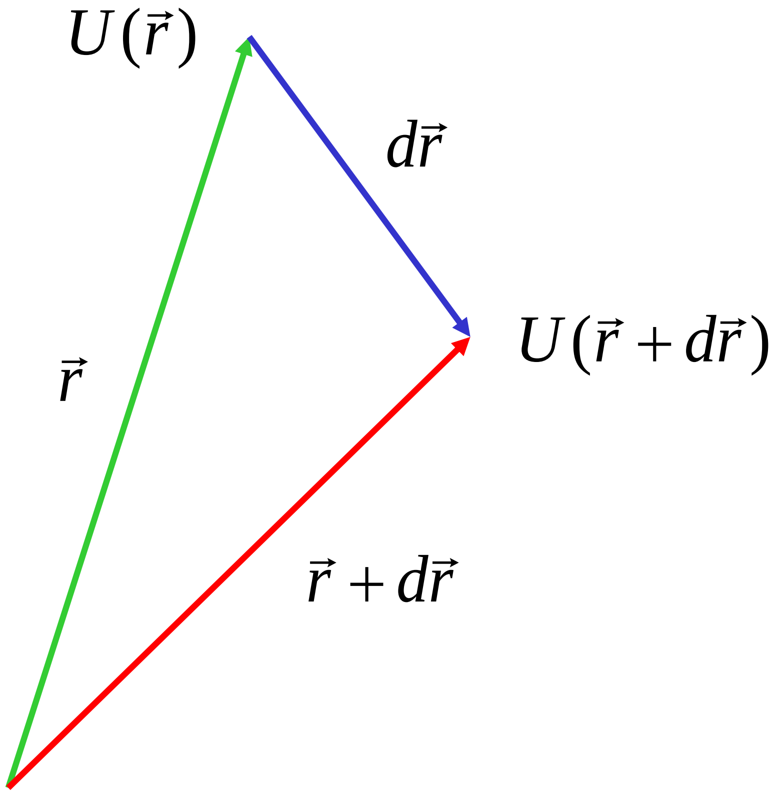
3. Gradient, Divergenz & Rotation

3.1 Der Gradient eines Skalarfeldes

Sei $U(\vec{r})$ ein skalares Feld (z.B. ein Potential), das von $\vec{r} = (x, y, z)$ abhängt. Dann kann man schreiben:



$$U(\vec{r} + d\vec{r}) = U(\vec{r}) + dU$$

dU kann durch eine Veränderung der drei Variablen verursacht werden, also gilt („totales Differential“):

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$ ist der sog. "Nabla-Operator".

Mit dem Nabla-Operator kann man genauso rechnen wie mit einem "normalen" Vektor, nur dass man beachten muß, dass die erste Komponente eine Ableitung nach *x*, die zweite eine nach *y* und die dritte eine nach *z* beinhaltet.

Wenn man ein skalares Feld $U(x, y, z)$ hat, dann wird der Gradient $U(x, y, z)$ folgendermaßen definiert:

$$\vec{\nabla} U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Skalarfeld $U(x, y, z) \Rightarrow$ Vektorfeld $\vec{\nabla} U$

Man sagt: "Der Nabla-Operator wird auf die Funktion $U(x, y, z)$ angewendet."

Wozu ist das gut ?

2.5.7 Das Potential in drei Dimensionen

Wir betrachten ein Kraftfeld

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

und das Wegintegral

$$\int_{\vec{r}_1, C}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Ein Potential $U(x,y,z)$, zum Kraftfeld $\vec{F}$ ist eine Funktion von $\vec{r}$, die ähnliche Eigenschaften wie eine Stamm-funktion hat. Es wird folgendes von der Funktion $U(x,y,z)$ gefordert:

$$\int_{\vec{r}_1, C}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

Insbesondere ist das Integral unab-hängig vom Weg C wenn es ein Potential gibt.

Wir definieren nun den Gradienten von $U(x, y, z)$ als:

$$\vec{\nabla} U(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\, U$$

Der Operator $\vec{\nabla}$ wird „Nabla-Operator“ genannt.

Durch Gradientenbildung kann also aus einem *Skalarfeld* (einer Funktion) ein *Vektorfeld* erzeugt werden.
Es gilt dann nach dem vorher Festgestellten: ***„Wenn sich ein Kraftfeld aus einem Skalarfeld (Potential) durch Gradientenbildung herleiten läßt, dann ist die Kraft konservativ.“***

Für die Komponenten des Kraftfeldes

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

gilt dann: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x,y,z)$

$$F_x(\vec{r}) = -\left.\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}\right|_{y,z=\text{const.}}$$

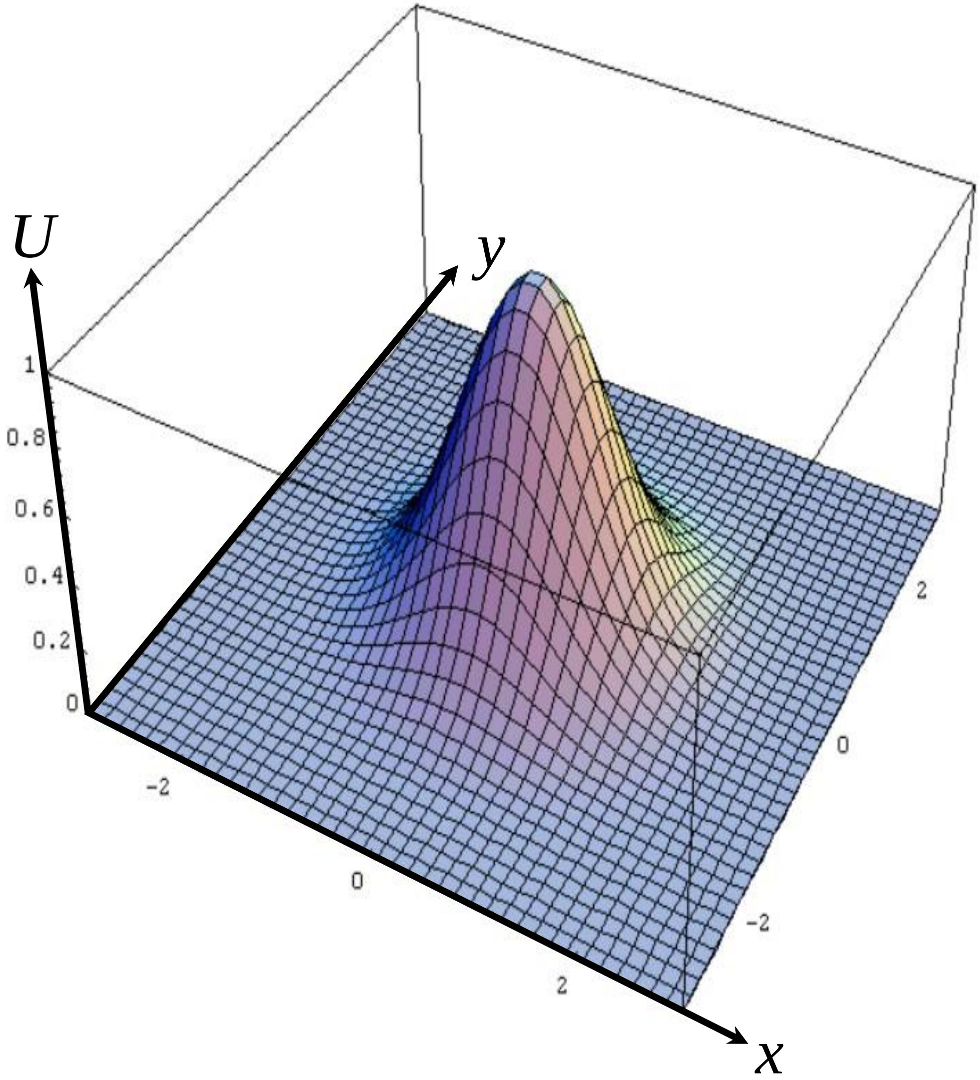
$$F_y(\vec{r}) = -\left.\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}\right|_{x,z=\text{const.}}$$

$$F_z(\vec{r}) = -\left.\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}\right|_{x,y=\text{const.}}$$

Für konservative Kräfte gilt also die „Eins zu Eins“ Zuordnung:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} \Leftrightarrow U(\vec{r})$$

Der Gradient gibt die Richtung des steilsten Anstieges (oder Abstieges) der Funktion $U(x, y, z)$ an. Er „verwandelt“ ein skalares Feld in ein Vektorfeld.



Beispiel 1:

Es sei das folgende Potential gegeben:

$$U(x,y,z) = U_0 \exp\left(-x^2 - y^2\right)$$

Die Kraft ist dann:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x,y,z)$$

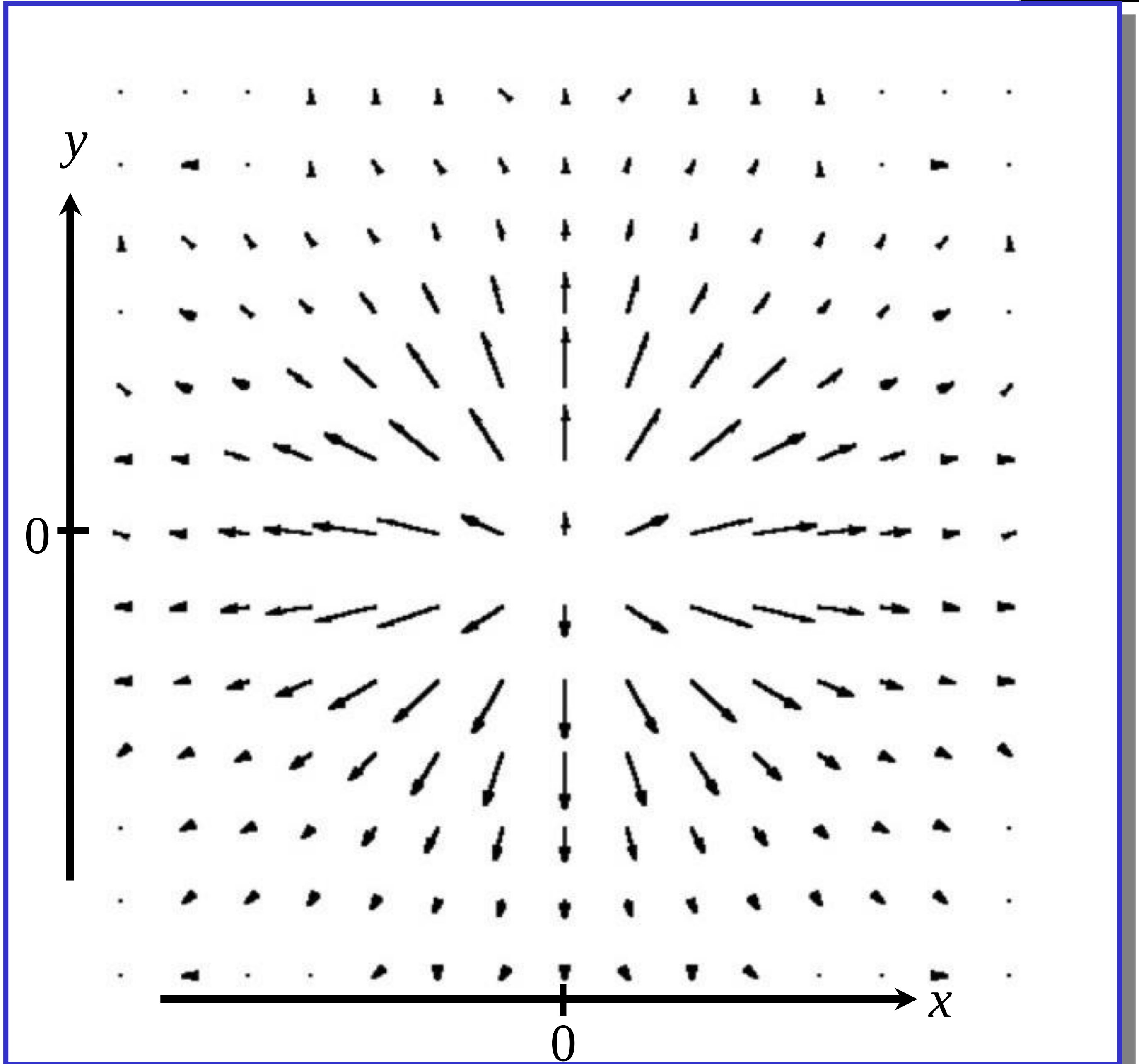
Die Komponenten berechnen sich zu:

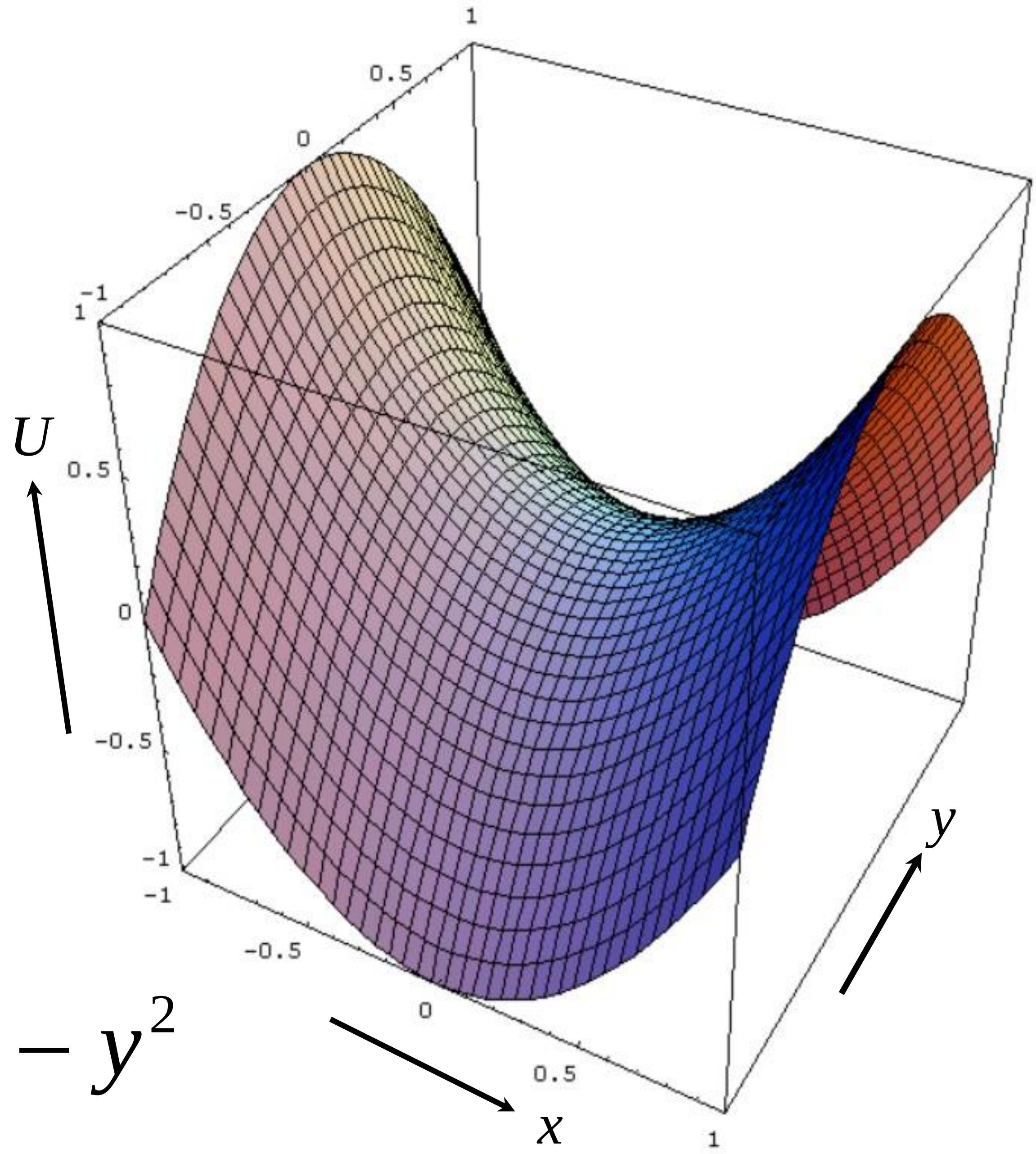
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$= 2xU_0 \exp\left(-x^2 - y^2\right)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$
$$= 2yU_0 \exp\left(-x^2 - y^2\right)$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$
$$= 0$$

Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z = 0)$





<u>Beispiel 2:</u>

Wir betrachten das Potential

$$U(x,y,z) = x^2 - y^2$$

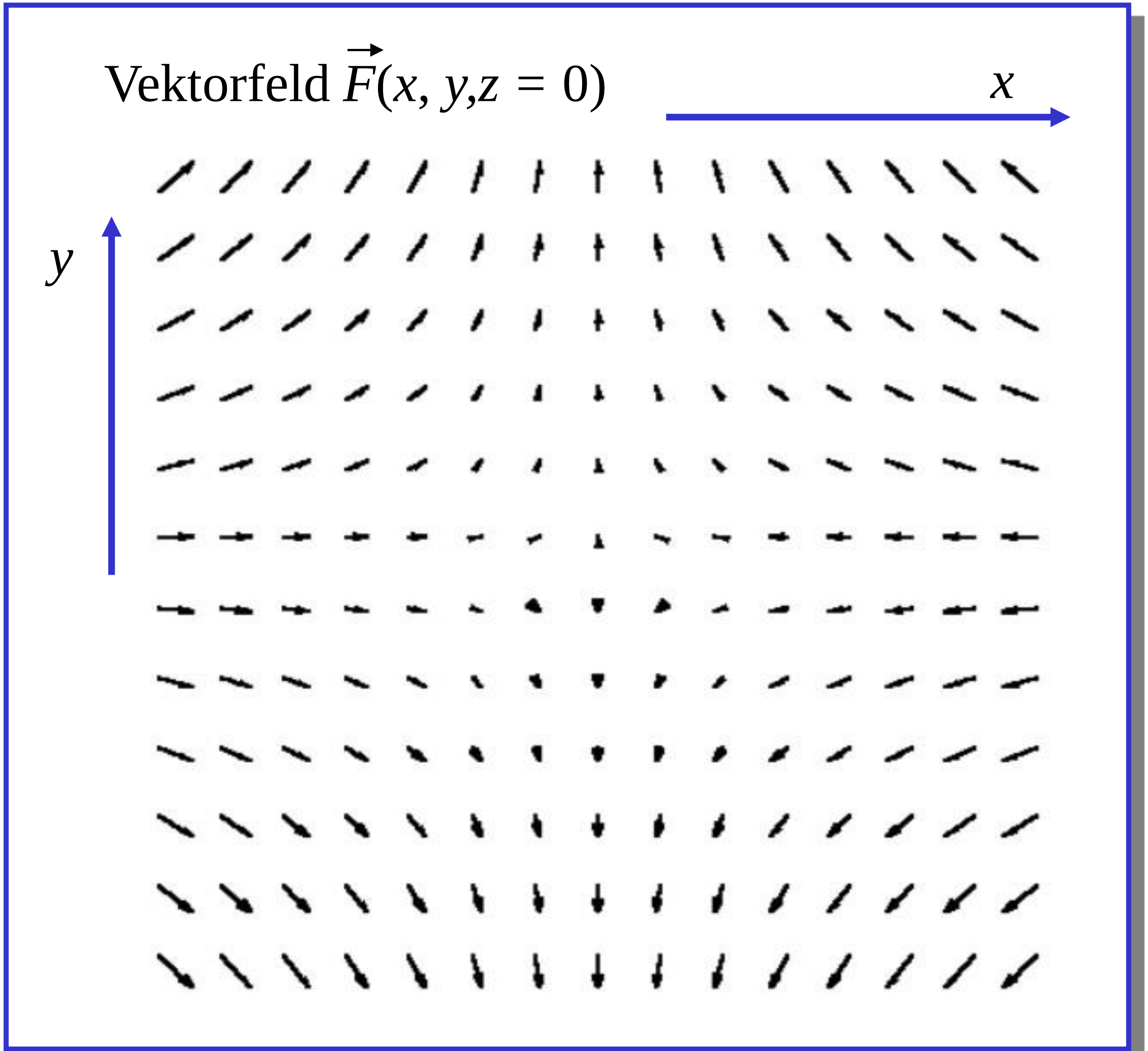
$$U(x,y,z) = x^2 - y^2$$

Die Kraft ist dann:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x,y,z)$$

$$= -\begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$



Beispiel 3:

Es soll nun die Kraft in einem allgemeinen Gravitationsfeld betrachtet werden.

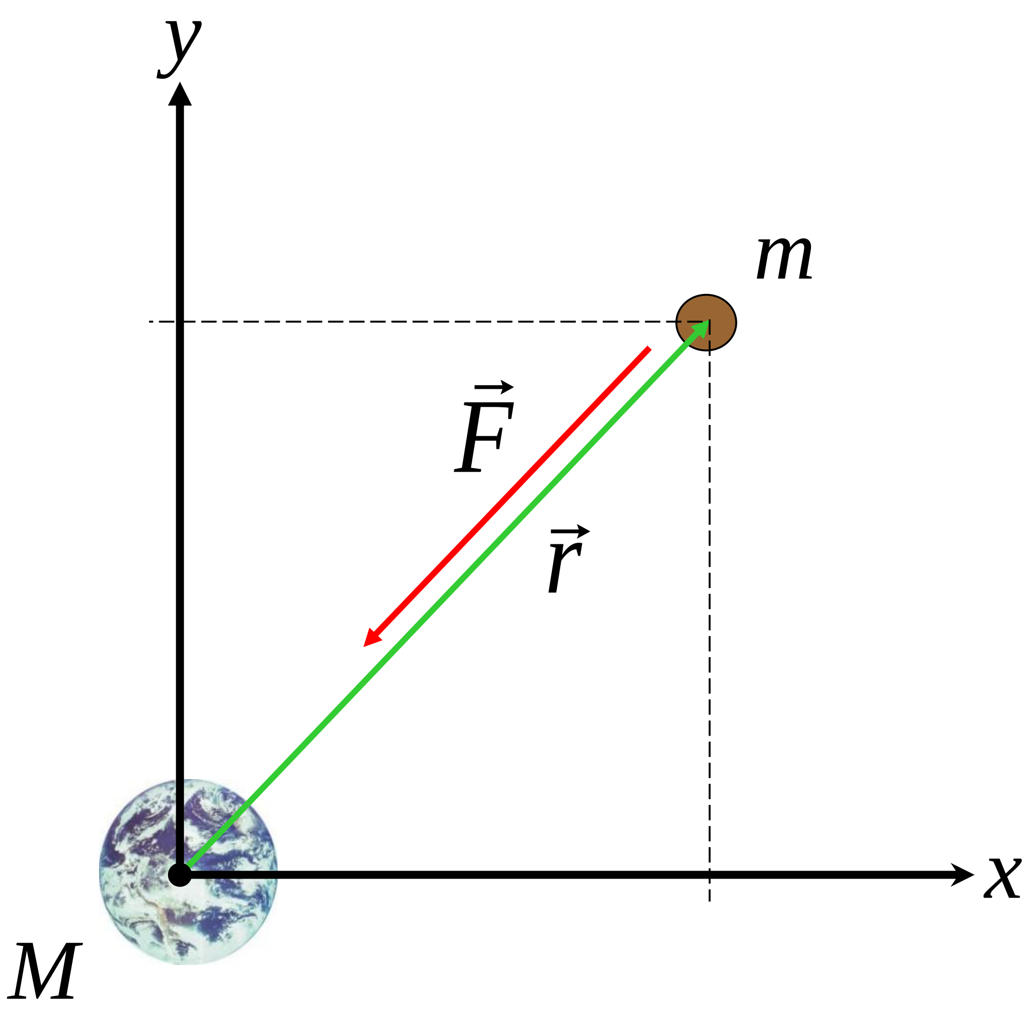
Wir definieren den radialen Einheitsvektor durch:

$$\vec{e}_{\mathrm{r}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Für die Gravitation gilt dann

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m\,M}{r^2}\vec{e}_{\mathrm{r}}$$

$$= -\gamma \frac{m\,M}{x^2 + y^2 + z^2}\vec{e}_{\mathrm{r}}$$



Ist diese Kraft konservativ ? Dazu wird das Potential berechnet:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Wir berechnen dieses Integral nun nicht mit einer Parametrisierung, sondern es wird ausgenutzt, dass

$$\vec{F}(\vec{r}) \parallel d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F(r)\,dr$$

wenn ein Weg von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ radial nach außen gewählt wird.

Also ergibt sich für das Potential:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{r_0}^{r} F(r)\,dr = \gamma\, m\, M \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \gamma\, m\, M \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r} = \gamma\, m\, M \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right)$$

Verlegt man den Bezugspunkt ins Unendliche, $r_0 \to \infty$, dann wird das Potential dort Null.

Mit dieser Definition ergibt sich für das Potential:

$$U(r) = -\gamma \frac{m M}{r} = -\gamma \, m M \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Dieses Resultat ist für einen speziellen Weg radial nach Außen erzielt worden. Um zu zeigen, das $U(r)$ wirklich ein Potential ist, wird der Gradient gebildet:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(r)$$

Für die x - Komponente gilt beispielsweise:

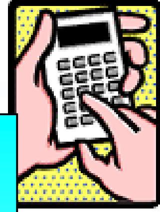
$$F_x(\vec{r}) = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= \gamma \, m M \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

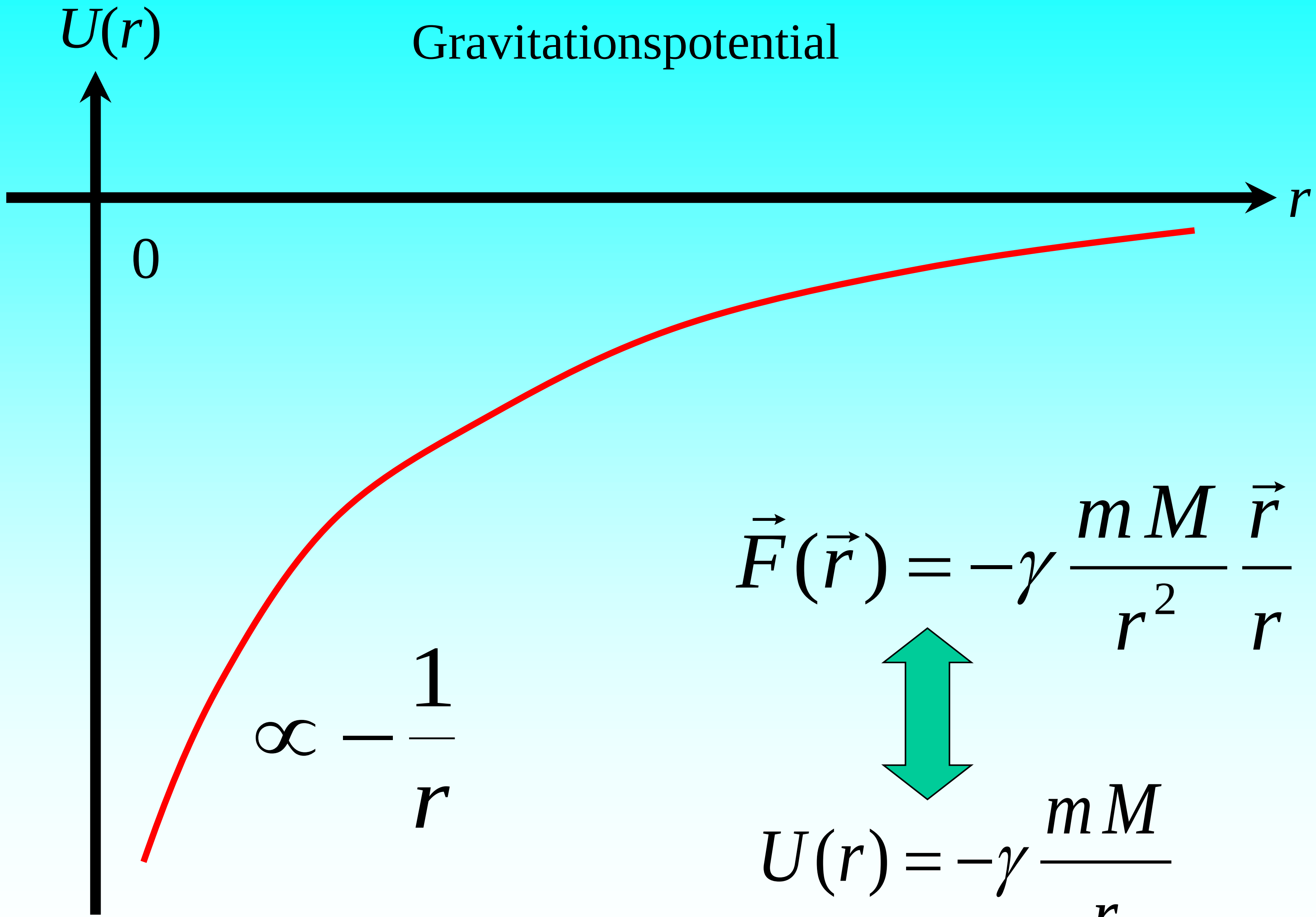
$$= -\gamma \, m M \frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\gamma \, m M}{r^2} \frac{x}{r}$$

Die Gravitationskraft ist also eine *konservative Kraft*.



Gravitationspotential



$$\propto -\frac{1}{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{m M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$U(r) = -\gamma \frac{m M}{r}$$

3.2 Die Divergenz eines Vektorfeldes

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ ist als das (formale) Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld definiert, also:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Das Resultat ist ein Skalarfeld !

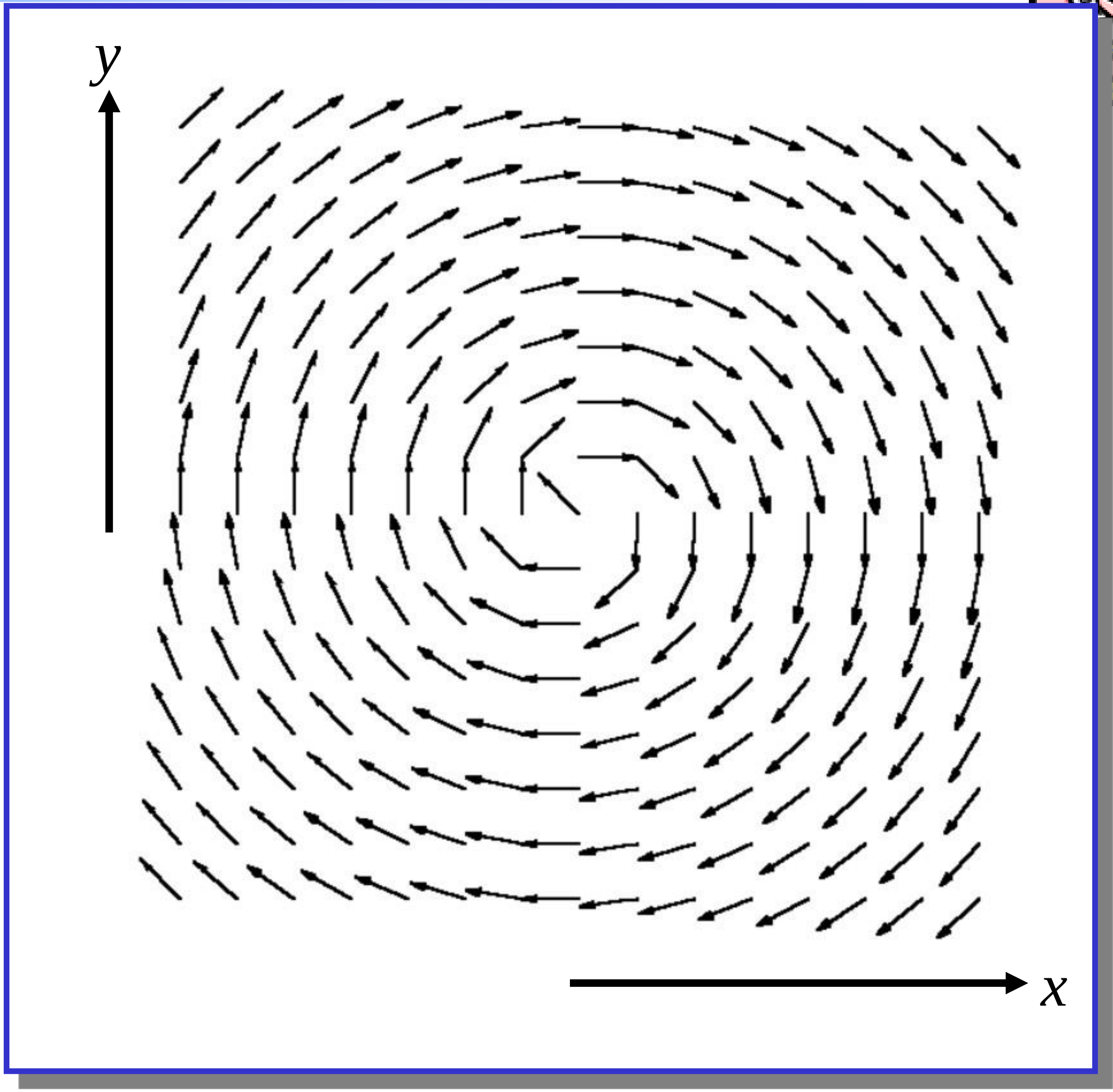
Beispiel 1:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 1+1+1 = 3$$

Beispiel 2:

Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die Divergenz dieses Vektorfeldes ist dann:

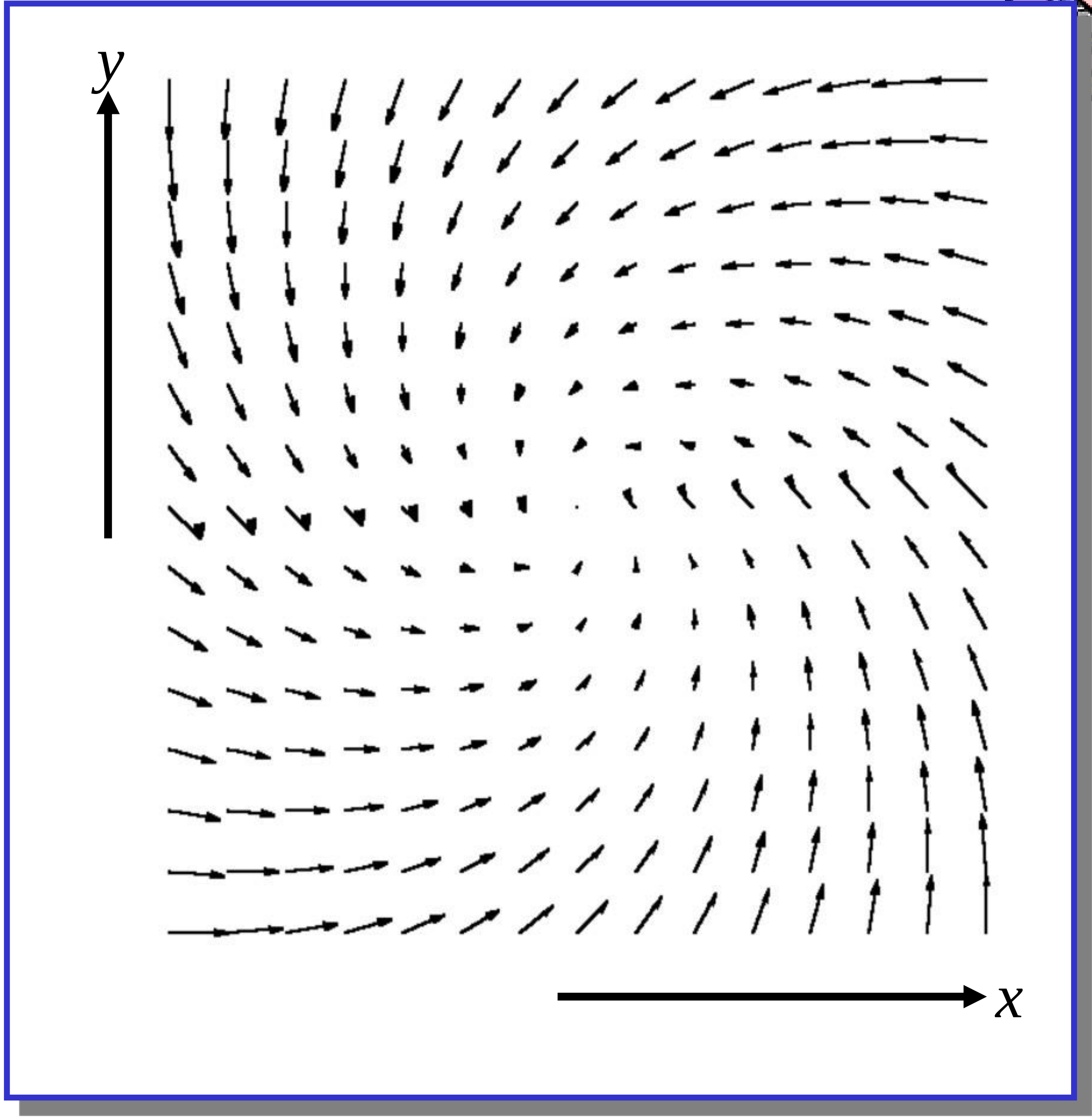
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= \frac{-x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + 0 = 0$$

Beispiel 3:

Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -x-y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die Divergenz dieses Vektorfeldes ist dann:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= (-1) + (-1) + 0 = -2$$

Beispiel 4:

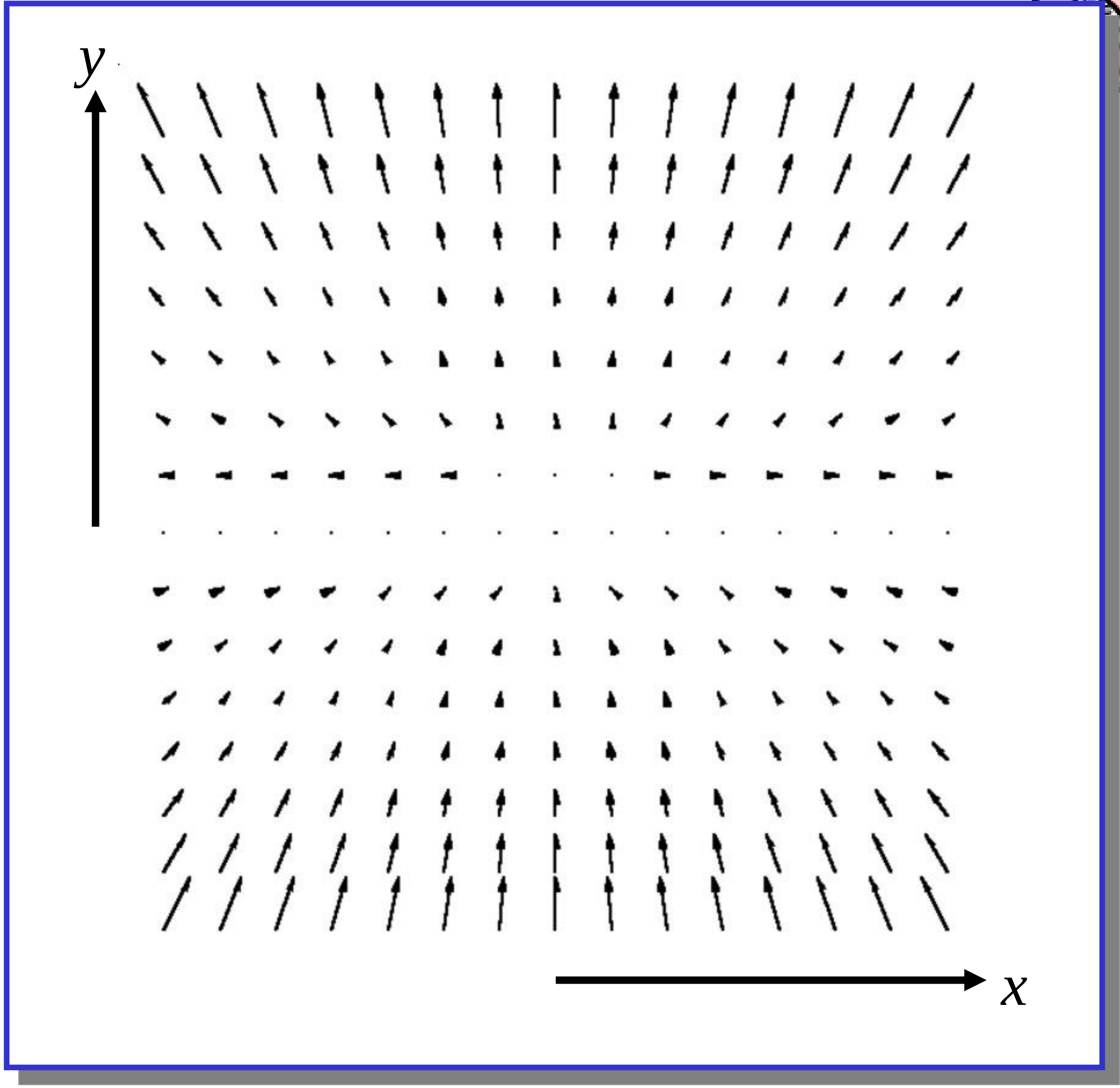
Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} xy \\ 2y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Divergenz dieses Vektorfeldes ist dann:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= y + 4y + 0 = 5y$$



3.3 Die Rotation eines Vektorfeldes

Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ ist als das (formale) Vektorprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld definiert, also:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Das Resultat ist wieder ein Vektorfeld!

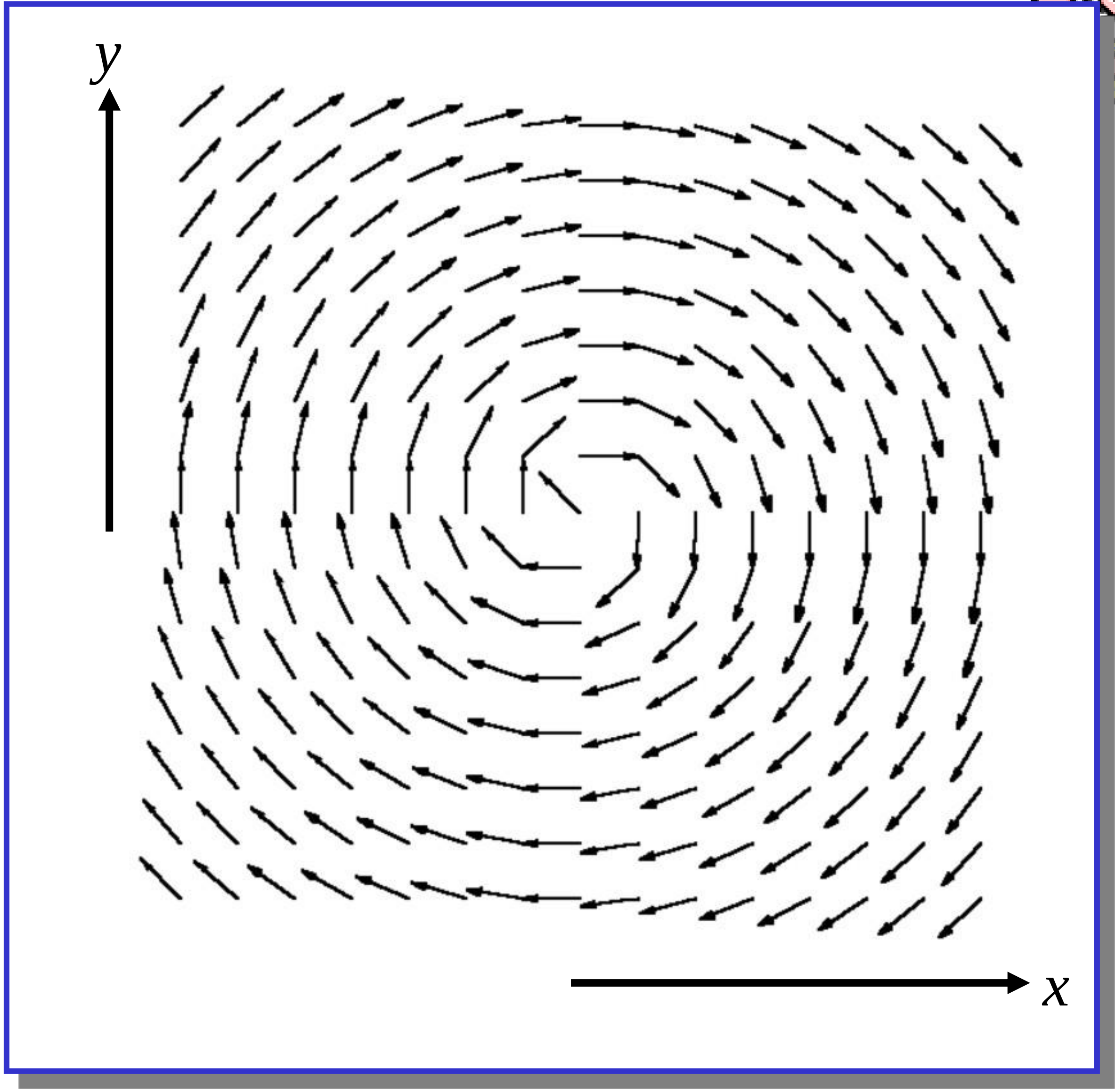
Beispiel 1:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Beispiel 2:

Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die Rotation dieses Vektorfeldes ist dann:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Wegen $F_z = 0$, und da die Komponenten nicht von z abhängen, müssen nur die zwei partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

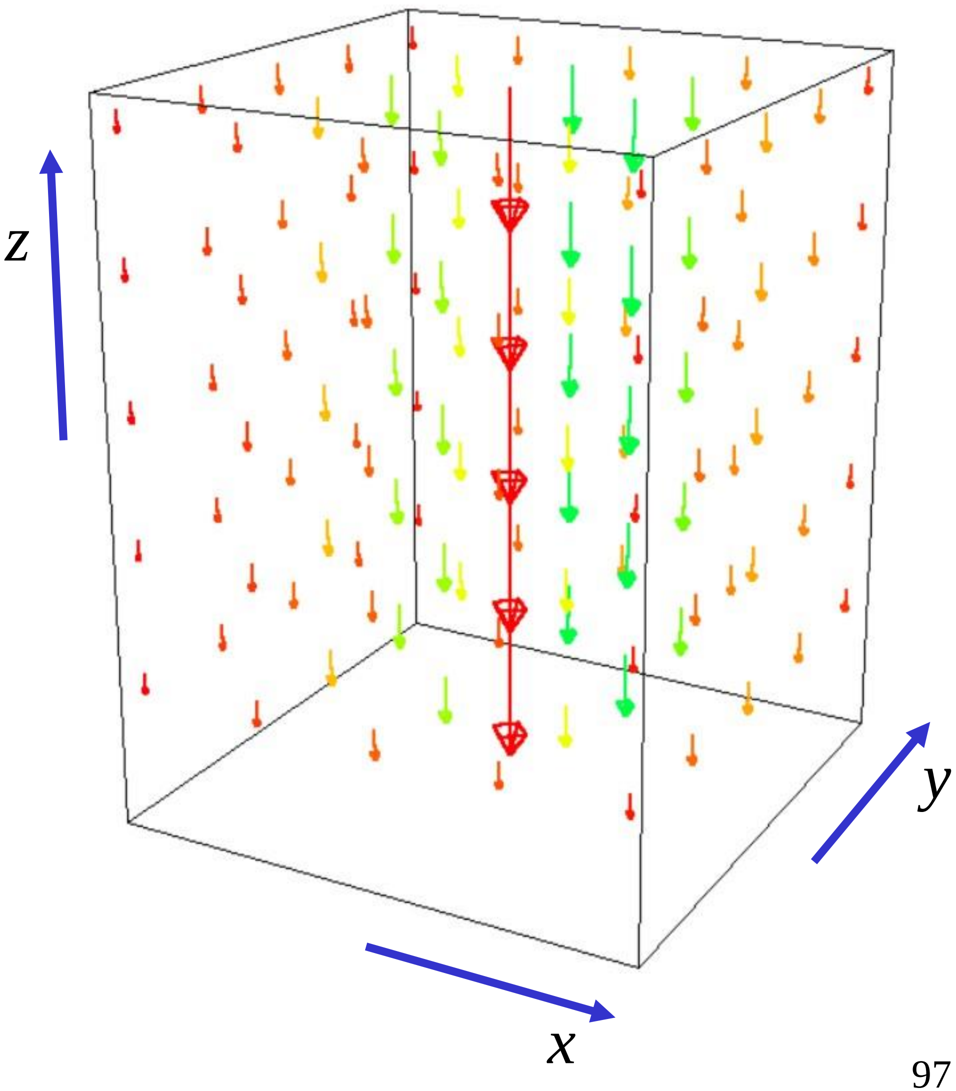
$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

berechnet werden.

Dann erhält man für die Rotation des Vektorfeldes:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld $\vec{\nabla}\times\vec{F}$



3.4 Wirbelfreie & Konservative Kraftfelder

Für welche Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$ ist die Arbeit vom Weg unabhängig ?

Die erste Antwort lautete:
Wenn es ein Potential $U(\vec{r})$ gibt.

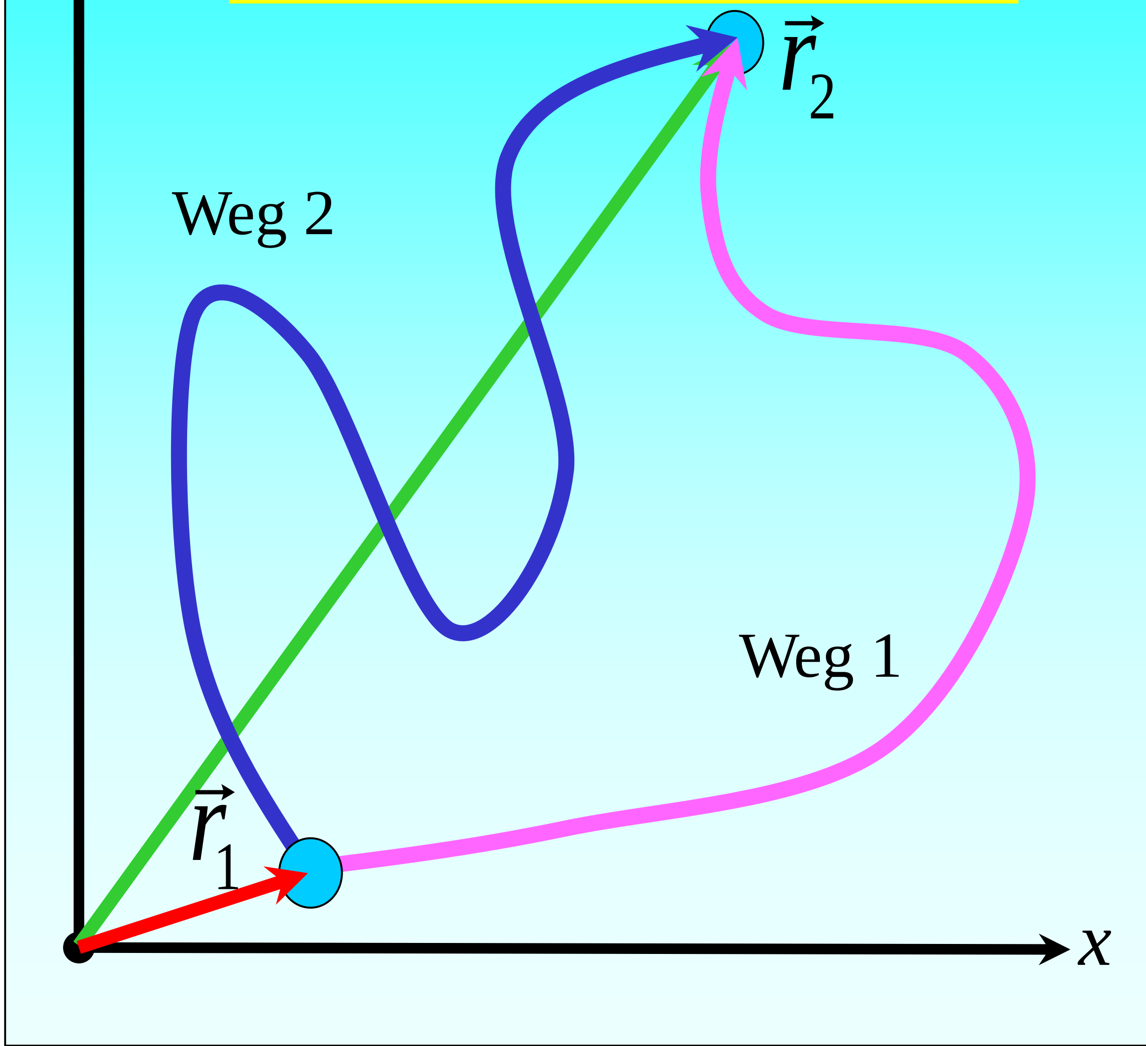
Allerdings ist das nicht immer einfach festzustellen!

<u>Es gilt der folgende Satz:</u>
Sei $\vec{F}(\vec{r})$ ein Kraftfeld. Dann gibt es ein Potential $U(\vec{r})$ mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$ falls das Kraftfeld „*wirbelfrei*“ ist, d.h.:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$$

In der Regel gilt auch die Umkehrung!

$$\int_{\vec{r}_1,\mathrm{Weg}\,1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \overset{????}{=} \int_{\vec{r}_1,\mathrm{Weg}\,2}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$



Jetzt können die konservativen Kraftfelder relativ einfach bestimmt werden:

1. Beispiel: 3D Federkraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -D\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = -D\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Es gibt ein Potential.

2. Beispiel: Beliebige „Zentralkraft“

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left(f(r)\vec{r}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad U(\vec{r}) = -\int_{r_0}^{r} f(\tilde{r})\tilde{r}\, d\tilde{r}$$

3. Beispiel: Spezielles Feld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y \\ -9xz \\ 8xz^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0-(-9x) \\ 0-8z^2 \\ -9z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ -8z^2 \\ -9z-2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Es existiert kein Potential $U(\vec{r})$!!

4. Beispiel: Rotation um eine Achse

$$\vec{F}(\vec{r}) = \lambda\, \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{\omega} = \overrightarrow{const.}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left(\lambda \vec{\omega} \times \vec{r}\right) = 2\lambda\, \vec{\omega} \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Es existiert kein Potential $U(\vec{r})$!!

3.5 Andere Schreibweisen & Operatoren

Häufig wird insbesondere in der älteren Literatur die folgende Notation ohne den Nabla-Operator verwendet:

$$\text{Gradient von } U(\vec{r}): \quad \vec{\nabla} U(\vec{r}) = \operatorname{grad} U(\vec{r})$$

$$\text{Divergenz von } \vec{F}(\vec{r}): \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r})$$

$$\text{Rotation von } \vec{F}(\vec{r}): \quad \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r})$$

Der Nabla-Operator kann auch geschachtelt werden, beispielsweise ist die Divergenz des Gradienten von einem Skalarfeld folgendermaßen definiert:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} U(\vec{r})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$

„Laplace-Operator“ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$

Zusammenfassung

$\vec{F}(\vec{r})$ sei ein Kraftfeld. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $\int\limits_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ist vom Weg C unabhängig, d.h. $\vec{F}(\vec{r})$ ist *konservativ*.
- $\oint\limits_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ für jeden geschlossenen Weg C.
- $\vec{F}(\vec{r})$ ist als *Gradient* eines Potentials $U(\vec{r})$ darstellbar, d.h. $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} U(\vec{r})$ mit $U(\vec{r}) = -\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$
- $\vec{F}(\vec{r})$ ist *Wirbelfrei*, d.h. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$