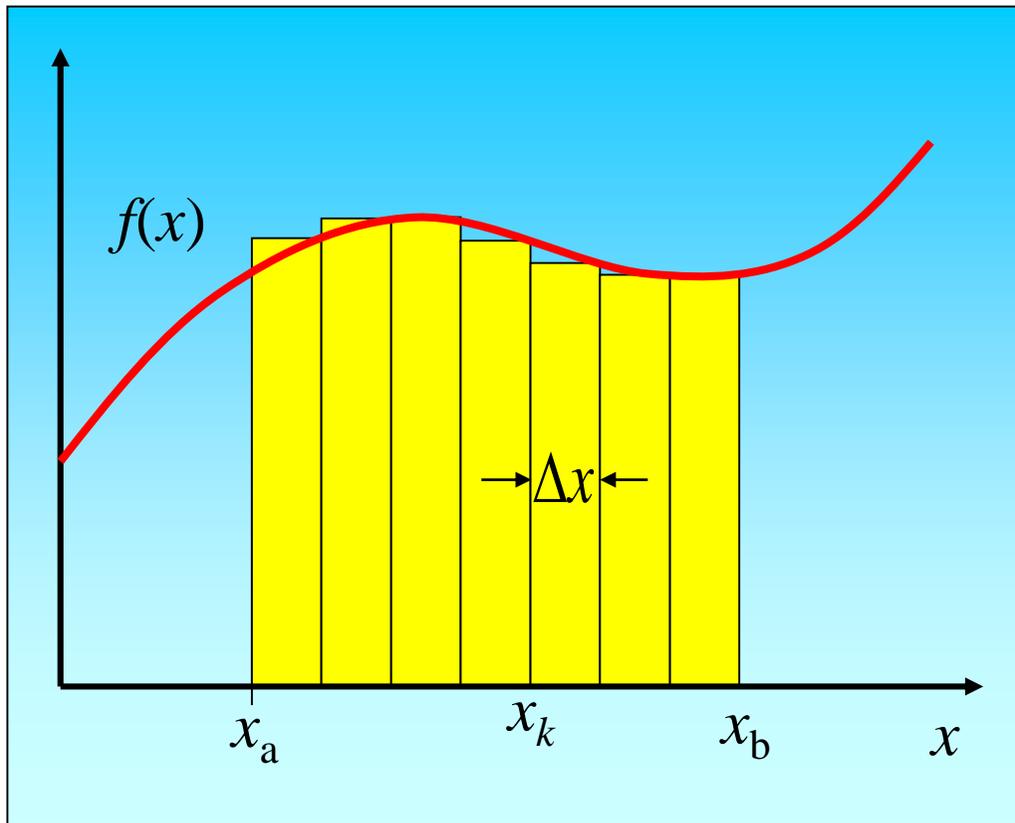




4. Integralrechnung in 3D

(i) Wiederholung: 1D Integrale

Wie groß ist die Fläche unter einer Kurve $f(x)$ zwischen den Grenzen x_a und x_b ?



Man teilt die Fläche in n schmale Streifen der Breite:

$$\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n}$$

Die Höhe jedes Streifens ist:

$$f(x_k) \quad \text{mit} \quad x_k = x_a + k \cdot \Delta x$$

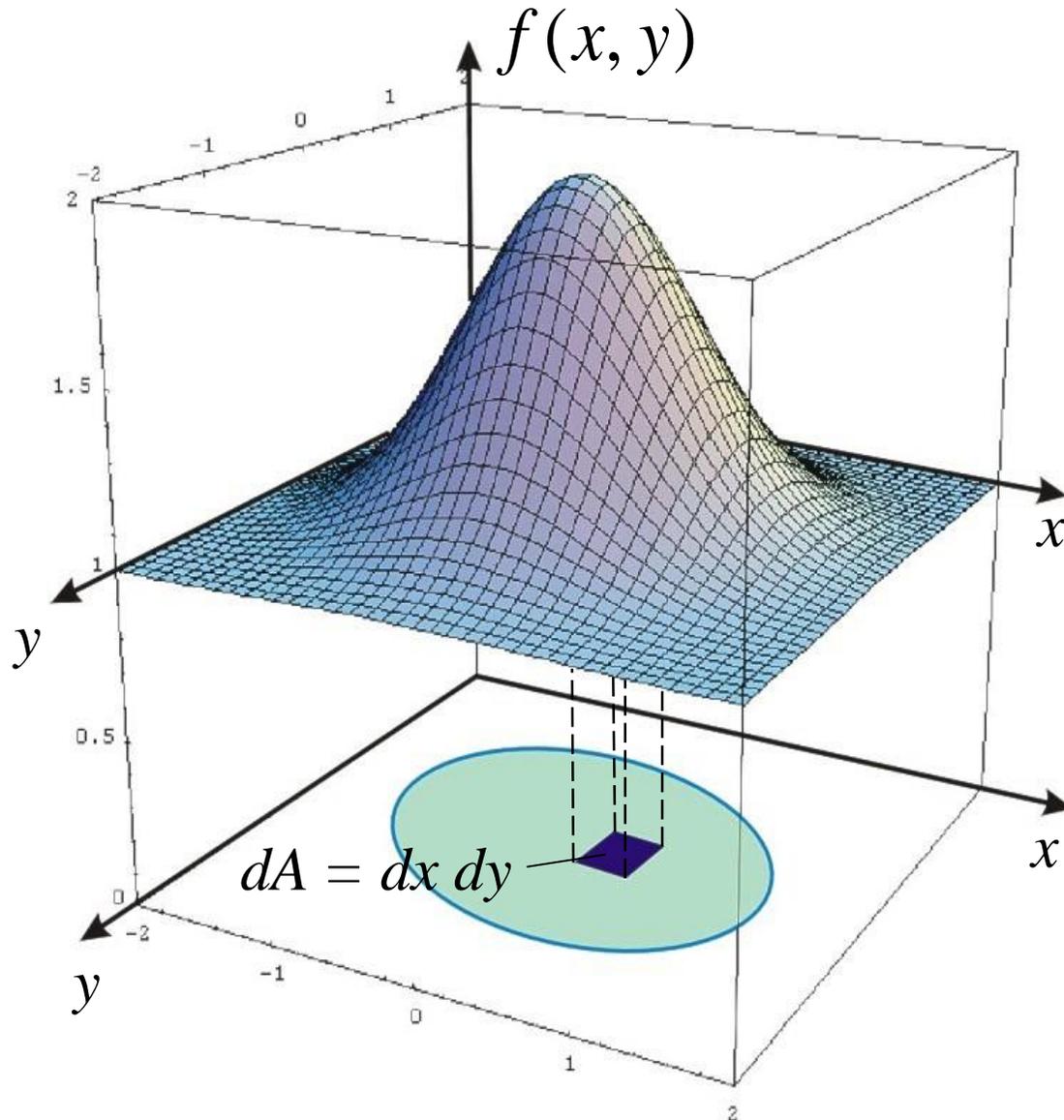
Dann kann man die Fläche schreiben in der Form:

$$S = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

Den rechten Ausdruck bezeichnet man als „*bestimmtes Integral*“ der Funktion $f(x)$ in den Grenzen $\{ x_a, x_b \}$.



(ii) 2D-Integrale – Flächenintegrale



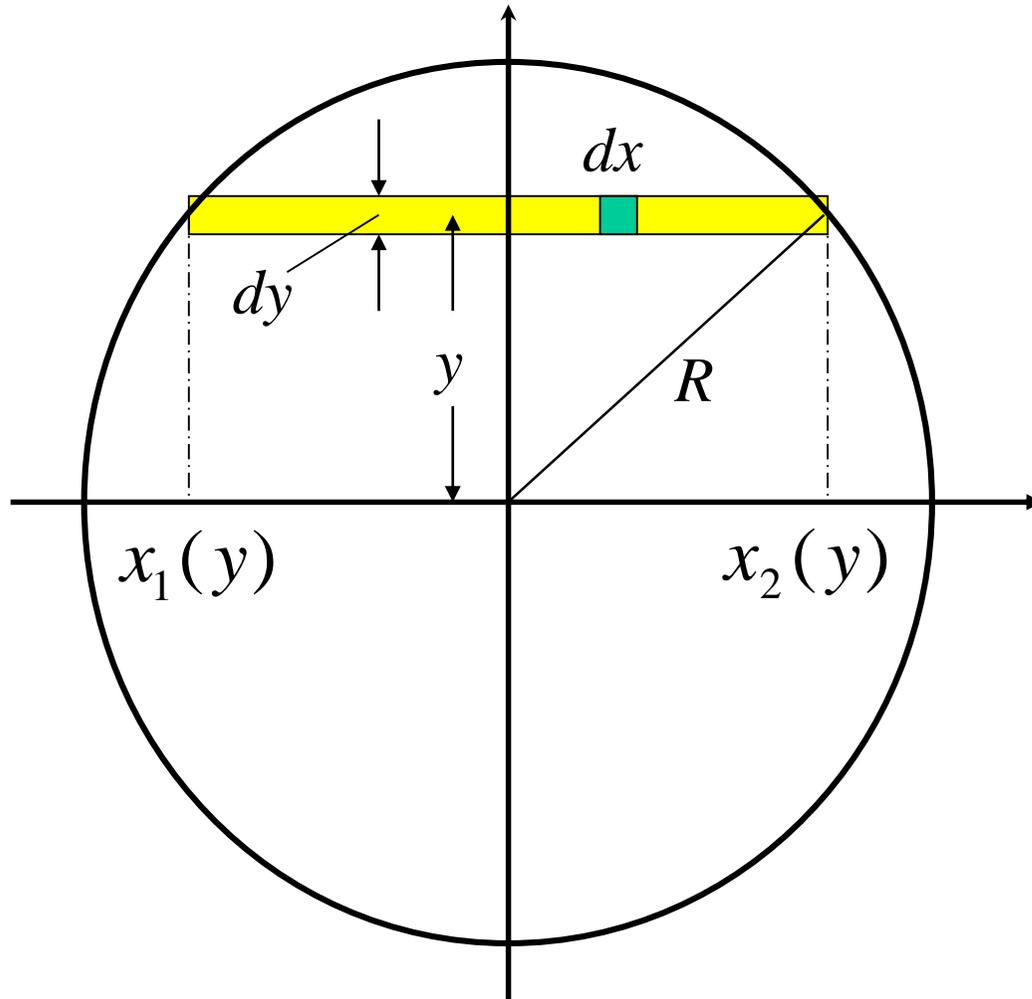
Es soll folgendes Zwei-
fachintegral berechnet
werden: $dA = dx dy$

$$\iint_{\text{Fläche } A} f(x, y) dA$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$



Beispiel 1: Fläche eines Kreises in
kartesischen Koordinaten



In diesem Fall ist $f(x, y) = 1$, also gilt:

$$A_O = \int_{-R}^R \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} 1 dx \right) dy$$

Es ist $x^2 + y^2 = R^2$

$$\Rightarrow x_2(y) = +\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$x_1(y) = -\sqrt{R^2 - y^2}$$

Dann kann das Integral geschrieben werden als:

$$A_O = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2}} dx \right) dy$$

$$= \int_{-R}^R \left([x]_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2}} \right) dy$$



$$\Rightarrow A_O = \int_{-R}^R \left(2\sqrt{R^2 - y^2} \right) dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

Dieses Integral ist tabelliert (z.B. im Taschenbuch der Mathematik von Bronstein):

$$\int \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{1}{2} \left(y\sqrt{R^2 - y^2} - R^2 \arctan \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right) \right)$$

Damit folgt:

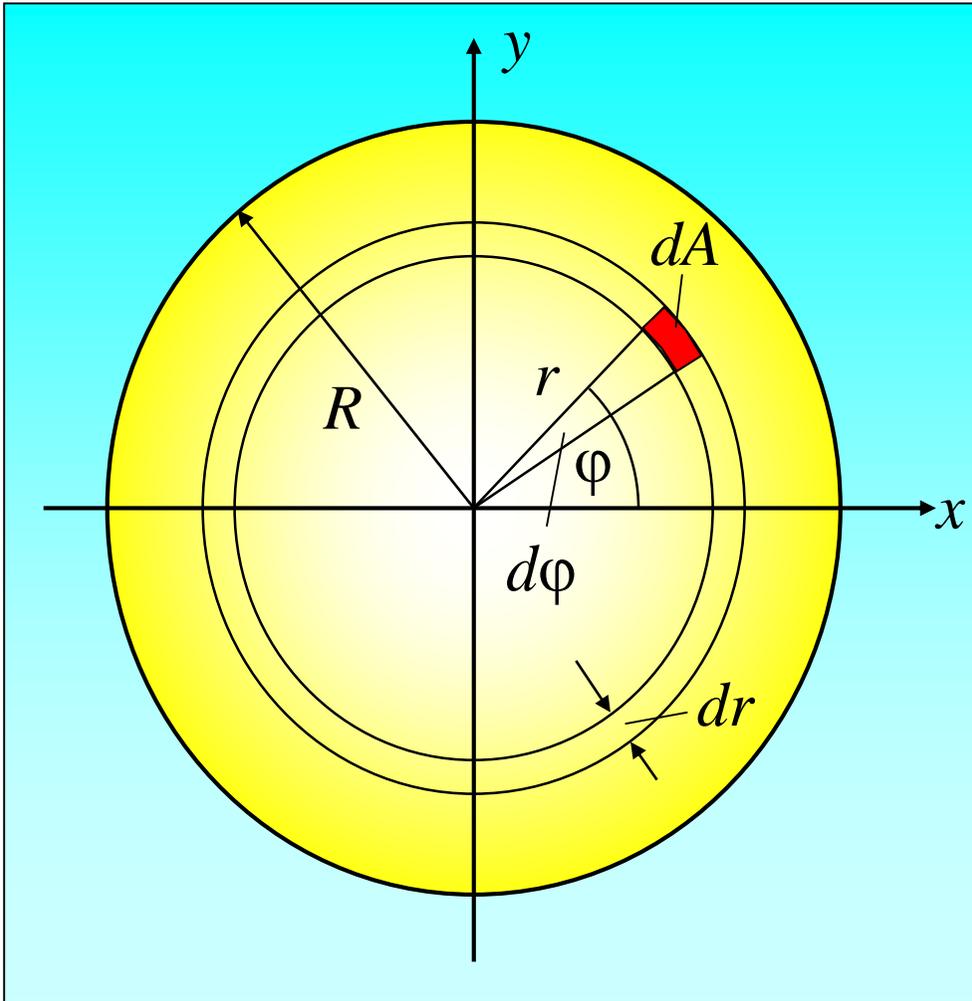
$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy &= \frac{1}{2} \left[y\sqrt{R^2 - y^2} - R^2 \arctan \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right) \right]_{-R}^R \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{-R^2 \arctan(-\infty)}_{-\pi/2} + \underbrace{R^2 \arctan(+\infty)}_{\pi/2} \right] \end{aligned}$$

Die Kreisfläche ergibt sich schließlich zu:

$$A_O = 2 \cdot \frac{R^2}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \pi R^2$$



Beispiel 2: Fläche eines Kreises in Polarkoordinaten



$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Das Flächenelement dA lautet in Polarkoordinaten:

$$dA = r \, d\varphi \, dr$$

Die Kreisfläche ist dann:

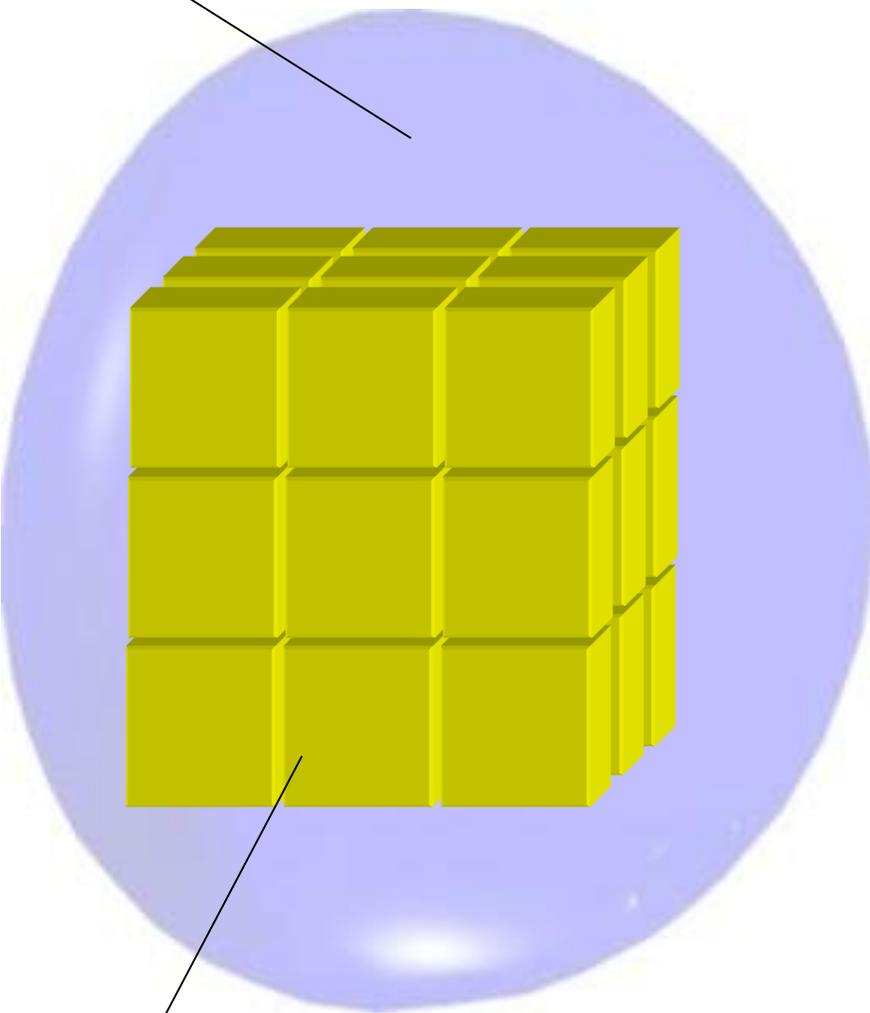
$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r \, d\varphi \right) dr = \int_0^R (2\pi r) dr \\ &= 2\pi \int_0^R r \, dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R = \pi R^2 \end{aligned}$$

Der Vergleich zu dem Rechengang in kartesischen Koordinaten zeigt den Vorteil des angepaßten Koordinatensystems.



(iii) 3D-Integrale – Volumenintegrale

V – Volumen des Körpers



$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

$$V \approx \sum_{i=1}^N \Delta V_i, \quad N \rightarrow \infty, \Delta V_i \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow V = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \Delta V_i$$

$$= \int_V dV = \iiint_V dx dy dz$$

Integral I einer Funktion $f(x, y, z)$ über V :

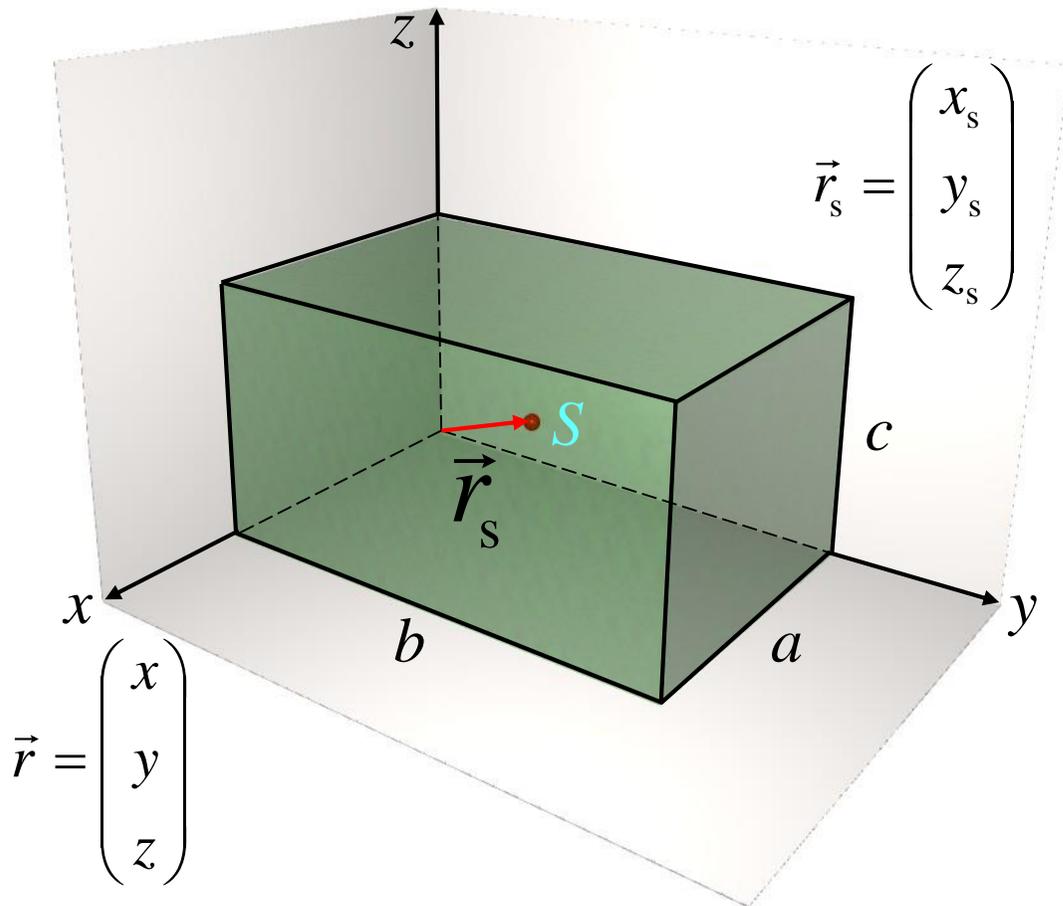
$$I \approx \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i, \quad N \rightarrow \infty, \Delta V_i \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow I = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

$$= \int_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$



Beispiel: Schwerpunkt eines homogenen Quaders



Der Schwerpunkt ist:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{V} \iiint_V \vec{r} dV \quad \text{mit} \quad V = a \cdot b \cdot c$$

Mit $dV = dx dy dz$ folgt für die x_s -Komponente:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{abc} \int_0^c \left(\int_0^b \left(\int_0^a x dx \right) dy \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \frac{a}{bc} \int_0^c \left(\int_0^b dy \right) dz = \frac{1}{2} \frac{ab}{bc} \int_0^c dz \\ &= \frac{1}{2} \frac{abc}{bc} = \frac{1}{2} a \end{aligned}$$

Entsprechend folgen die anderen Komponenten und man erhält:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



5. Berechnung von Trägheitsmomenten

In der Praxis liegen keine diskreten Massenpunkte vor, sondern eine kontinuierliche Masseverteilung. Dann müssen die Massepunkte durch „infinitesimale Massen“ ersetzt werden, über die dann aufsummiert, d.h. integriert wird.

Die Dichte von Materie war definiert als

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$

Also gilt:

$$\Delta m_i = \rho \Delta V_i = \rho \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Damit gilt für eine beliebige Funktion $f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta m_i &= \\ &= \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) \frac{\Delta m_i}{\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \end{aligned}$$

Da $\frac{\Delta m_i}{\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i} = \rho(\vec{r}_i)$ folgt :

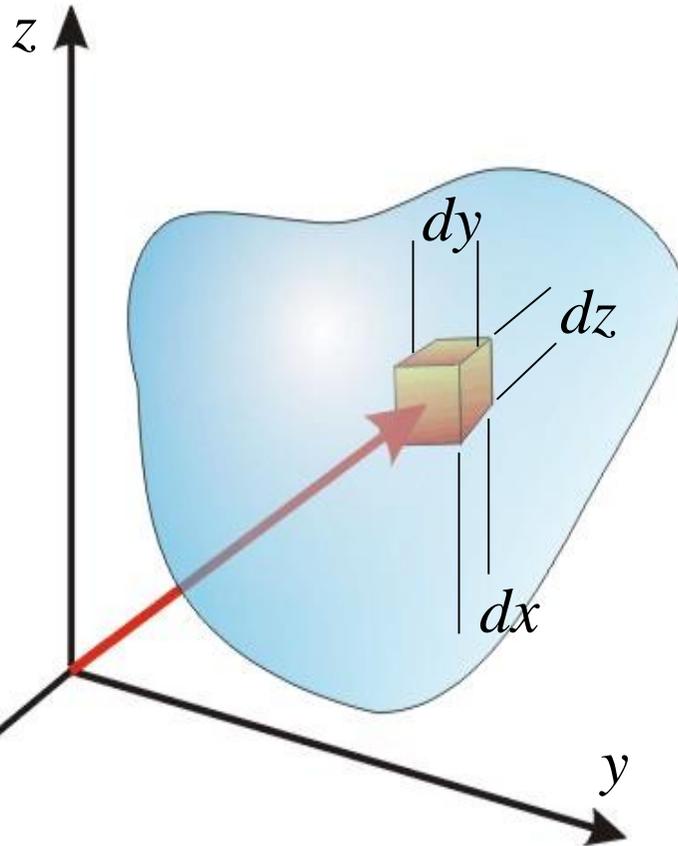
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta m_i &= \\ &= \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) \rho(\vec{r}_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \end{aligned}$$



Für $N \rightarrow \infty$ geht dieser Ausdruck in die integrale Schreibweise über:

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dz dy dx$$

Anschaulicher kann man sich das auch so klarmachen:



Der Ausdruck $f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV$ wird über alle Volumenelemente des ganzen Körpers integriert (3-fach-Integral wegen der drei Raumkoordinaten):

$$\int_{\text{Volumen}} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dz dy dx$$



Reduktion von Mehrfachintegralen auf „normale“ Integrale:

$$\int_{\text{Volumen}} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dz dy dx$$

In der Regel sind die Integrationsgrenzen bei Mehrfachintegralen das Problem, denn die obigen Integrale lassen sich mit der folgenden Definition auf eindimensionale Integrale zurückführen:

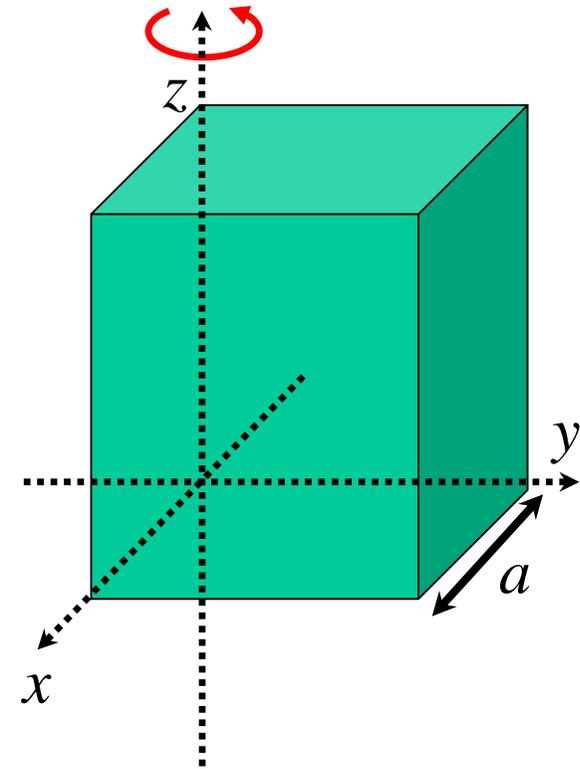
$$\int_{\text{Volumen}} f(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) \rho(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Die Integrationsgrenzen hängen meistens auch von den Variablen ab, über die noch nicht integriert wurde.

Trägheitsmoment: $\Rightarrow I = \sum_{i=1}^N m_i r_{i,\perp}^2 \Rightarrow I = \int_{\text{Körper}} r_{\perp}^2 dm = \int_{\text{Volumen}} \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2 dV$



Beispiel 1: Trägheitsmoment eines homogenen Würfels der Masse m , der um eine seiner Kanten rotiert. Der Würfel habe die Kantenlänge a und die konstante Dichte ρ (relativ leichtes Beispiel).



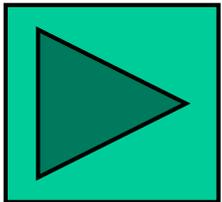
$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

$$I = \int_{\text{Volumen}} \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2 dV = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \rho(x, y, z) r_{\perp}^2 dz \right) dy \right) dx$$

$$= \rho \int_0^a \left(\int_0^a \left(\int_0^a (x^2 + y^2) dz \right) dy \right) dx = \rho \int_0^a \left(\int_0^a a(x^2 + y^2) dy \right) dx$$

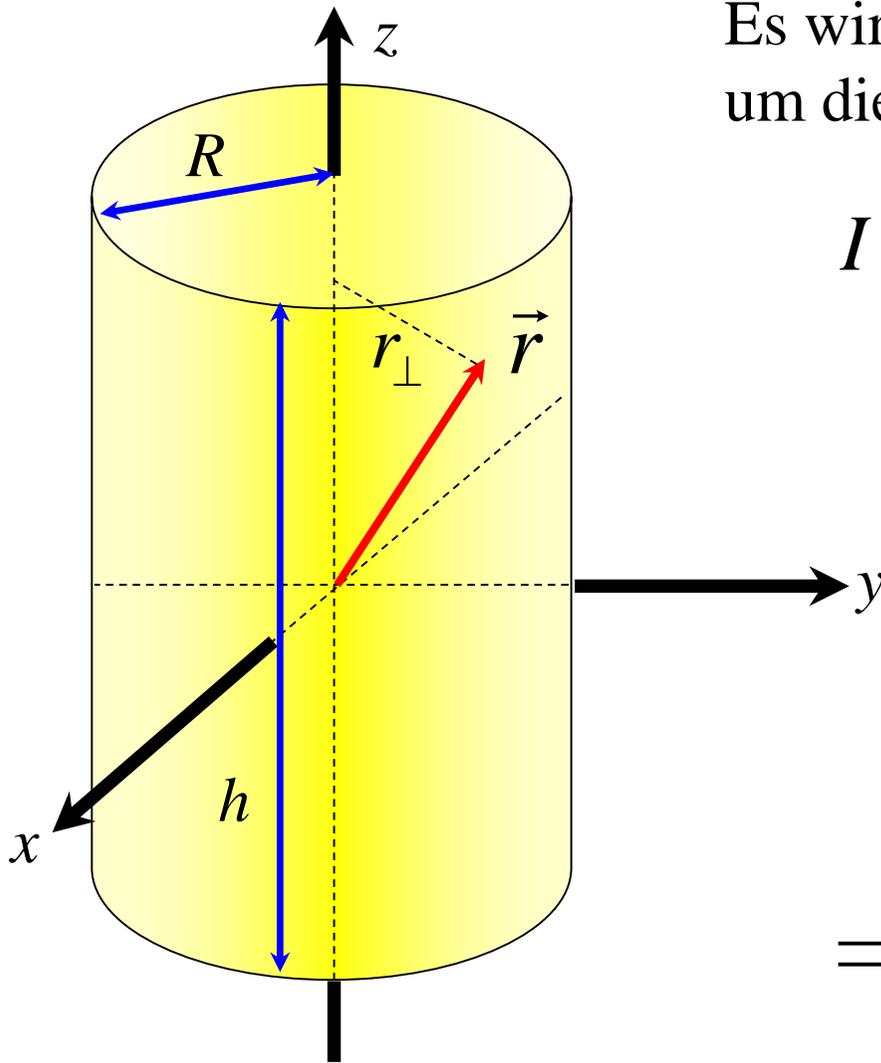
$$= \rho a \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \rho a \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) = \frac{2}{3} \rho a^3 a^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3} m a^2$$





Beispiel 2: Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders der Masse m , der um die z -Achse rotiert. Der Zylinder habe den Radius R und die Höhe h sowie die konstante Dichte ρ (schon sehr schwierig).



Es wird das Trägheitsmoment bei der Rotation um die Längsachse (z -Achse) berechnet:

$$I = \int_{m_{\text{Zylinder}}} r_{\perp}^2 dm = \int_{V_{\text{Zylinder}}} r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV$$

$$\Rightarrow I = \rho \int_{V_{\text{Zylinder}}} r_{\perp}^2 dV$$

$$r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\Rightarrow I = \rho \iiint_{V_{\text{Zylinder}}} (x^2 + y^2) dx dy dz$$



Zylinderkoordinaten sind folgendermaßen definiert:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\perp} \cos \varphi \\ r_{\perp} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

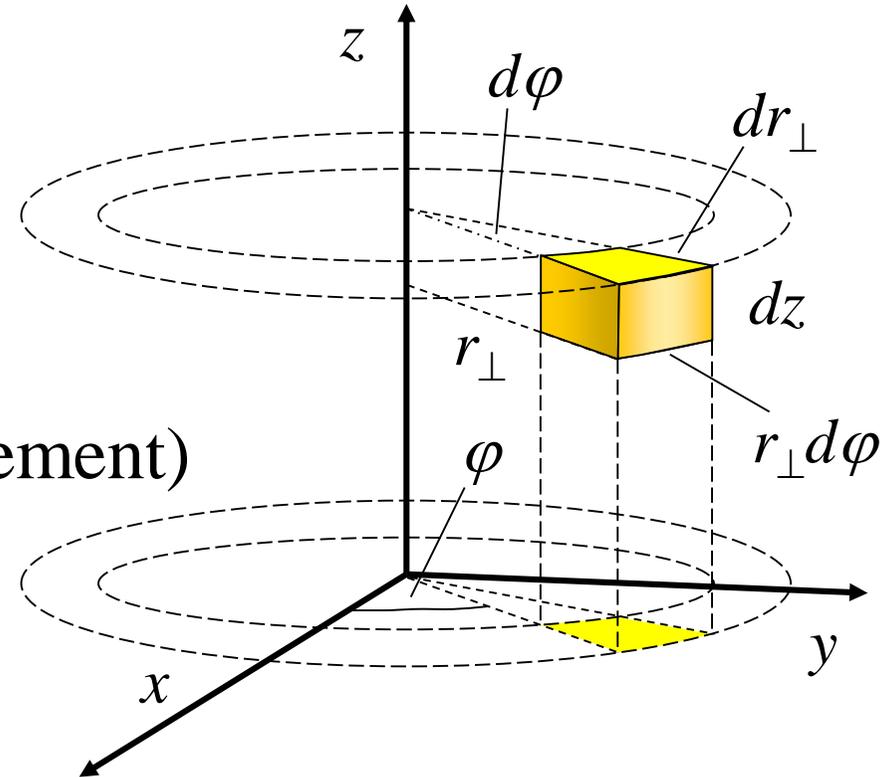
$$x^2 + y^2 = r_{\perp}^2 \cos^2 \varphi + r_{\perp}^2 \sin^2 \varphi = r_{\perp}^2$$

$$dV = r_{\perp} d\varphi dr_{\perp} dz \quad (\text{Volumenelement})$$

$$I = \rho \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r_{\perp}^2 r_{\perp} d\varphi dr_{\perp} dz$$

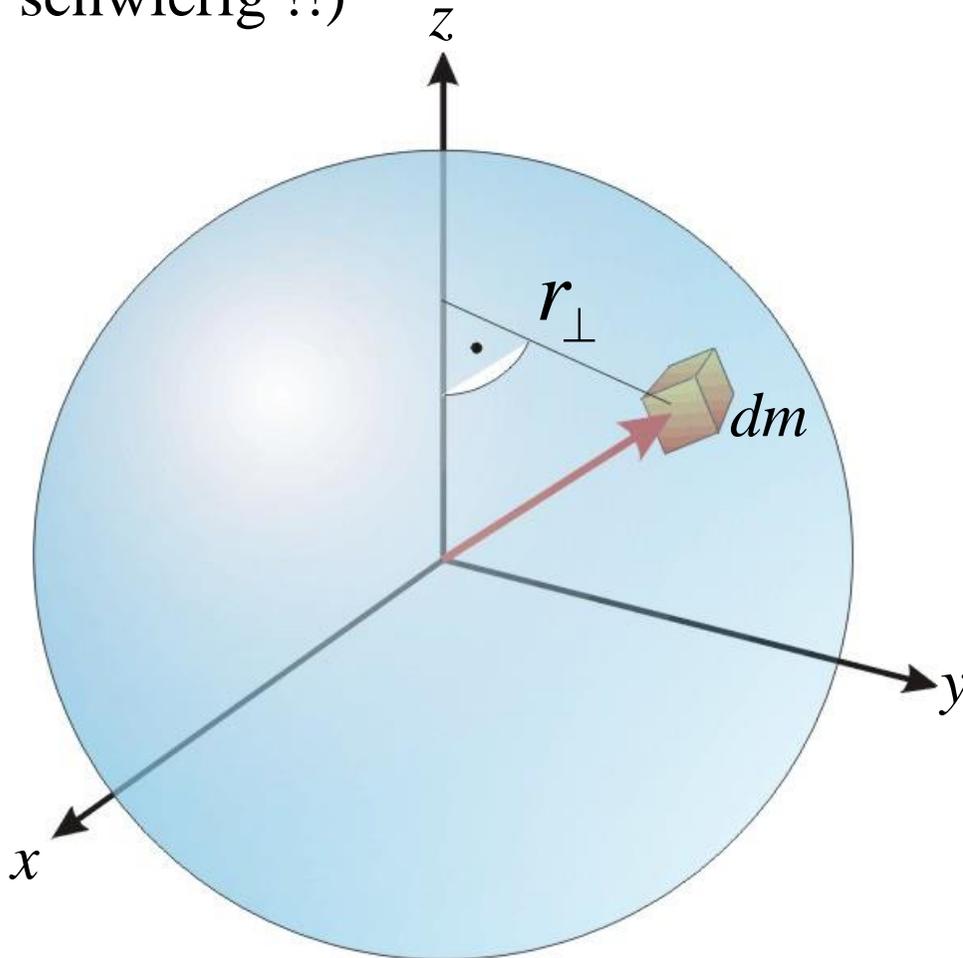
$$= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r_{\perp}^3 dr_{\perp} \int_0^h dz = \rho 2\pi \frac{1}{4} R^4 h = \frac{1}{2} \underbrace{\pi R^2 h}_{V_{\text{Zylinder}}} \rho R^2$$

$$= \frac{1}{2} m R^2$$





Beispiel 3: Trägheitsmoment einer Kugel der Masse m (bereits sehr sehr schwierig !!)



Aus Symmetriegründen ist das Trägheitsmoment I um jede Achse durch das Zentrum der Kugel gleich groß.

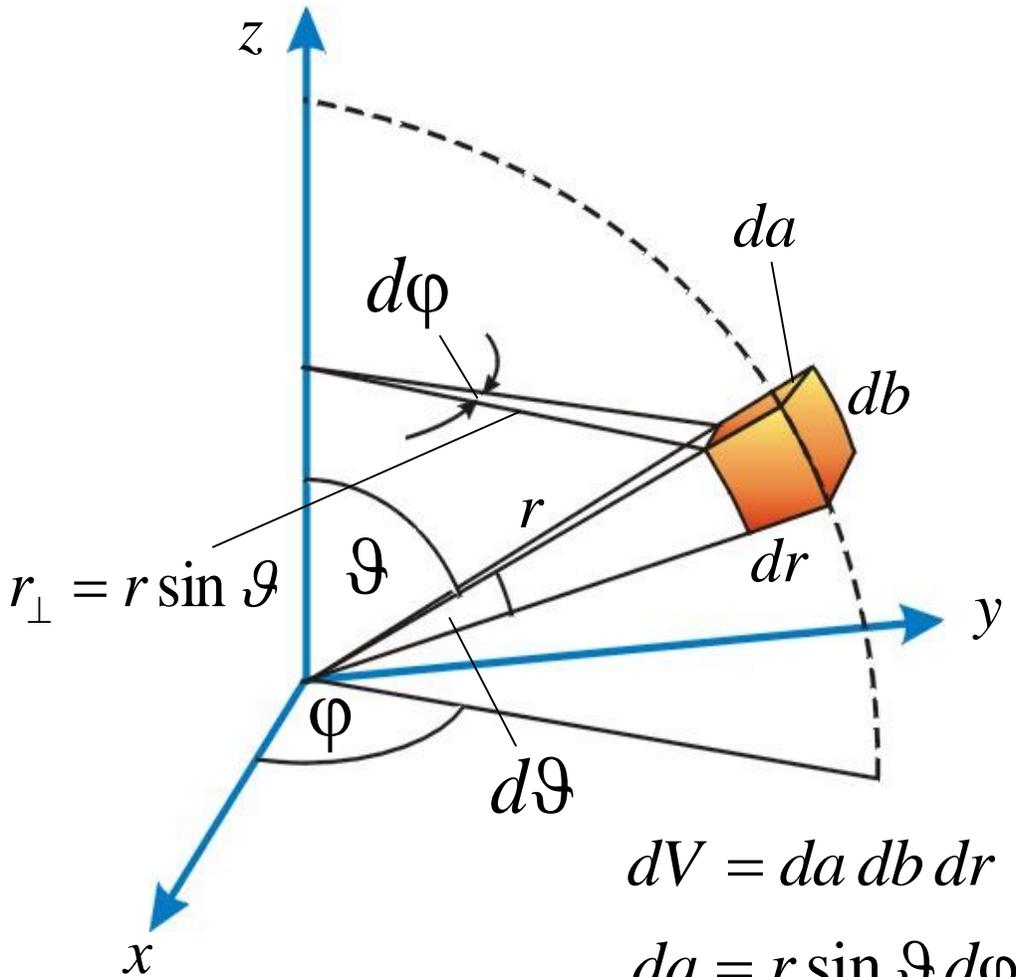
Definitionsgemäß ist also:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{m_{\text{Kugel}}} r_{\perp}^2 dm = \int_{V_{\text{Kugel}}} \rho r_{\perp}^2 dV \\
 &= \rho \int_{V_{\text{Kugel}}} r_{\perp}^2 dV
 \end{aligned}$$

Dabei wurde ein homogenes Material mit $\rho = \text{const.}$ angenommen.



Die Lösung wird in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ausgerechnet:



$$dV = da db dr$$

$$da = r \sin \vartheta d\varphi$$

$$db = r d\vartheta$$

Das Trägheitsmoment ist dann:

$$I = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overbrace{r^2 \sin^2 \vartheta}^{= r_\perp^2} \cdot \underbrace{r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr}_{dV = da db dr}$$

Also folgt:

$$I = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \vartheta d\varphi d\vartheta dr =$$

$$= \rho \int_0^R \underbrace{r^4 dr}_{=\frac{R^5}{5}} \int_0^\pi \underbrace{\sin^3 \vartheta d\vartheta}_{=\frac{4}{3}} \int_0^{2\pi} \underbrace{d\varphi}_{=2\pi}$$



Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 I &= \rho \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi \\
 &= \frac{2}{5} \underbrace{\left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)}_{= V_{\text{Kugel}}} \rho R^2
 \end{aligned}$$

Da $V_{\text{Kugel}} \rho = m$
 folgt für das Trägheitsmoment
 einer Kugel, deren Drehachse
 durch den Mittelpunkt geht:

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Generell hat das Trägheitsmoment
 eines starren Körpers immer die
 Form:

$$I_{\text{Körper}} = \xi m R^2$$

Dabei ist ξ ein Geometriefaktor,
 der von der Form des Körpers
 abhängt.

Es gilt: Je weiter sich die Massen von
 der Drehachse entfernt befinden, desto
 größer ist das Trägheitsmoment.

Die Trägheitsmomente einiger
 ausgewählter Körper zeigt die
 folgende Graphik: