

Inhalt der Vorlesung B1

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Einleitung

Ladungen & Elektrostatische Felder

Elektrischer Strom

Magnetostatik

Elektrodynamik: Die Maxwell'schen Gleichungen

Wechselstromnetzwerke

Elektromagnetische Wellen & Strahlung

5. Optik

Licht als elektromagnetische Welle

Geometrische Optik

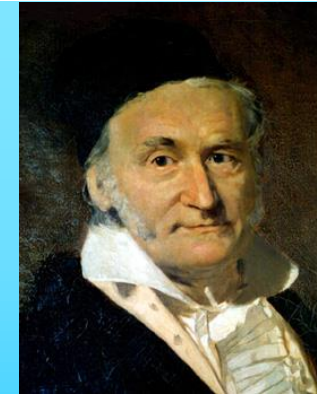
Optische Abbildungen

Wellenoptik

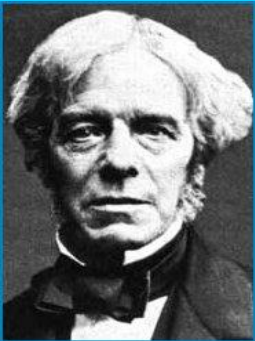


Zusammenfassende Darstellung aller Maxwell-Gleichungen

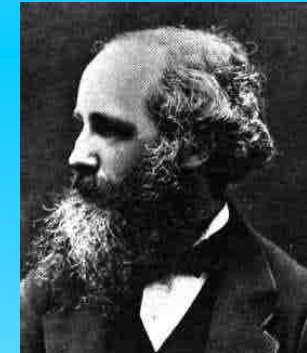
$$(1) \quad \oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(O)} \rho dV$$



$$(2) \quad \oiint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

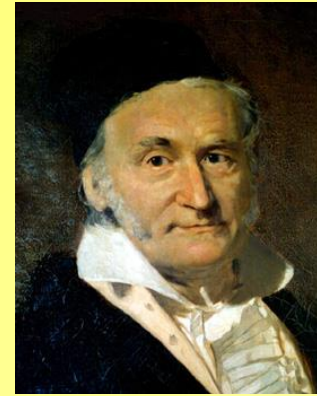


$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



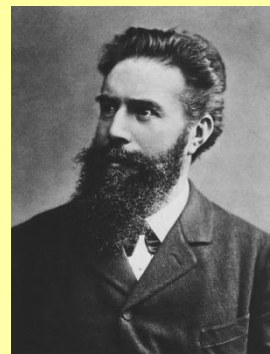
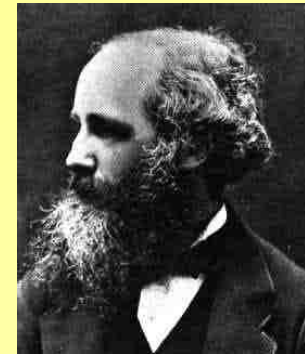
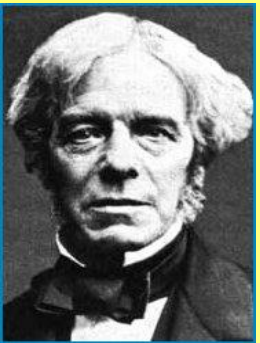
Differenzielle Form der Maxwell-Gleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



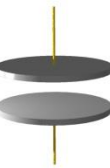
$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$





Ladungserhaltung & Maxwell-Gleichungen

Die 4. Maxwell'sche Gleichung lautet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wenn auf beiden Seiten die Divergenz berechnet wird, dann folgt:

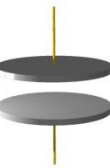
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Für jedes Vektorfeld gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

Damit folgt sofort:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$



$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right)$$

Wegen der ersten Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

folgt für die rechte Seite der obigen Gleichung:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung, die die Ladungserhaltung eines abgeschlossenen Systems widerspiegelt. Damit ist gezeigt, dass die Ladungserhaltung bereits in den Maxwell-Gleichungen enthalten ist.



Elektrische und magnetische Felder in Materie

Bisher wurden aus der Elektronendichte
und der Stromdichte

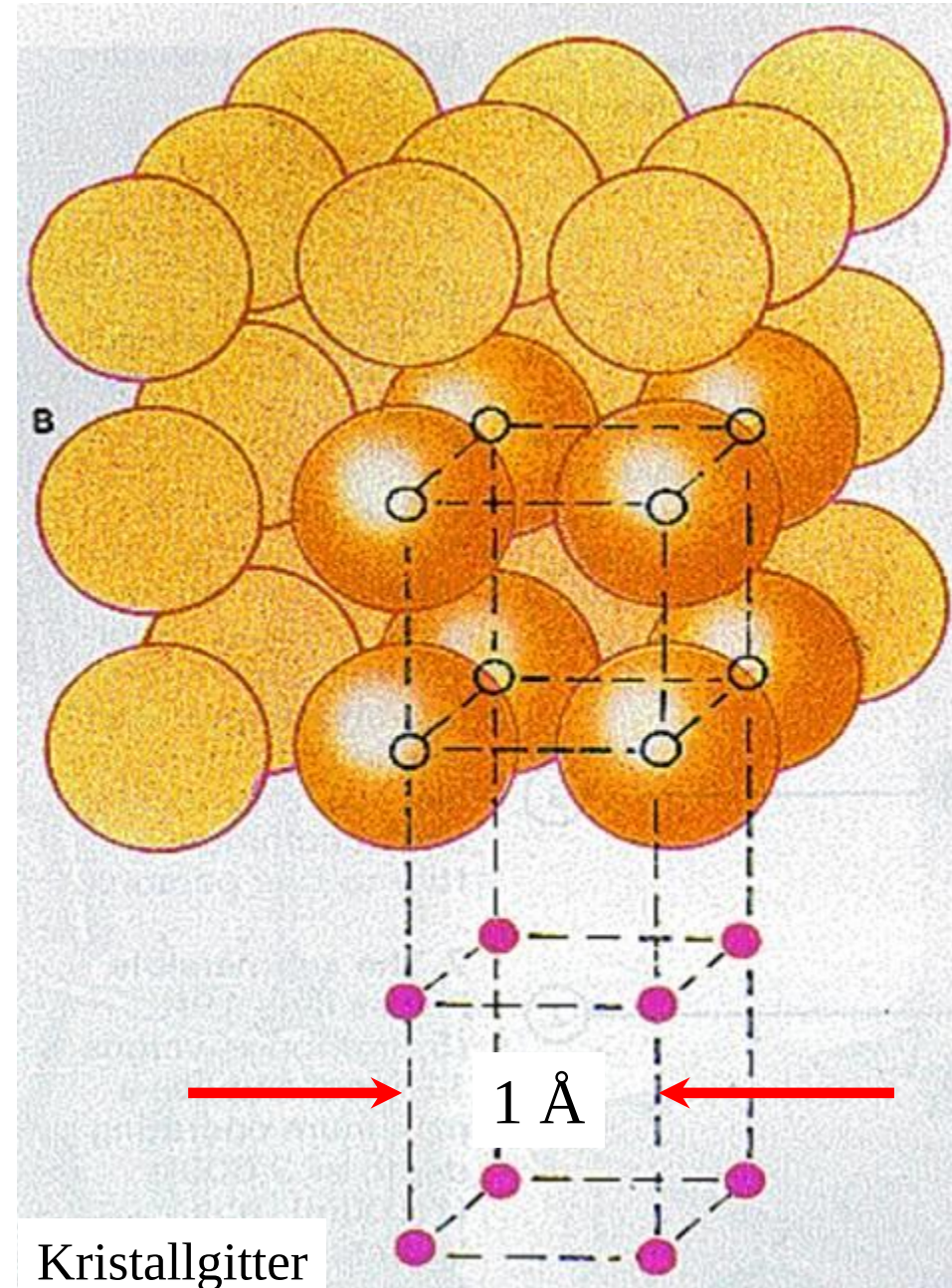
$$\rho(\vec{r}, t) \quad \text{und} \quad \vec{j}(\vec{r}, t)$$

die elektrischen und magnetischen
Felder

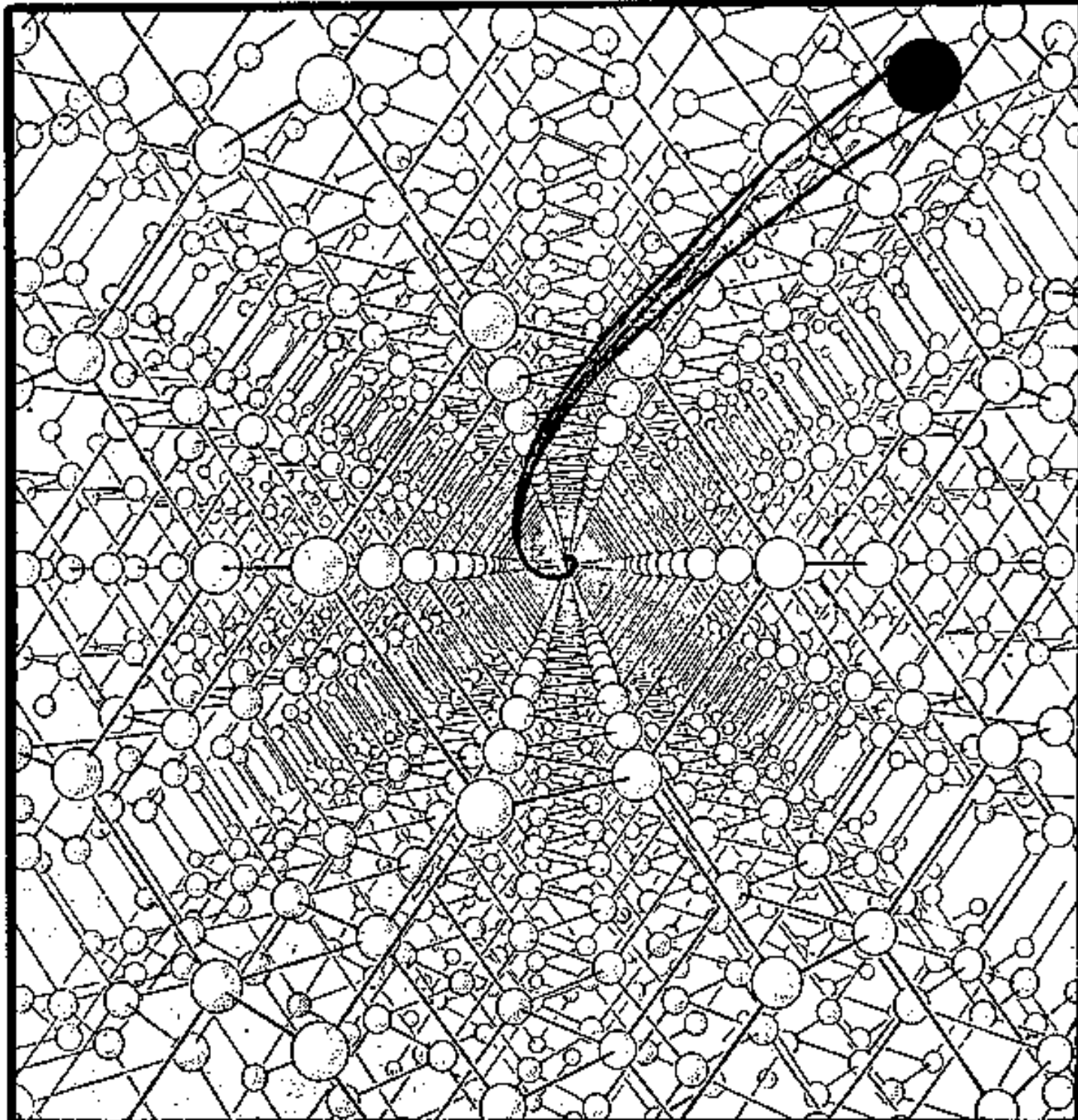
$$\vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{r}, t)$$

mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen
bestimmt. Diese gelten im Prinzip bis
hinab zu atomaren Dimensionen, also
bis etwa:

$$d_{\text{Atom}} \approx 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$$



Die auf atomaren Dimensionen stark variierenden lokalen Felder um die einzelnen Atome werden von einem durch den Kristall fliegenden geladenen Teilchen „gesehen“ (das Teilchen kann sogar durch die Potentiale stabil geführt werden $\Rightarrow$ „Channeling“).



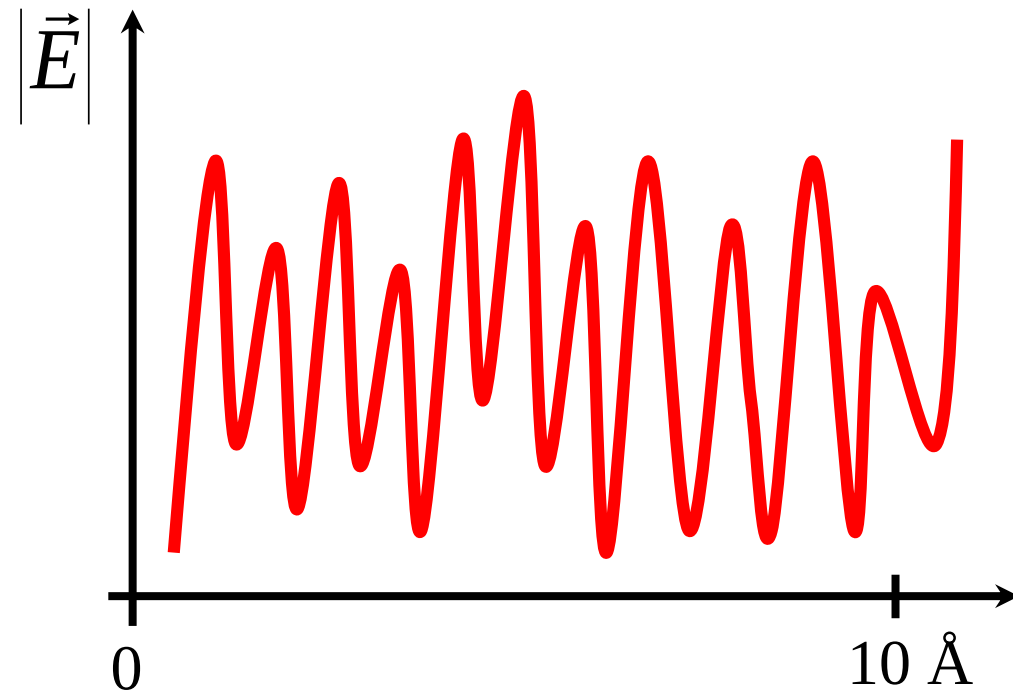


Die Ladungs- und Stromdichten sind in atomaren Dimensionen also starken Schwankungen unterworfen, d.h.

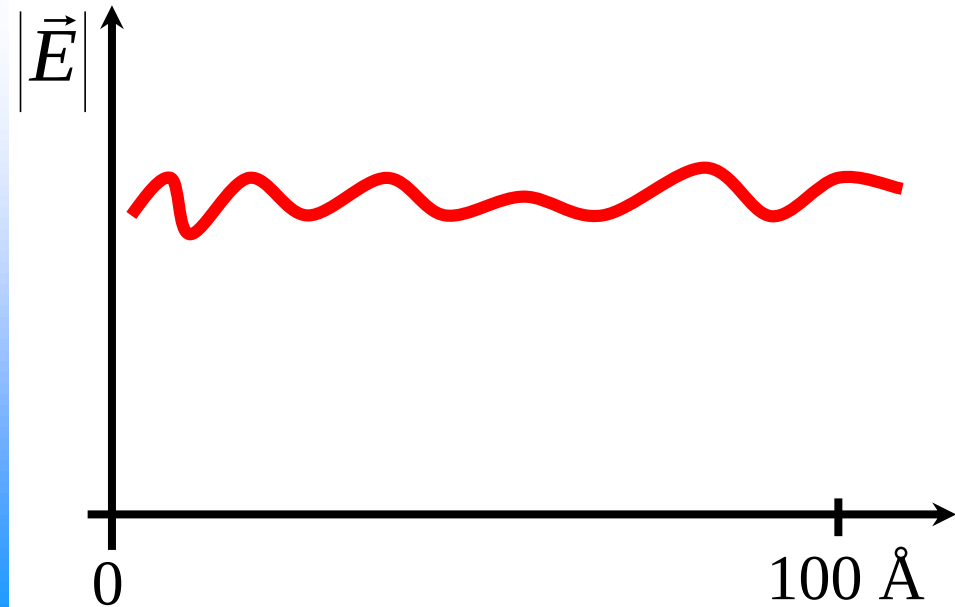
$$\rho_{\text{Atom}}(\vec{r}, t), \quad \vec{j}_{\text{Atom}}(\vec{r}, t)$$

sind sehr stark ortsabhängig. Dies kann folgendermaßen veranschaulicht werden:

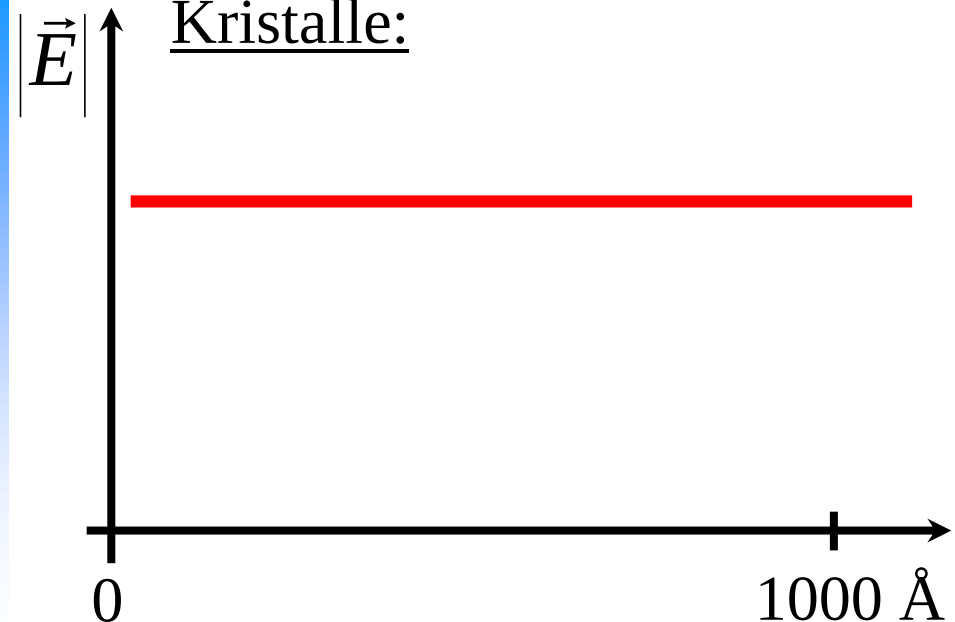
Atomare Struktur:



Riesenmoleküle, Cluster:



Kristalle:





Die Maxwell-Gleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

gelten aber für *alle* Felder, Ladungen und Ströme. Sie gelten also sowohl für die *makroskopischen* „von Außen“ vorgegebenen, als auch für die *mikroskopischen* Ladungsverteilungen und Ströme.

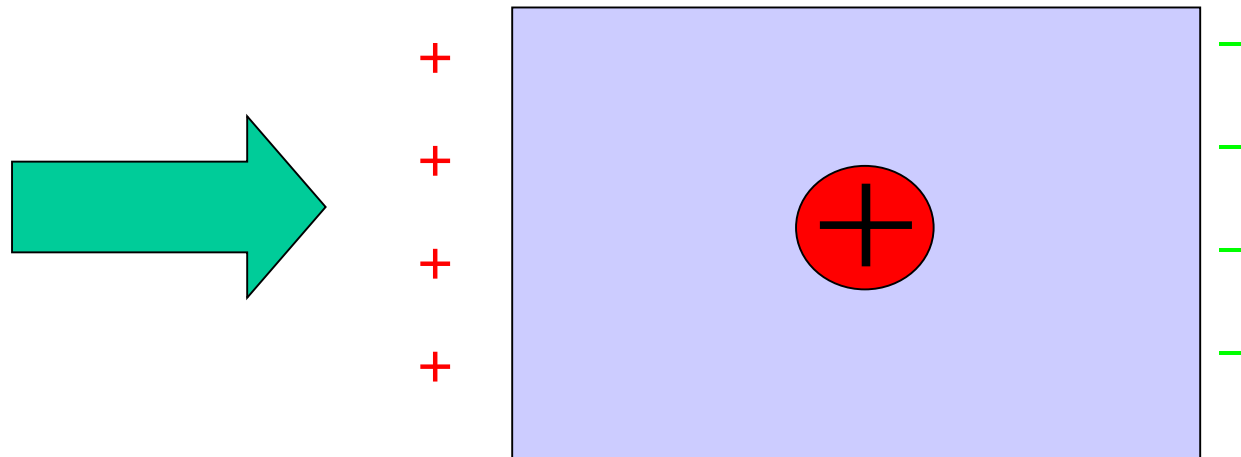
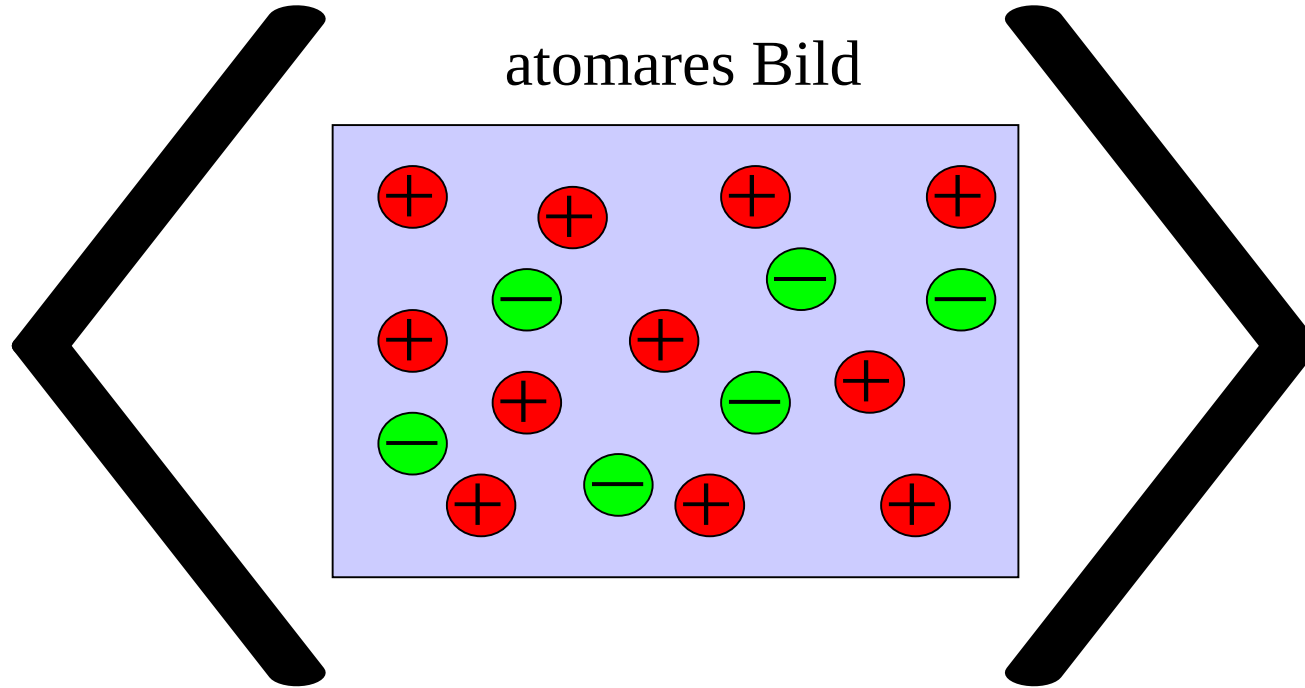
In Materie befinden sich aber ungefähr 10^{23} Teilchen, so dass eine exakte Feldberechnung an jedem Ort nicht sinnvoll erscheint, sondern „gemittelte“ Größen betrachtet werden müssen. Die Maxwell-Gleichungen lauten dann:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \langle \vec{E} \rangle = -\frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \langle \vec{B} \rangle = \mu_0 \left(\langle \vec{j} \rangle + \epsilon_0 \frac{\partial \langle \vec{E} \rangle}{\partial t} \right)$$

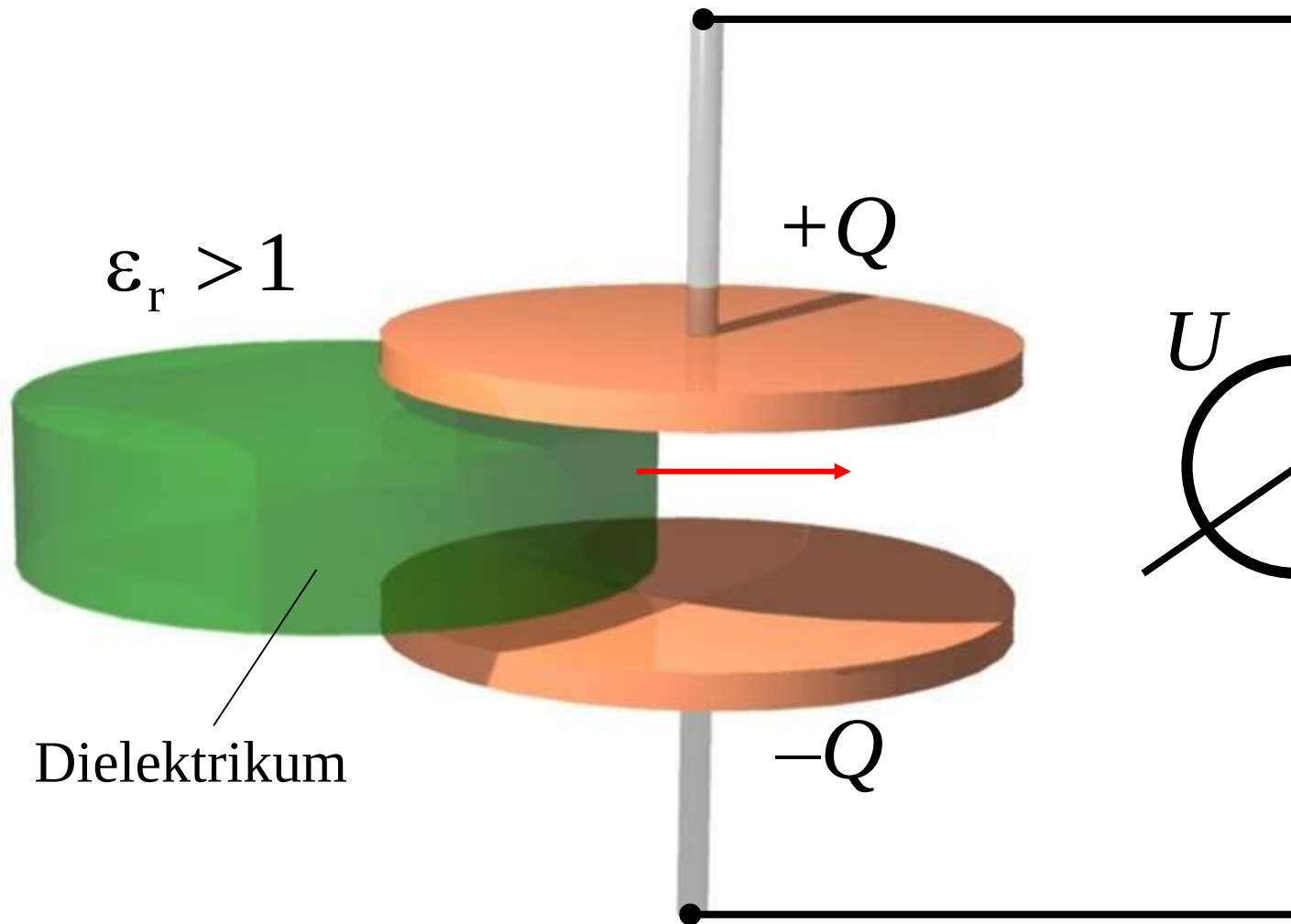


makroskopisches
Bild
(Ladung + Dipol +
höhere Multipole)



Das elektrische Feld in Materie

Versuch: Dielektrikum im Kondensator



Durch Einbringen eines Materials zwischen die Platten erhöht sich die Kapazität des Kondensators.

$$C = \frac{Q}{U}$$



Wir definieren die Dielektrizitätskonstante ε_r eines Mediums durch den folgenden Zusammenhang:

$$\varepsilon_r = \frac{C_{\text{Dielek.}}}{C_{\text{Vakuum}}}$$

Dabei ist $C_{\text{Dielek.}}$ die Kapazität eines Plattenkondensators, der mit dem Medium zwischen den Platten aufgefüllt wurde, und C_{Vakuum} die Kapazität ohne Medium zwischen den Platten. Es ist immer $\varepsilon_r \geq 1$.

Für die Kapazität C eines Kondensators mit der Fläche A und dem Plattenabstand d und einem Medium mit der

Dielektrizitätskonstanten ε_r zwischen den Platten gilt daher:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

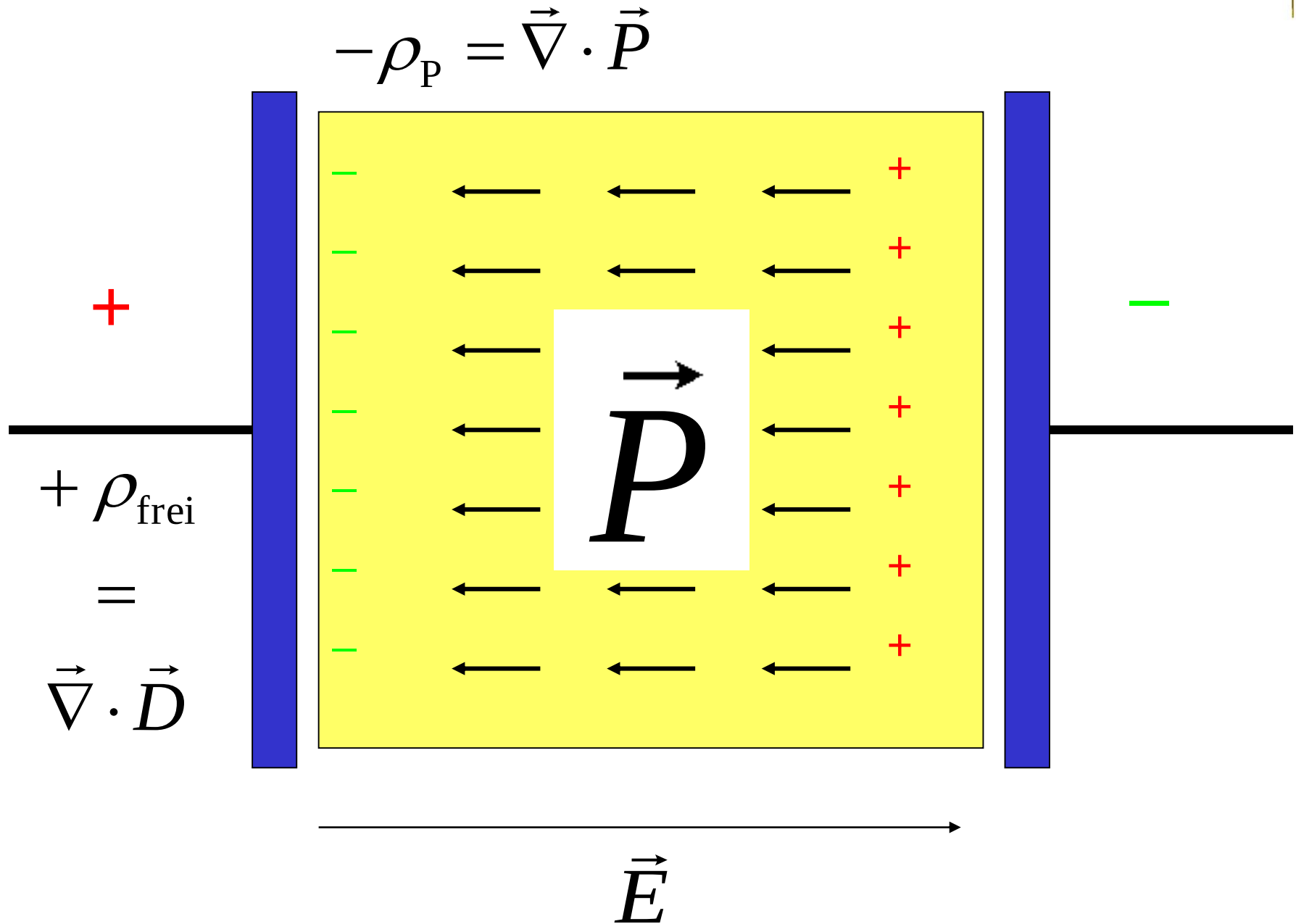
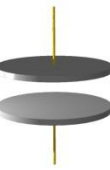
Die Kapazität des Kondensators vergrößert sich also um den Faktor ε_r , d.h. es kann bei gleicher Spannung wegen $C = Q/U$ mehr Ladung auf den Kondensatorplatten gespeichert werden.

Es stellt sich heraus, dass die Dielektrizitätskonstante ε_r eines Mediums stark Materialabhängig ist. Wir werden im Folgenden sehen, dass ε_r mit der Polarisierung des Materials zusammenhängt.

Tabelle 21.1 Dielektrizitätszahlen und Durchschlagsfestigkeiten einiger Stoffe

Material	Dielektrizitätszahl ϵ_r	Durchschlagsfestigkeit/kV · mm ⁻¹
Bakelit	4,9	24
Glas	5,6	14
Glimmer	5,4	10 – 100
Luft	1,00059	3
Neopren	6,9	12
Papier	3,7	16
Paraffin	2,1 – 2,5	10
Plexiglas	3,4	40
Polystyrol	2,55	24
Porzellan	7	5,7
Transformatorenöl	2,24	12
Wasser (20 °C)	80	

$$\epsilon_r = \frac{C_{\text{Dielek.}}}{C_{\text{Vakuum}}}$$



Polarisation

Orientierungspolarisation:

Tritt nur bei Molekülen auf,
die ein *permanentes*
Dipolmoment besitzen

Tritt nicht bei Atomen auf

Verschiebungspolarisation:

Tritt bei *allen* Molekülen auf

Tritt auch bei Atomen auf

Ionenpolarisation:

Verschiebung von unter-
schiedlich geladenen Ionen
relativ zueinander

Elektronenpolarisation:

Verschiebung von Elektronen
relativ zu positiv geladenen
Atomkernen

Atomare Mechanismen der dielektrischen Polarisation

Polarisation

```
graph TD; A[Polarisation] --> B[Orientierungspolarisation:]; A --> C[Verschiebungspolarisation:]; C --> D[Ionenpolarisation:]; C --> E[Elektronenpolarisation:];
```

Orientierungspolarisation:

Tritt nur bei Molekülen auf,
die ein *permanentes
Dipolmoment* besitzen

Tritt nicht bei Atomen auf

Verschiebungspolarisation:

Tritt bei *allen* Molekülen auf

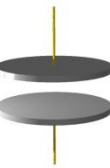
Tritt auch bei Atomen auf

Ionenpolarisation:

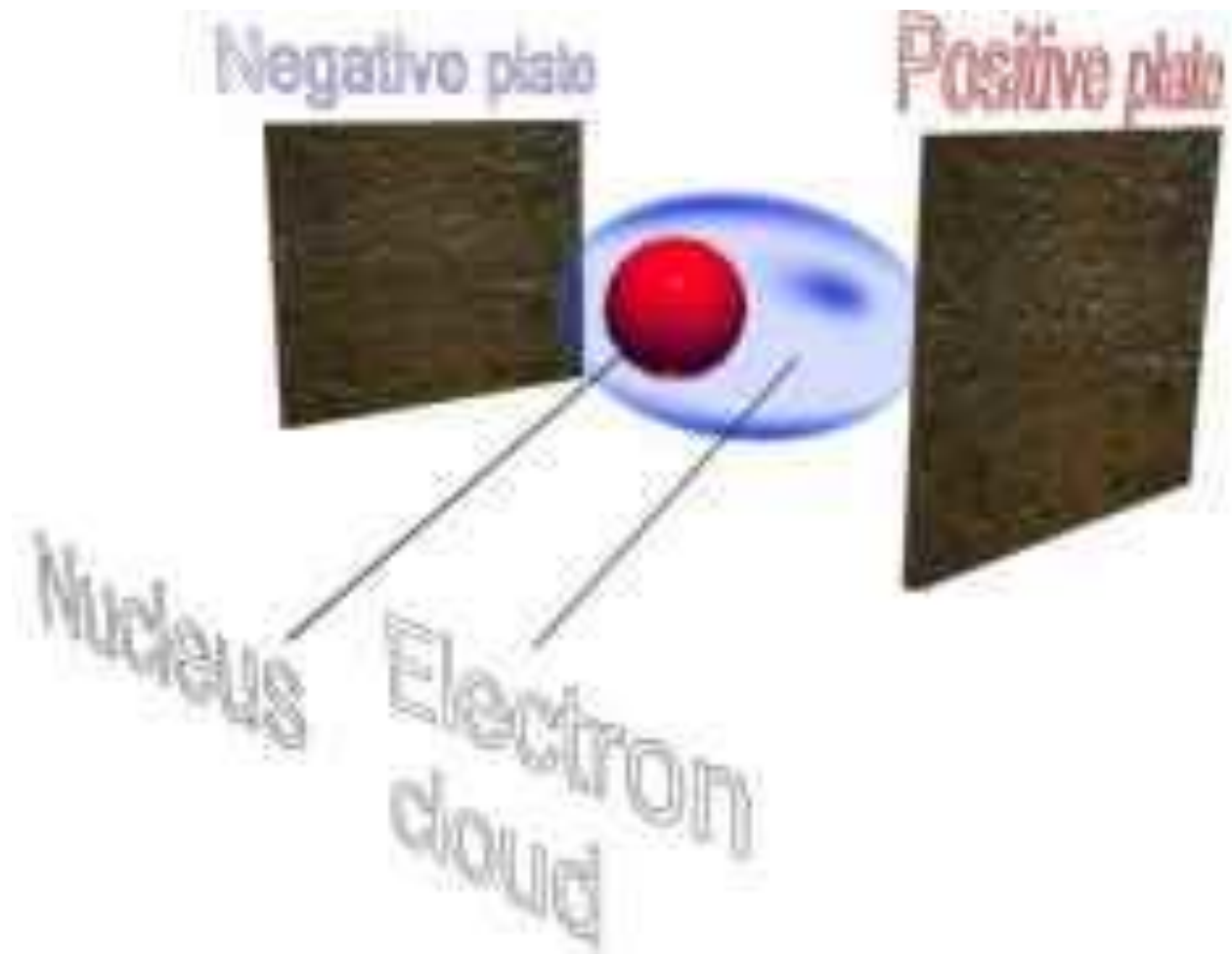
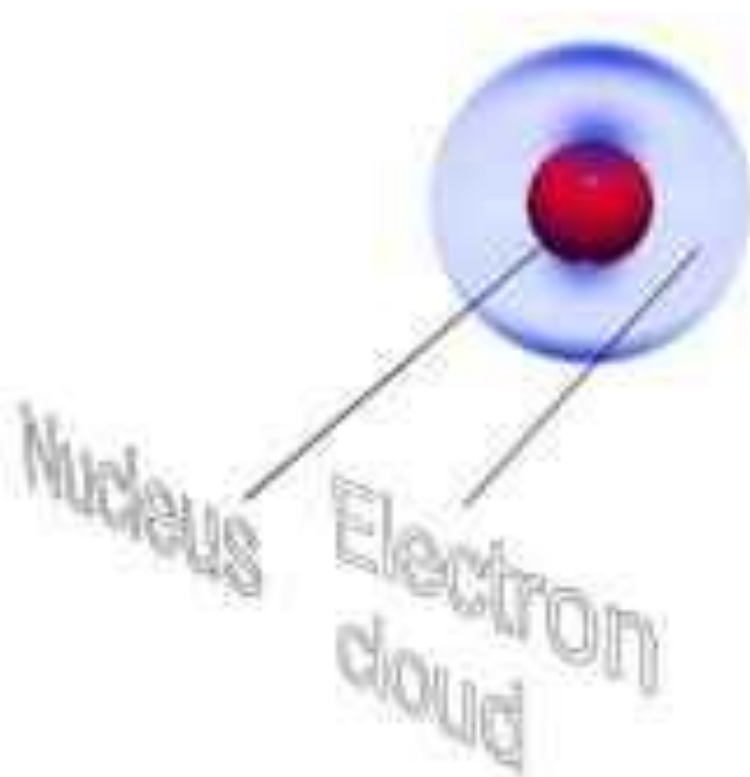
Verschiebung von unter-
schiedlich geladenen Ionen
relativ zueinander

Elektronenpolarisation:

Verschiebung von Elektronen
relativ zu positiv geladenen
Atomkernen



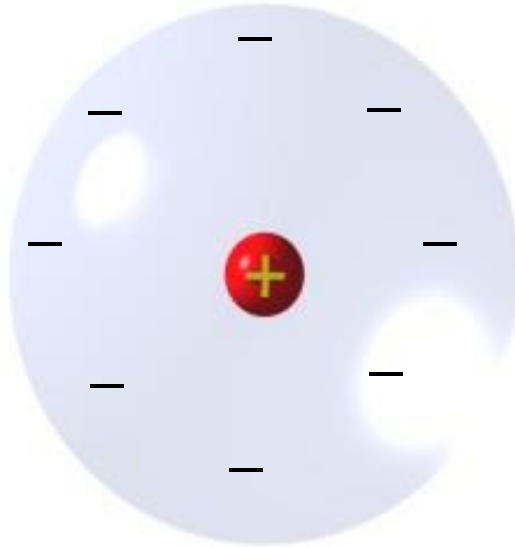
Verschiebungspolarisation



Der negative Ladungsschwerpunkt verschiebt sich in einem äußeren Feld.

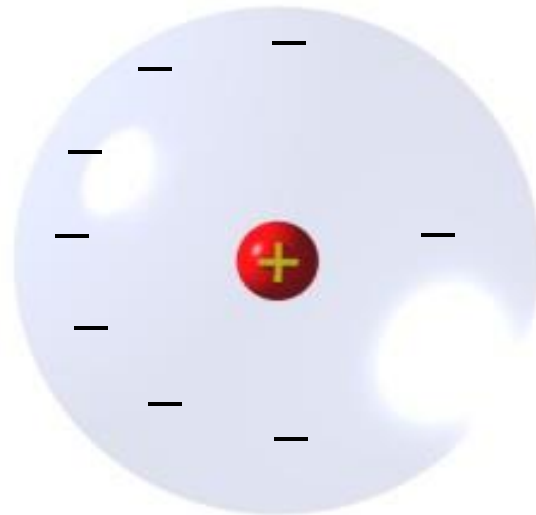


Unpolarisiertes Atom

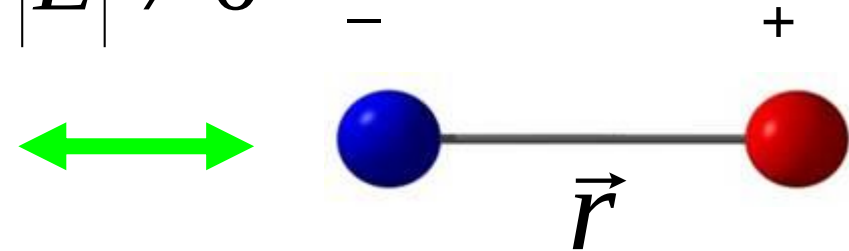


$$|\vec{E}| = 0$$

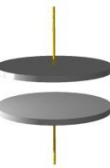
polarisiertes Atom



$$|\vec{E}| \neq 0$$



elektrischer
Dipol



Verschiebungspolarisation
bei Kristallen. Die positiven
Ionen werden durch ein
äußeres Feld verschoben.

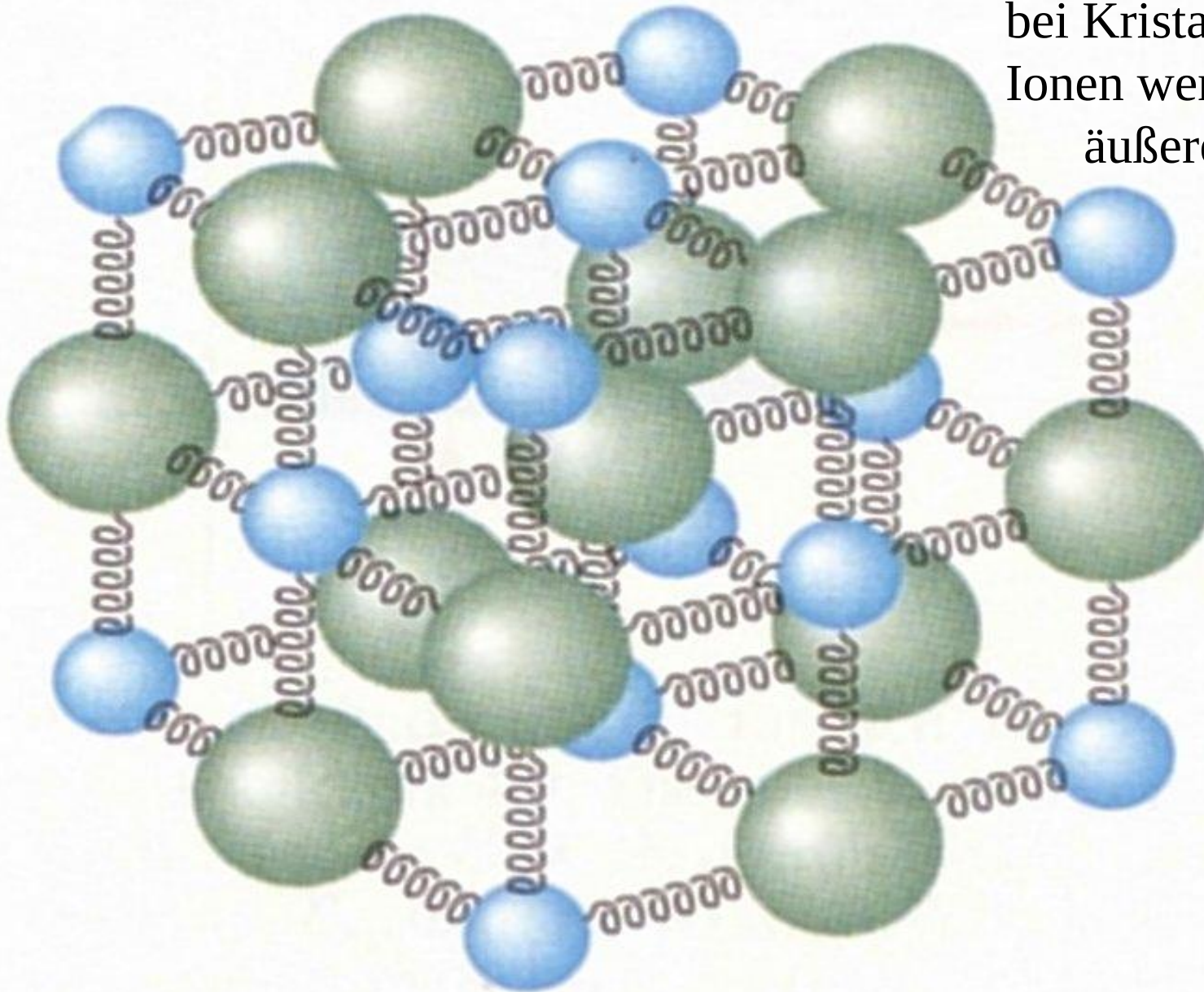


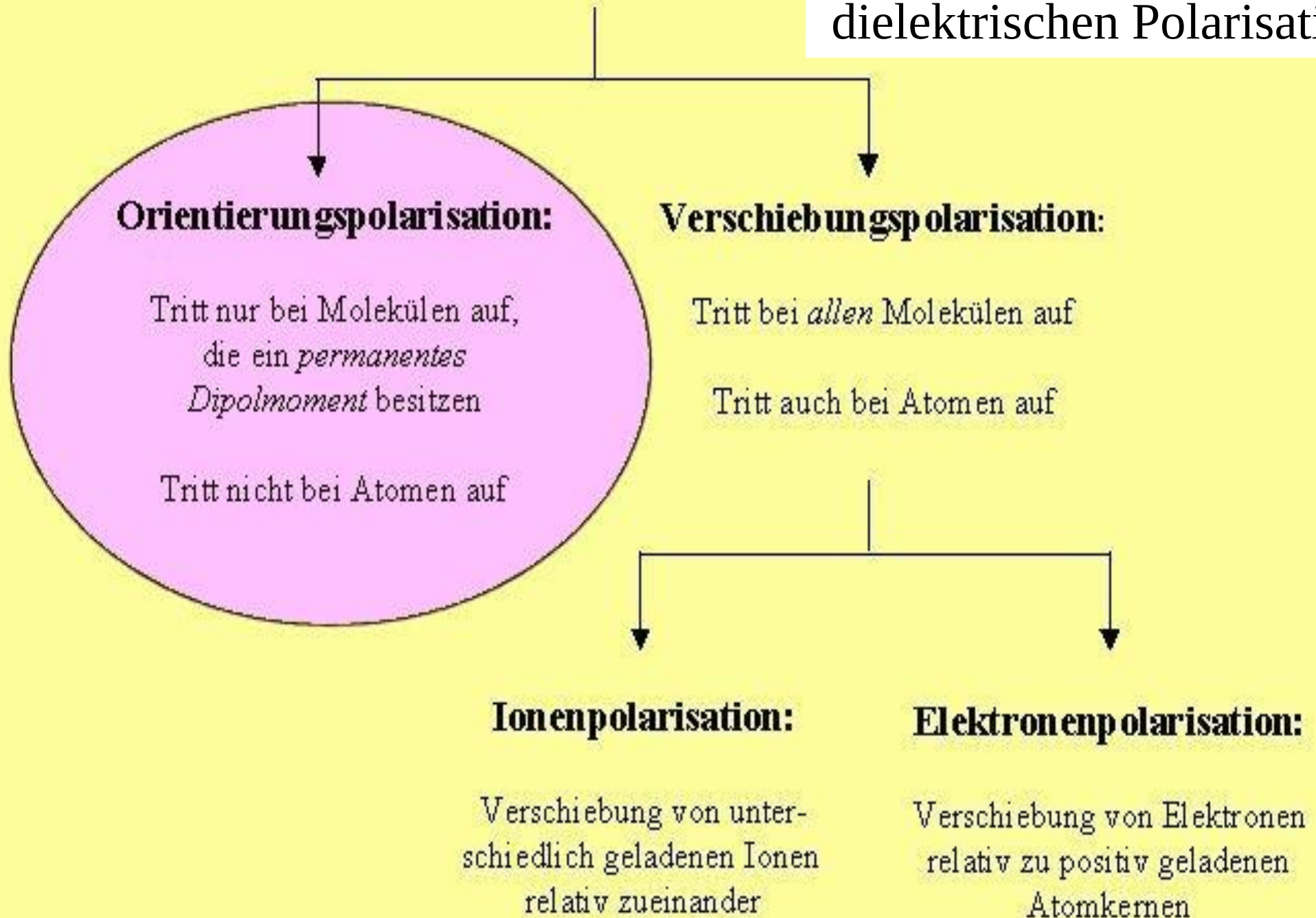
Tabelle 13.1: Elektronische Polarisierbarkeiten einiger Ionen in 10^{-24} cm^3 .

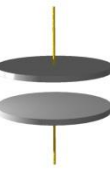
			He	Li ⁺	Be ²⁺	B ³⁺	C ⁴⁺
Pauling			0,201	0,029	0,008	0,003	0,0013
JS				0,029			
	O ²⁻	F ⁻	Ne	Na ⁺	Mg ²⁺	Al ³⁺	Si ⁴⁺
Pauling	3,88	1,04	0,390	0,179	0,094	0,052	0,0165
JS-(TKS)	(2,4)	0,858		0,290			
	S ²⁻	Cl ⁻	Ar	K ⁺	Ca ²⁺	Sc ³⁺	Ti ⁴⁺
Pauling	10,2	3,66	1,62	0,83	0,47	0,286	0,185
JS-(TKS)	(5,5)	2,947		1,133	(1,1)		(0,19)
	Se ²⁻	Br ⁻	Kr	Rb ⁺	Sr ²⁺	Y ³⁺	Zr ⁴⁺
Pauling	10,5	4,77	2,46	1,40	0,86	0,55	0,37
JS-(TKS)	(7)	4,091		1,679	(1,6)		
	Te ²⁻	I ⁻	Xe	Cs ⁺	Ba ²⁺	La ³⁺	Ce ⁴⁺
Pauling	14,0	7,10	3,99	2,42	1,55	1,04	0,73
JS-(TKS)	(9)	6,116		2,743	(2,5)		

Werte von L. Pauling, Proc. Roy. Soc. (London) **A114**, 181 (1927); S.S. Jaswal und T.B. Sharma, J. Phys. Chem. Solids **34**, 509 (1973); J. Tessmann, A. Kahn und W. Shockley, Phys. Rev. **92**, 890 (1953). Die TKS-Polarisierbarkeiten gelten bei der Frequenz der Natrium D-Linien. Die Werte sind in CGS-Einheiten angegeben; um sie in SI-Einheiten zu erhalten, multipliziert man sie mit $1/9 \cdot 10^{-15}$.

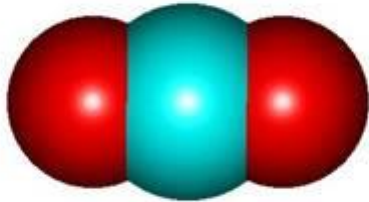
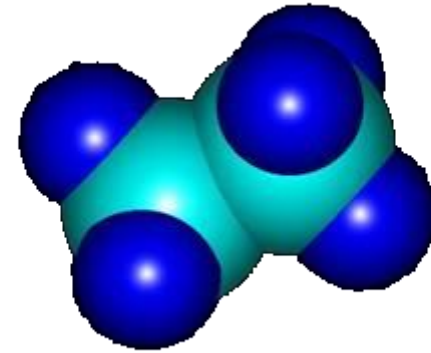
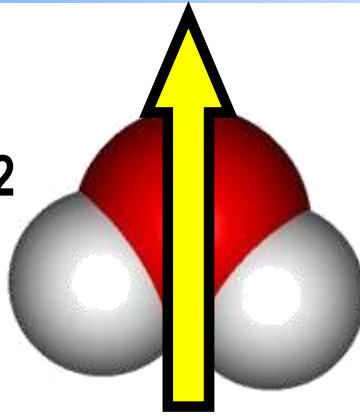
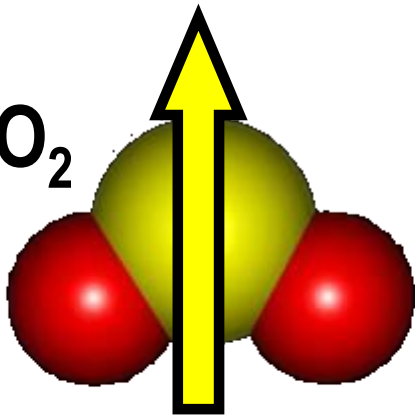
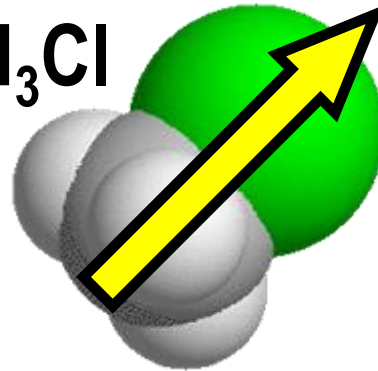
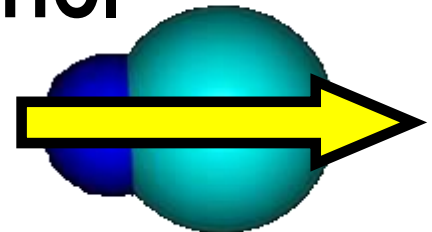
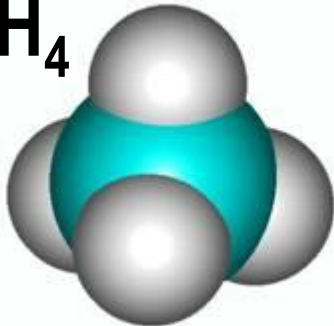
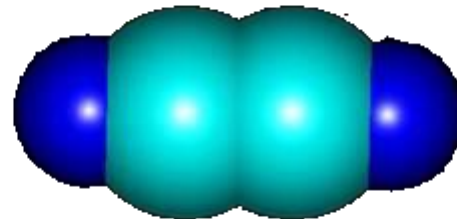
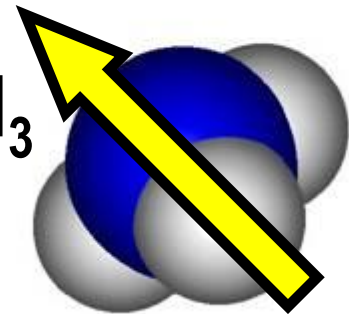
Atomare Mechanismen der dielektrischen Polarisation

Polarisation



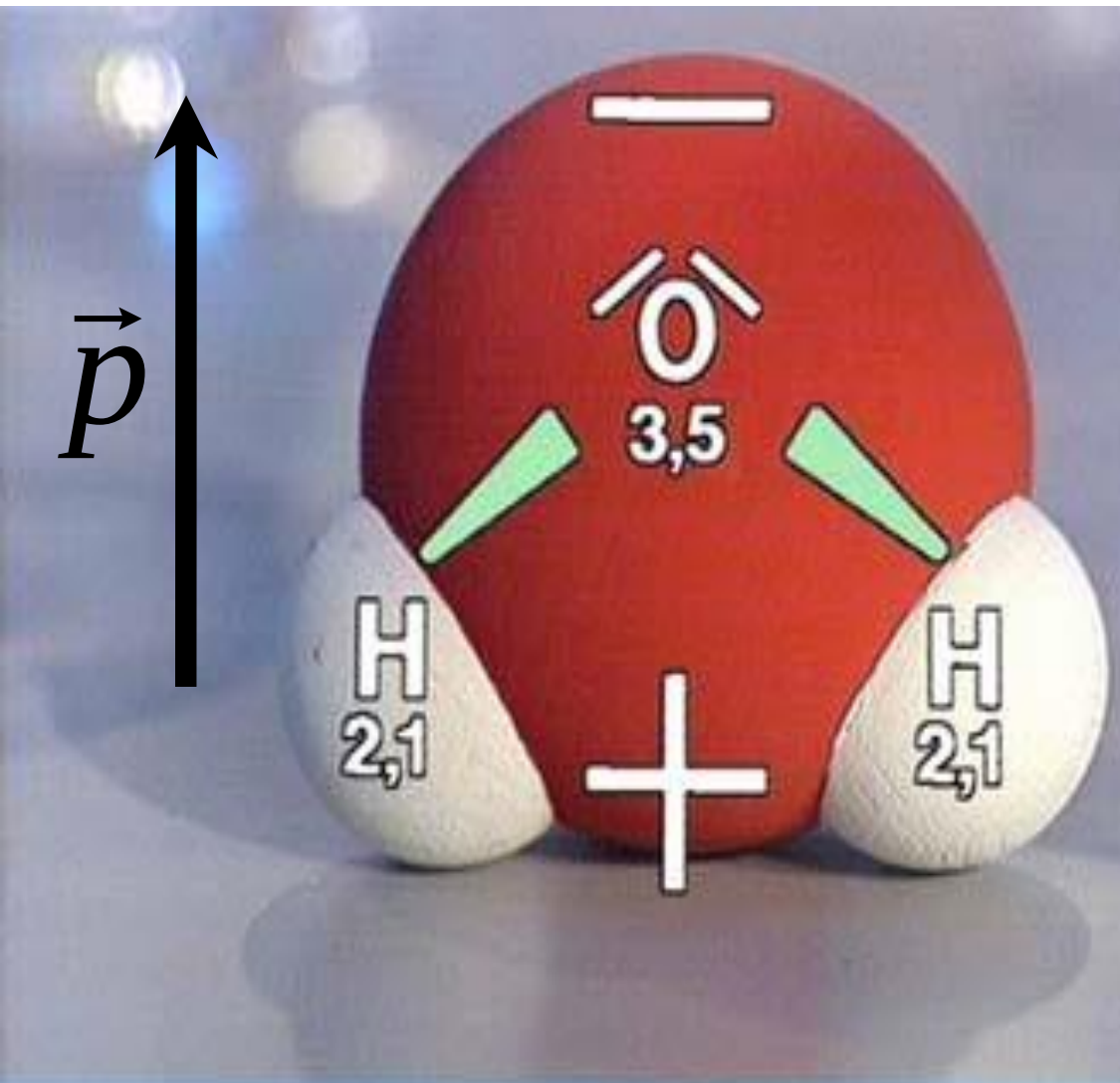
 CO

2

 H_2O  C_2H_6 SO_2  CH_3Cl  HCl  CH_4  C_2H_2  NH_3 



Wasser als permanenter Dipol



Wasserdipol

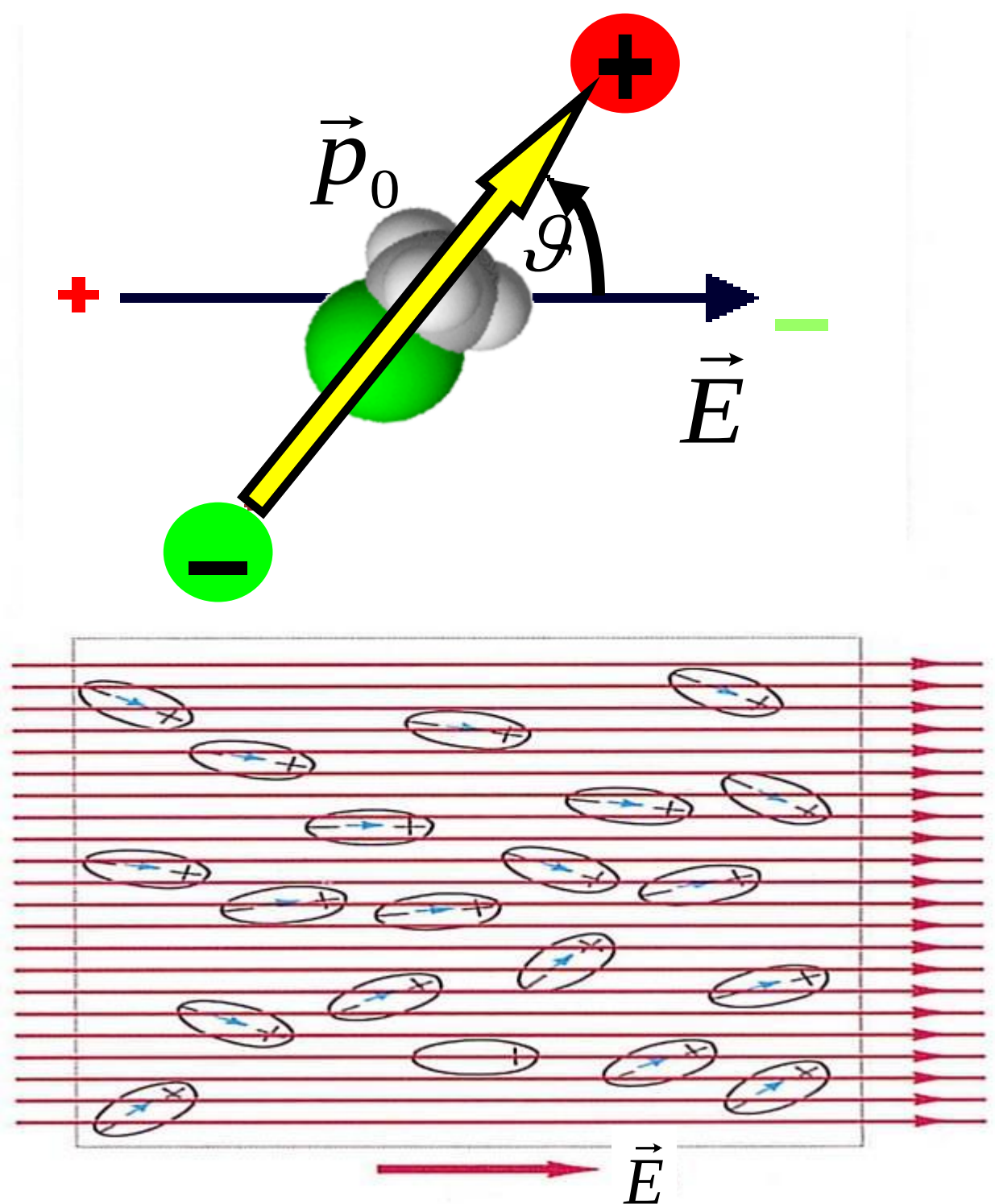
H 2,1	Elektronegativität						He
Li 1,0	Be 1,5	B 2,0	C 2,5	N 3,0	O 3,5	F 4,0	Ne
Na 0,9	Mg 1,2	Al 1,5	Si 1,8	P 2,1	S 2,5	Cl 3,0	Ar
K 0,8	Ca 1,0	Ga 1,6	Ge 1,8	As 2,0	Se 2,4	Br 2,8	Kr
Rb 0,8	Sr 1,0	In 1,7	Sn 1,8	Sb 1,9	Te 2,1	I 2,5	Xe
Cs 0,7	Ba 0,9	Tl 1,8	Pb 1,8	Bi 1,9	Po 2,0	At 2,2	Rn



Permanente Dipolmomente einiger Substanzen

Stoff	$p_0 \cdot 10^{-18} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{5/2} \text{ s}^{-1}$	Stoff	$p_0 \cdot 10^{-18} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{5/2} \text{ s}^{-1}$
H ₂	0	CO	0,1
N ₂	0	CO ₂	0
O ₂	0	CCl ₄	0
Ar	0	H ₂ O	1,9
HCl	1,03	NH ₃	1,44
HBr	0,76	CH ₃ Cl	1,86
HJ	0,38		

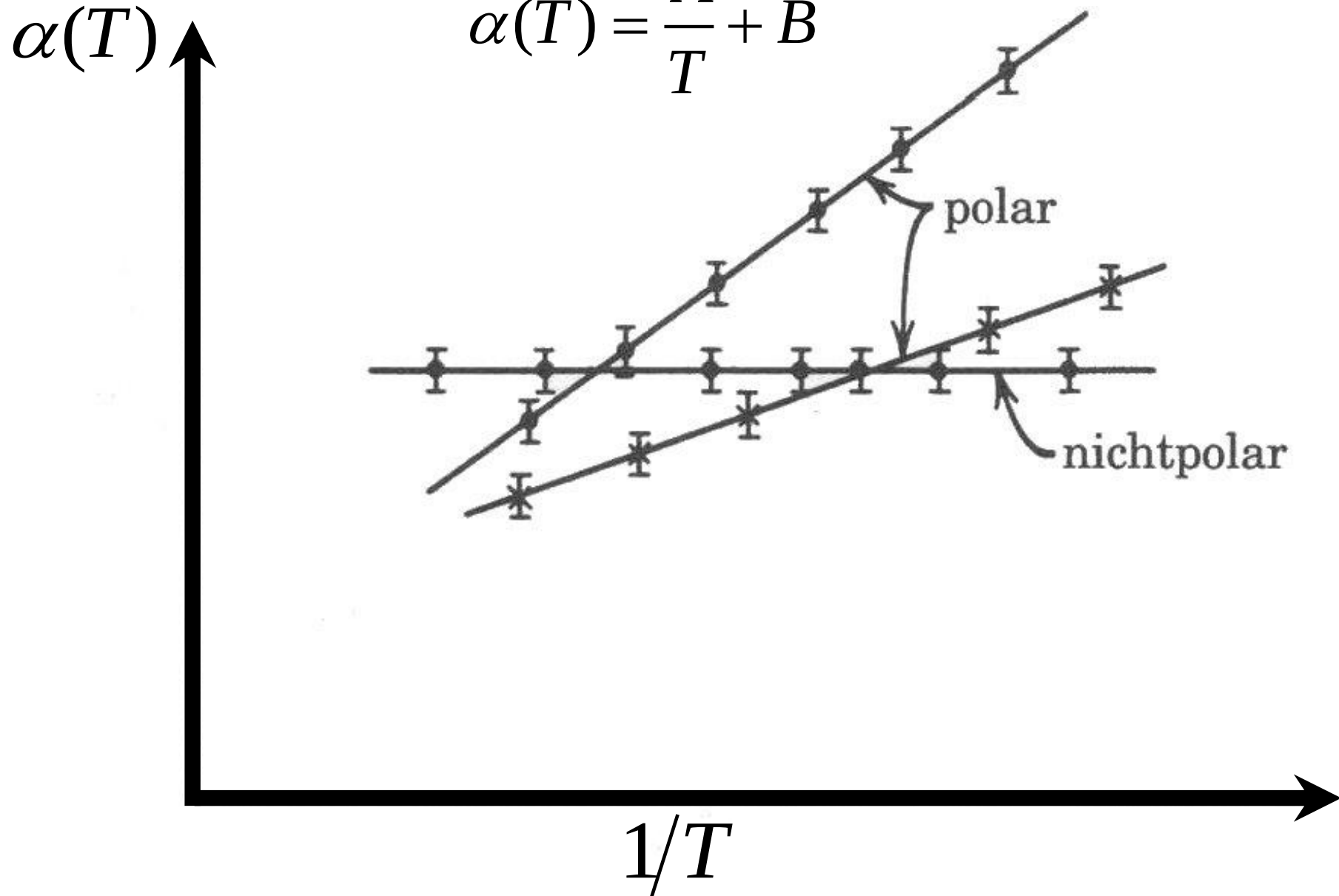
Permanente
Dipole
richten sich
im
elektrischen
Feld aus !

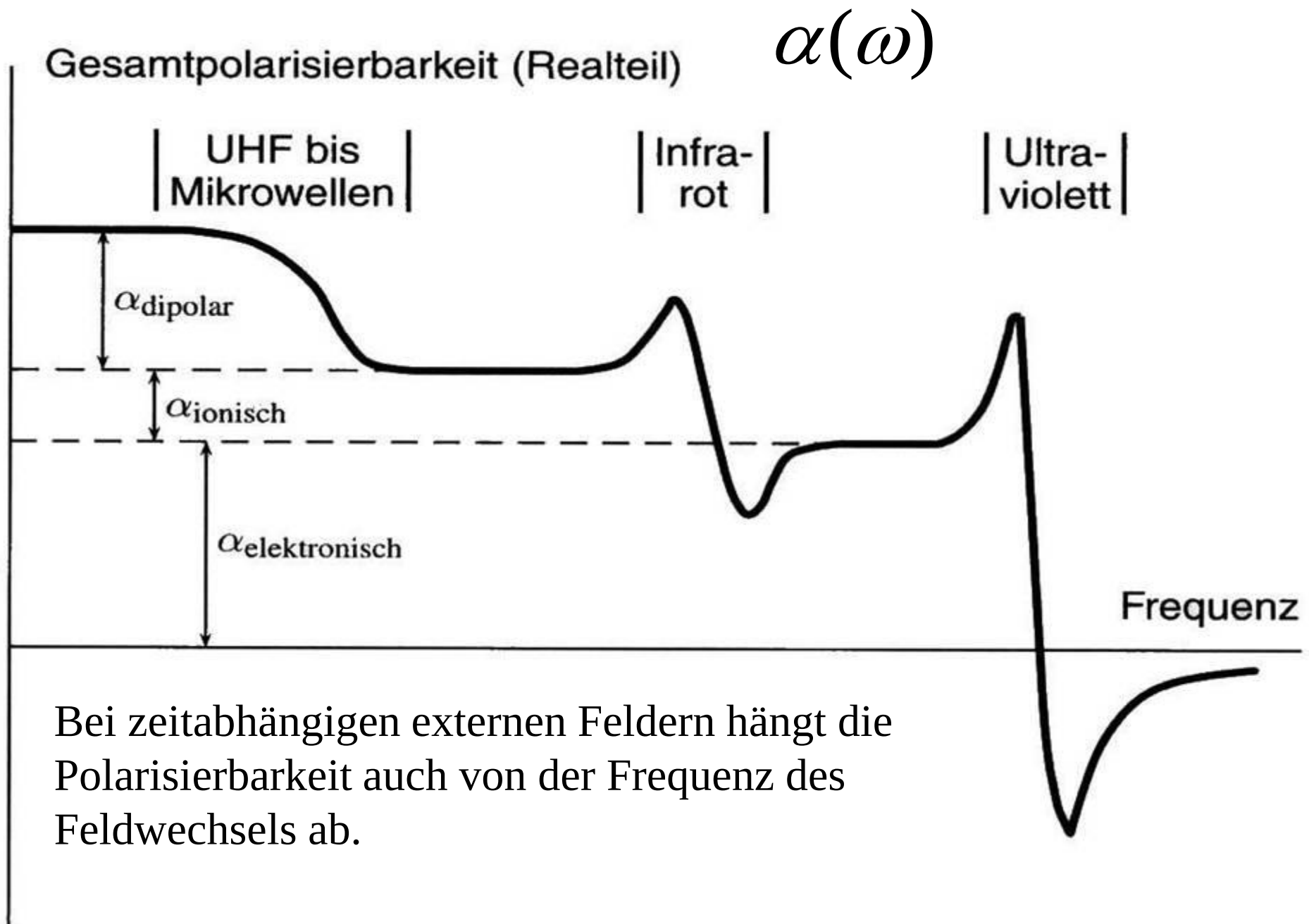




Die Polarisierbarkeit α hängt von der Temperatur ab. Es gilt:

$$\alpha(T) = \frac{A}{T} + B$$





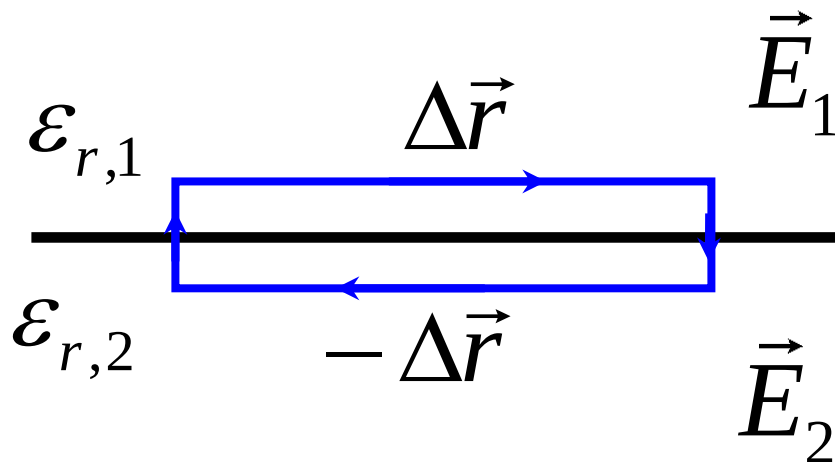


Das elektrische Feld an Grenzflächen

Es soll nun das Verhalten des elektrischen Feldvektors an einer Grenzfläche zweier Medien mit den Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_{r,1}$ und $\epsilon_{r,2}$ bestimmt werden.

(i) Tangentiale Komponente:

Wir betrachten den folgenden, rechteckigen Weg innerhalb der beiden Medien, wobei die beiden senkrechten Wegstücke infinitesimal klein sein sollen:



Dann gilt im Fall der Elektrostatik für das Integral über diesen geschlossenen Weg:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{1,\square} \cdot \Delta\vec{r} + \vec{E}_{2,\square} \cdot (-\Delta\vec{r}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{E}_{1,\square} - \vec{E}_{2,\square}) \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

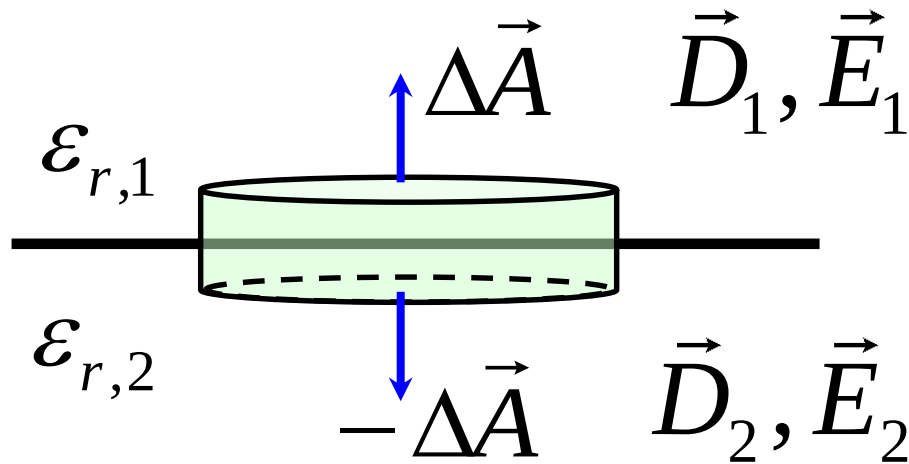
$$\Rightarrow \vec{E}_{1,\square} = \vec{E}_{2,\square}$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist an der Grenzfläche zweier Medien stetig.



(ii) Senkrechte Komponente:

Wir betrachten nun die folgende zylinderförmige „Dose“ innerhalb der beiden Medien, wobei die Höhe der Dose infinitesimal klein sein soll.



Dann gilt wegen der 1. Maxwell'schen Gleichung für das geschlossene Oberflächenintegral über das Feld der dielektrischen Verschiedung im Fall, dass sich keine freien Ladungen an der Grenzfläche befinden:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D}_{1,\perp} \cdot \Delta\vec{A} + \vec{D}_{2,\perp} \cdot (-\Delta\vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{D}_{1,\perp} - \vec{D}_{2,\perp}) \cdot \Delta\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D}_{1,\perp} = \vec{D}_{2,\perp}$$

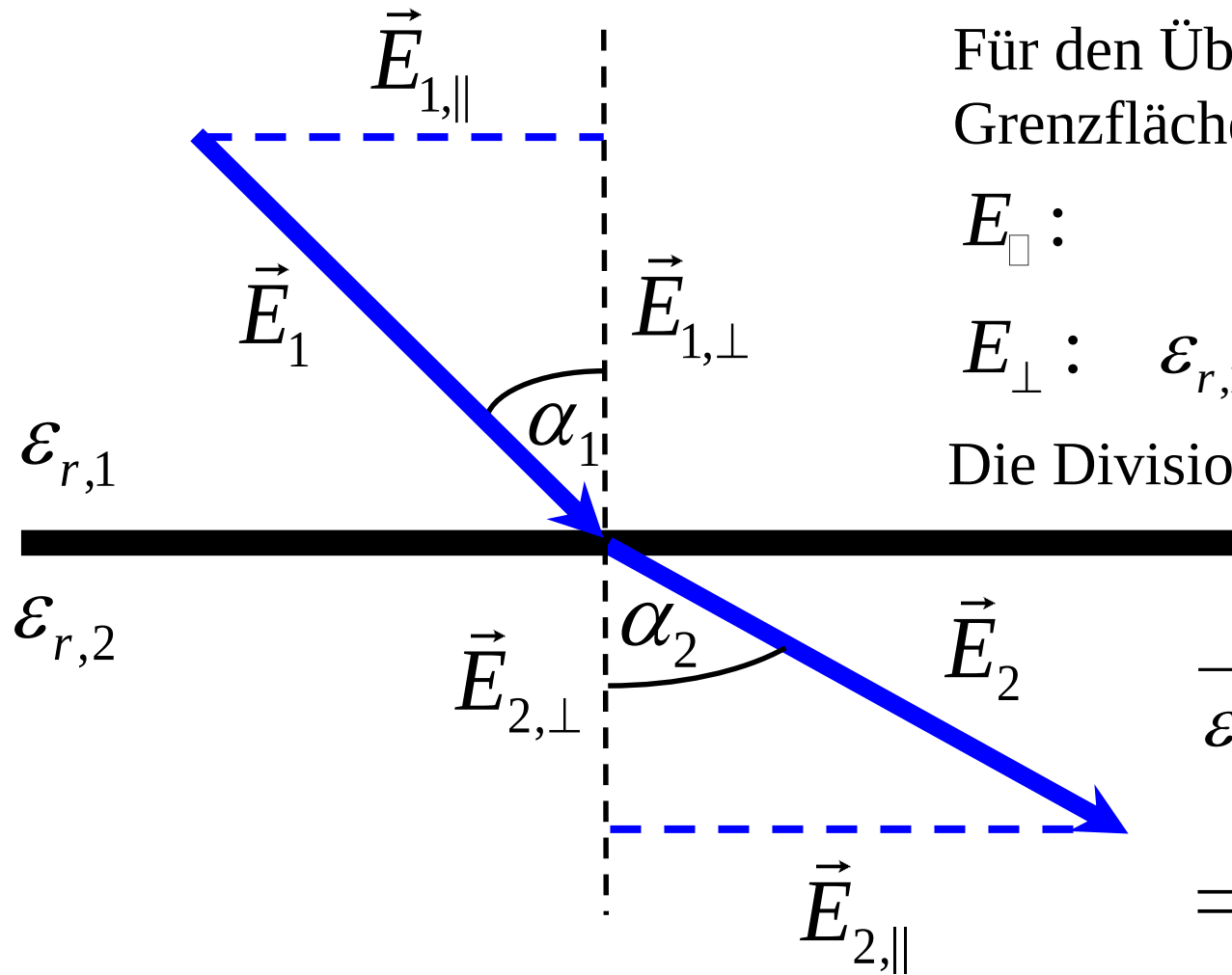
Wegen

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

folgt daraus:

$$\epsilon_{r,1} \vec{E}_{1,\perp} = \epsilon_{r,2} \vec{E}_{2,\perp}$$

Die senkrechte Komponente des elektrischen Feldes macht an der Grenzfläche zweier Medien einen Sprung.



Für den Übergang des Feldes an einer Grenzfläche gilt dann:

$$E_{\parallel} : \quad E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$$

$$E_{\perp} : \quad \varepsilon_{r,1} E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon_{r,2} E_2 \cos \alpha_2$$

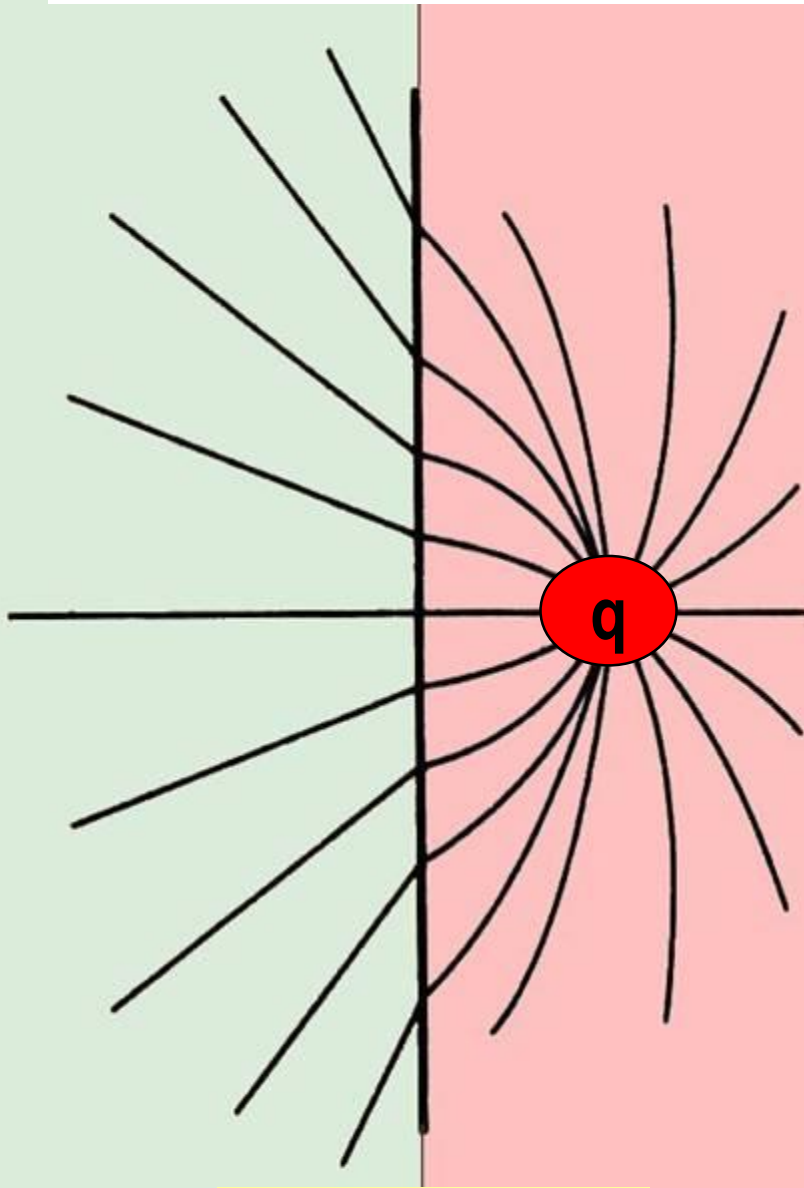
Die Division beider Gleichungen ergibt:

$$\frac{1}{\varepsilon_{r,1}} \tan \alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_{r,2}} \tan \alpha_2$$

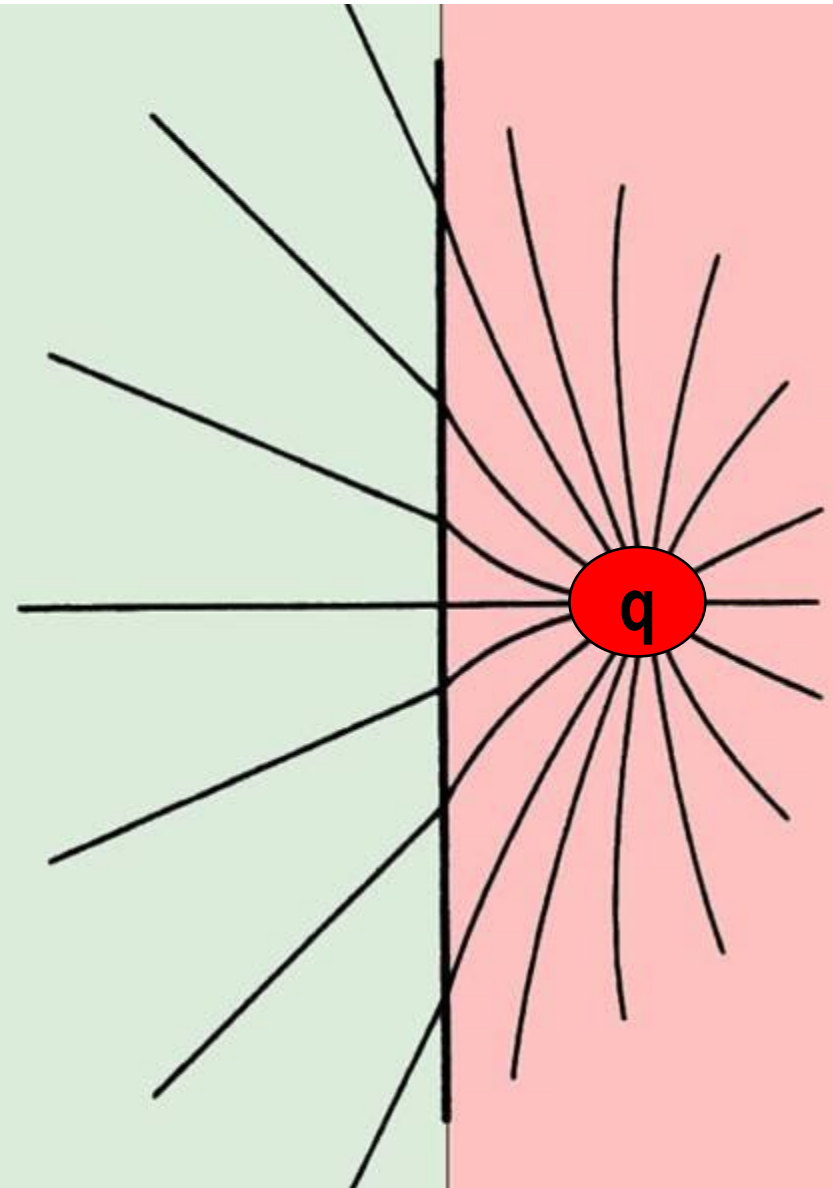
$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r,1}}{\varepsilon_{r,2}}$$

Dies ist das Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien beim Übergang zwischen zwei Medien.

Feld einer Punktladung vor einer Grenzfläche, die zwei Medien trennt:

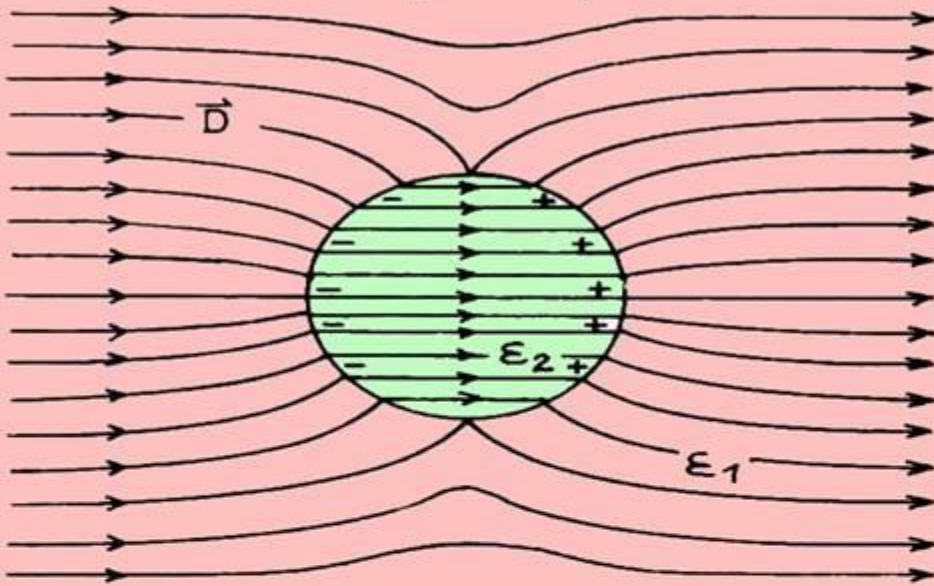


$$\epsilon_r^{(2)} > \epsilon_r^{(1)}$$

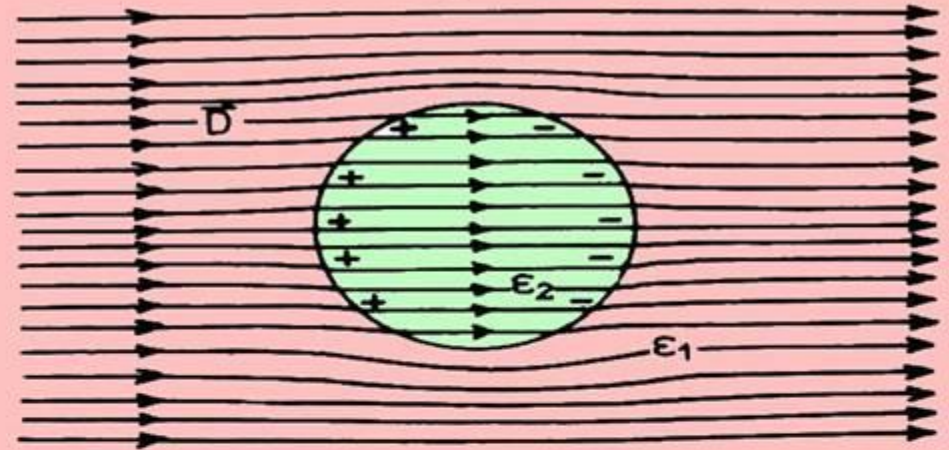


$$\epsilon_r^{(2)} < \epsilon_r^{(1)}$$

$$\epsilon_2 > \epsilon_1$$

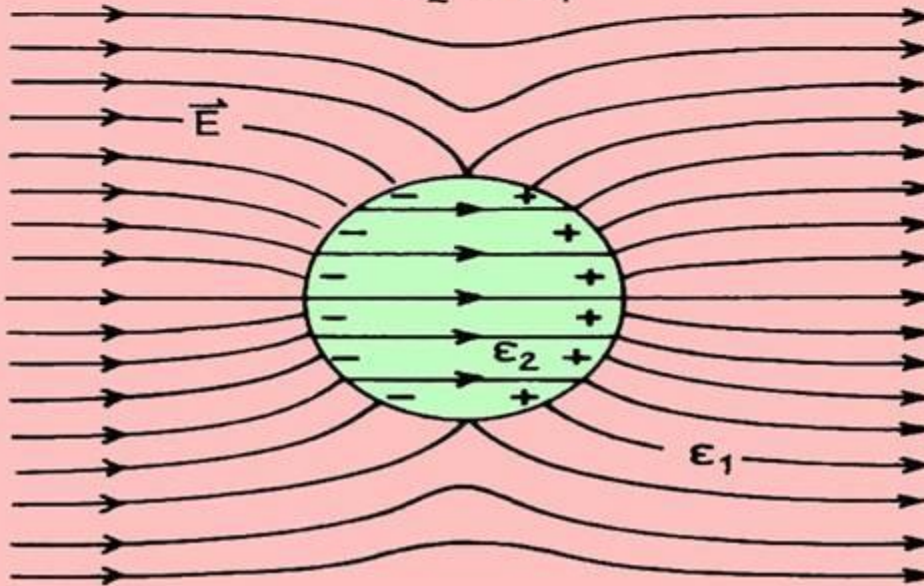


$$\epsilon_2 < \epsilon_1$$

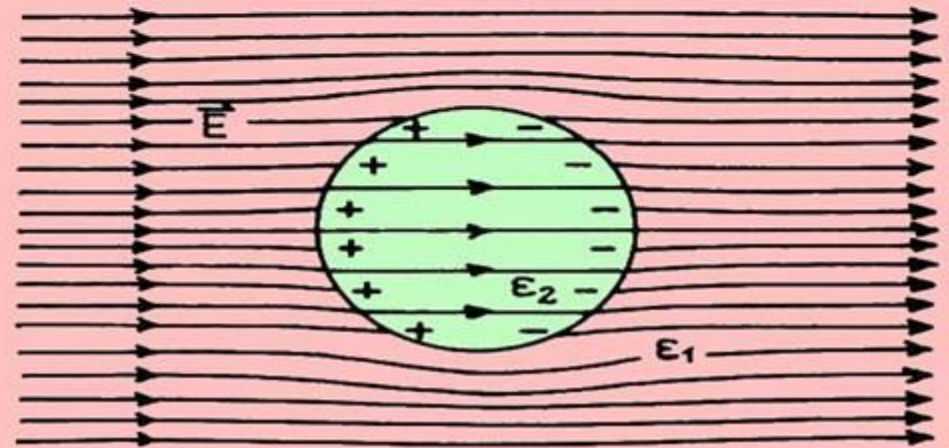


Dielektrische Kugel in einem elektrischen Feld

$$\epsilon_2 > \epsilon_1$$



$$\epsilon_2 < \epsilon_1$$



Das magnetische Feld in Materie

Wie im Fall des elektrischen Feldes gilt das Ampère'sche Gesetz für *alle* Ströme:

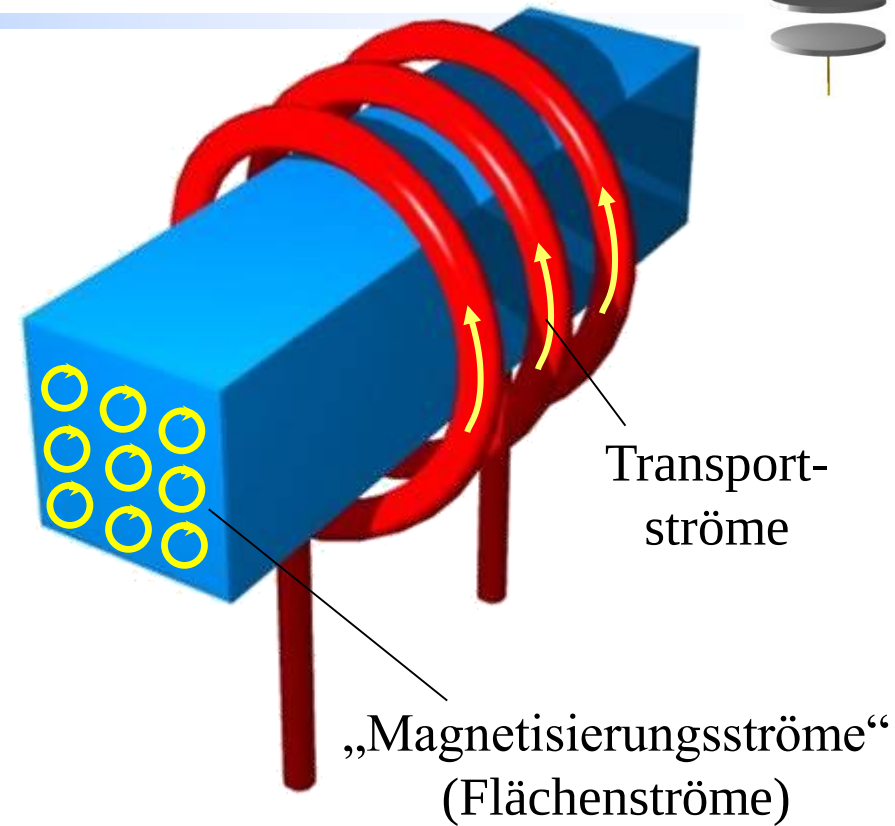
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Dabei gibt es zwei prinzipiell unterschiedliche Arten von Strömen, d.h.:

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{Trans.}} + \vec{j}_{\text{Mag.}}$$

Transportstrom
(von außen aufge-
prägt, Spule usw.)

Mikroskopische
Ströme in
Anwesenheit des
Magnetfeldes



Die mikroskopischen Ströme bestimmen das magnetische Verhalten eines Stoffes. Man definiert das Feld der Magnetisierung durch:

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{\text{Mag.}}$$



$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

Die Permeabilität μ_r eines Materials hängt also direkt mit der Suszeptibilität χ_m über $\mu_r = 1 + \chi_m$ zusammen.

Experimentell findet man, dass es Stoffe gibt mit:

$\chi_m > 0$: paramagnetische Stoffe
(Al, Pt, O₂)

$\chi_m < 0$: diamagnetische Stoffe
(H₂O, Cu, Bi)

Die Permeabilität μ_r kann also größer oder kleiner als Eins sein, im Gegensatz zur Dielektrizitätskonstante ϵ_r , für die immer $\epsilon_r > 1$ gilt.

Material	$\chi_m \cdot 10^6$	μ_r
H ₂ O	-9	0.999991
Cu	-7.4	0.999993
Bi	-153	0.999847
Al	21.2	1.000021
Pt	264	1.000264
O ₂ (flüssig)	3620	1.003620



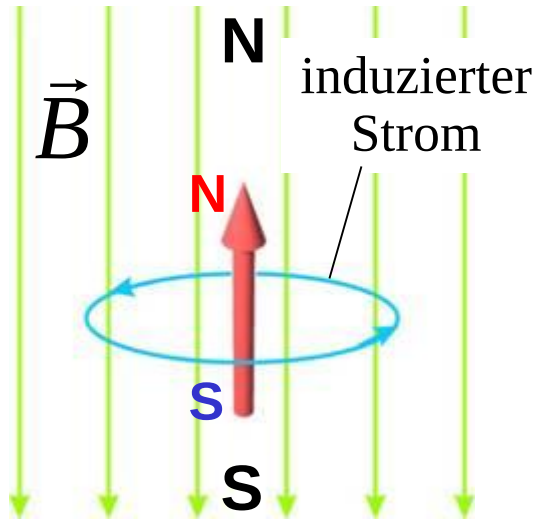
diamagnetisch
(Lenz'sche Regel)



paramagnetisch
(Dipolmoment)

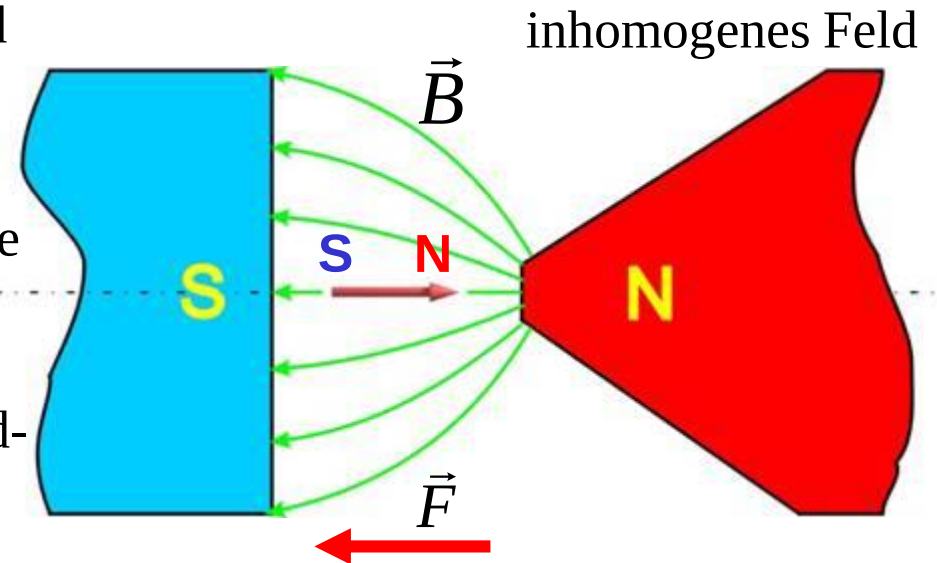


(i) Diamagnetismus:

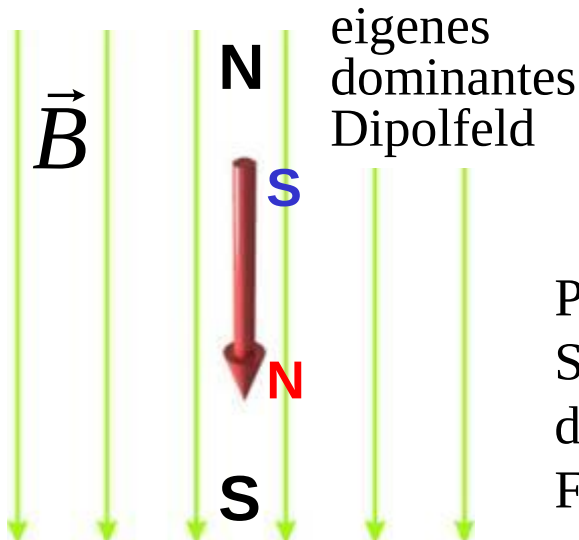


Das Dipolmoment wird durch das äußere Feld induziert (Lenz'sche Regel)

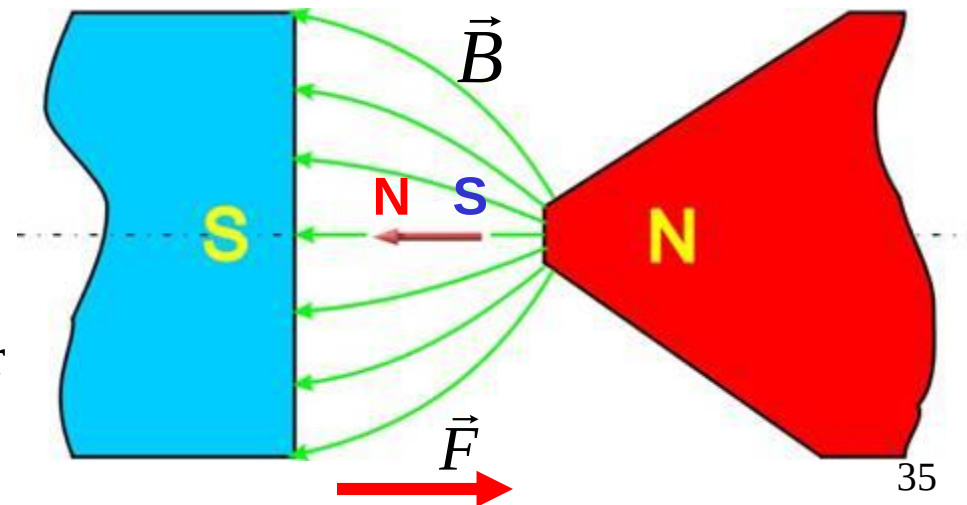
Diamagnetische Stoffe werden im inhomogenen Feld in den Bereich kleinerer Feldstärke gedrängt



(ii) Paramagnetismus:

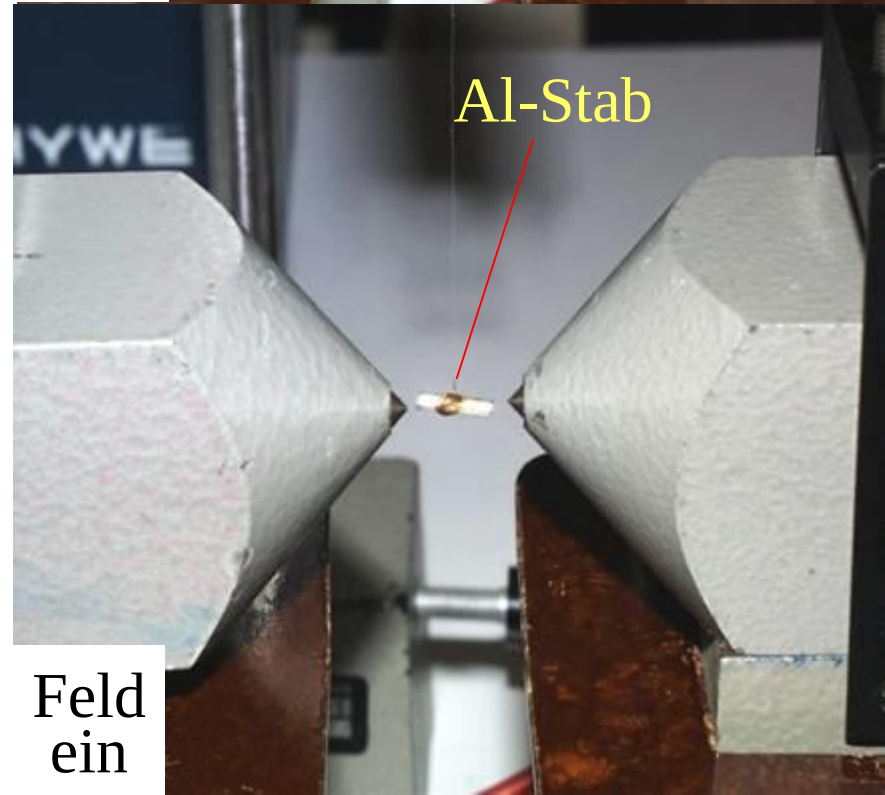
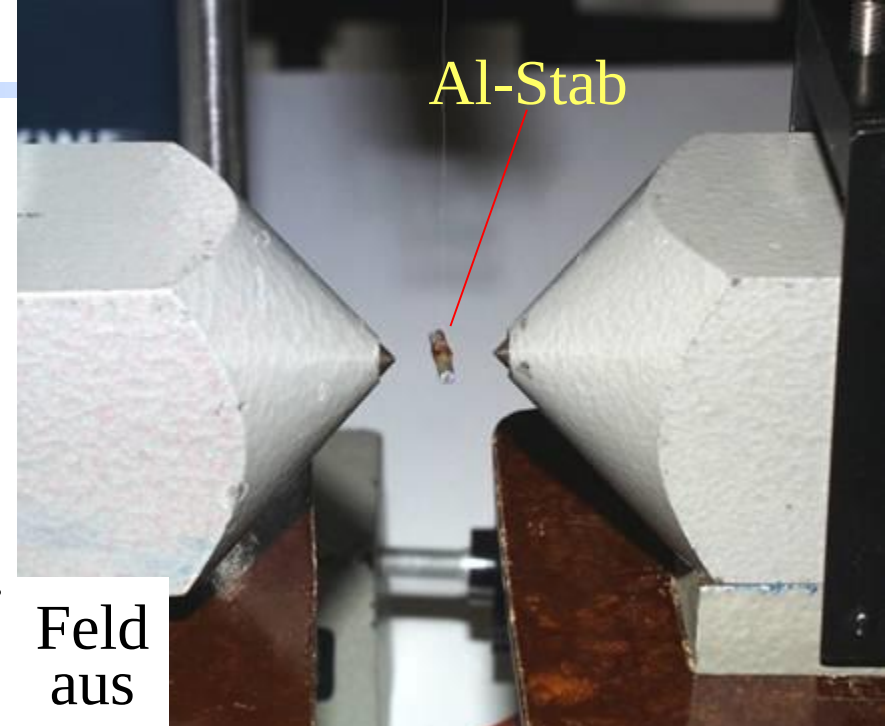
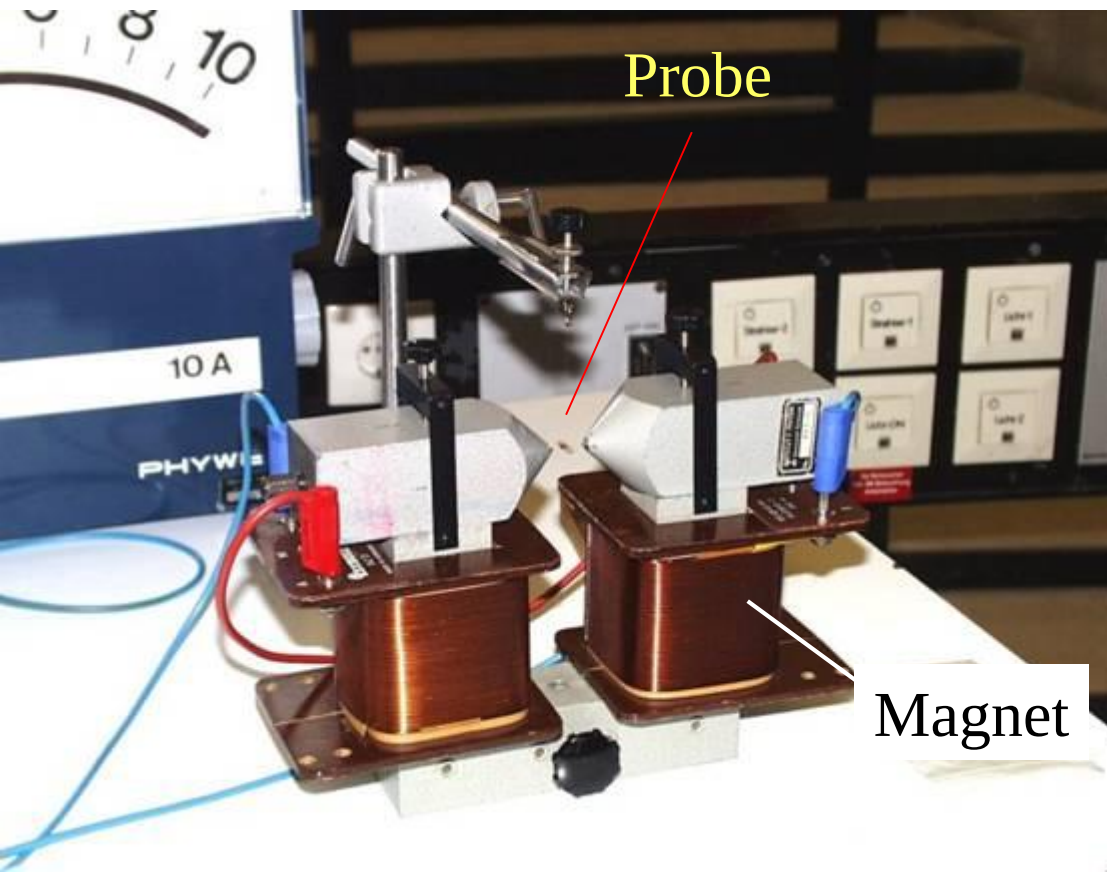


Paramagnetische Stoffe werden in den Bereich höherer Feldstärke gezogen.



Versuch 3: Dia- und Paramagnetismus

Paramagnetische Stoffe richten sich im inhomogenen Magnetfeld in Richtung des Feldes aus, diamagnetische Stoffe dagegen quer zu den Feldlinien. Die Probe hängt leicht drehbar an einem dünnen Faden.

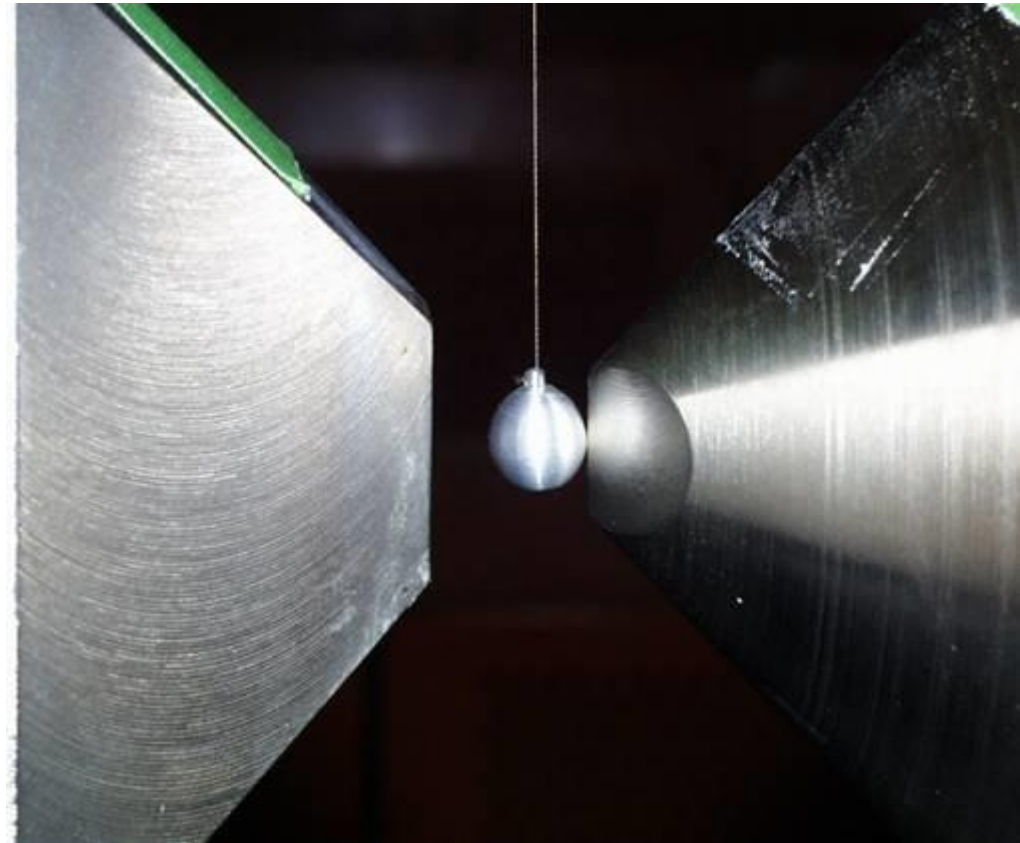
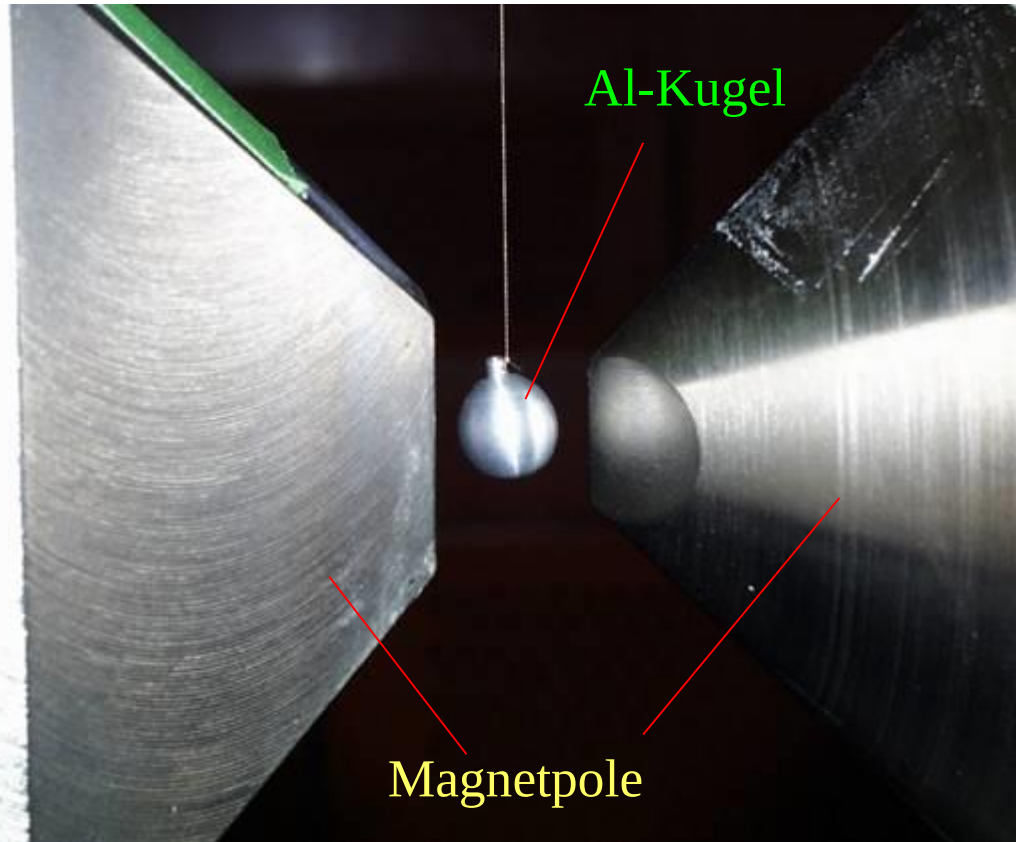




Versuch 4: Dia- und Paramagnet im inhomogenen Feld

Magnetfeld aus: Die paramagnetische Al-Kugel hängt frei am Faden

Magnetfeld ein: Die Kugel wird in den Bereich dichter Feldlinien gezogen.



Bei einem diamagnetischen Stoff (z.B. Glaskugel) wirkt die Kraft in entgegengesetzter Richtung, die Kugel wird aus dem Bereich dichter Feldlinien verdrängt.



Bei *ferromagnetischen* Substanzen wie Eisen, Cobalt oder Nickel ist $\chi_m, \mu_r \gg 1$ (etwa 5000 bei Eisen). Außerdem ist der Zusammenhang

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

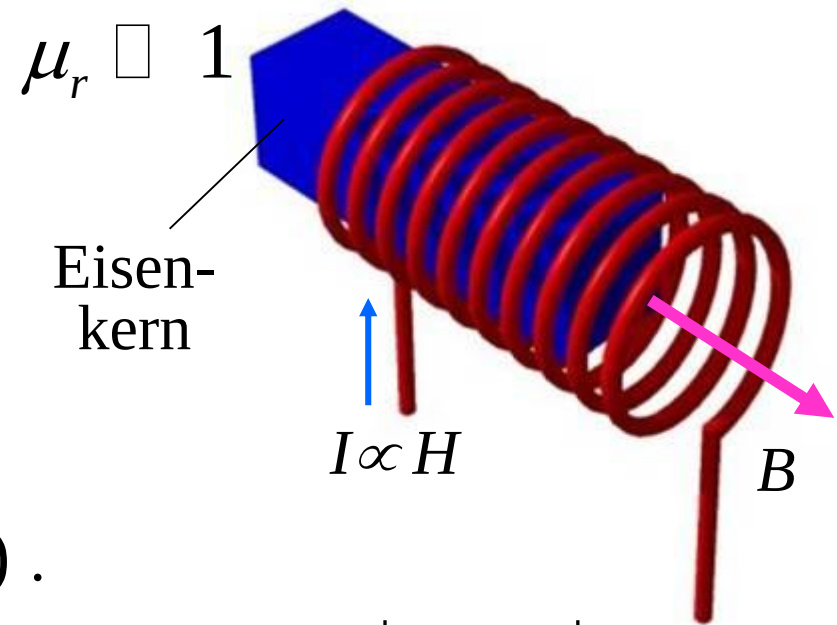
nicht mehr linear, d.h. μ_r ist eine Funktion des äußeren Feldes $\mu_r = \mu_r(\vec{H})$.

Es gilt also:

$$\vec{B}(\vec{H}) = \mu_r(\vec{H}) \mu_0 \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \mu_r(\vec{H}) = \frac{|\vec{B}(\vec{H})|}{\mu_0 |\vec{H}|}$$

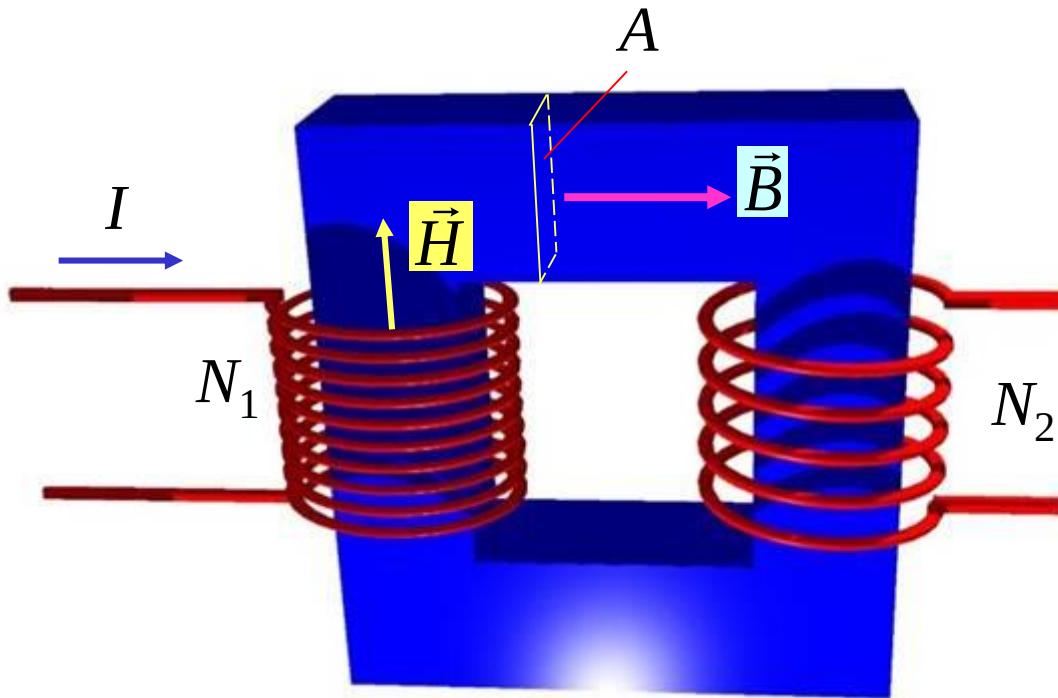
Der Zusammenhang zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$ ist für Eisen sehr kompliziert. Bei einer Spule der Länge l mit N Windungen, durch die ein Strom I fließt, und die einen Eisenkern besitzt, hatten wir bereits gefunden:

$$B = \mu_r(H) \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow H = \frac{N}{l} I \propto I$$





Dieser Zusammenhang soll jetzt zur Messung von $\mu_r(\vec{H})$ ausgenutzt werden.



Der Wechselstrom $I(t)$ erzeugt das Feld $H(t)$ in der Spule N_1 :

$$|\vec{H}(t)| = H(t) = \frac{N_1 I(t)}{l} \propto I(t)$$

Dabei ist l die Feldlinienlänge im Eisen.

Das im Eisenkern erregte Magnetfeld ist:

$$B(t) = \mu_r(H) \mu_0 H(t)$$

In der Spule N_2 wird eine Spannung

$$U(t) = -N_2 A \frac{dB(t)}{dt}$$

induziert. Das gesuchte Magnetfeld folgt daraus durch Integration:

$$B(t) = -\frac{1}{N_2 A} \int U(t) dt$$

Elektronisch kann eine solche Integration der Spannung mit einem RC-Glied vorgenommen werden.



Das magnetische Feld an Grenzflächen

(i) Senkrechte Komponente:

Die 2. Maxwell'sche Gleichung lautet:

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Anwenden auf die „infinitesimale Dose“ rechts ergibt:

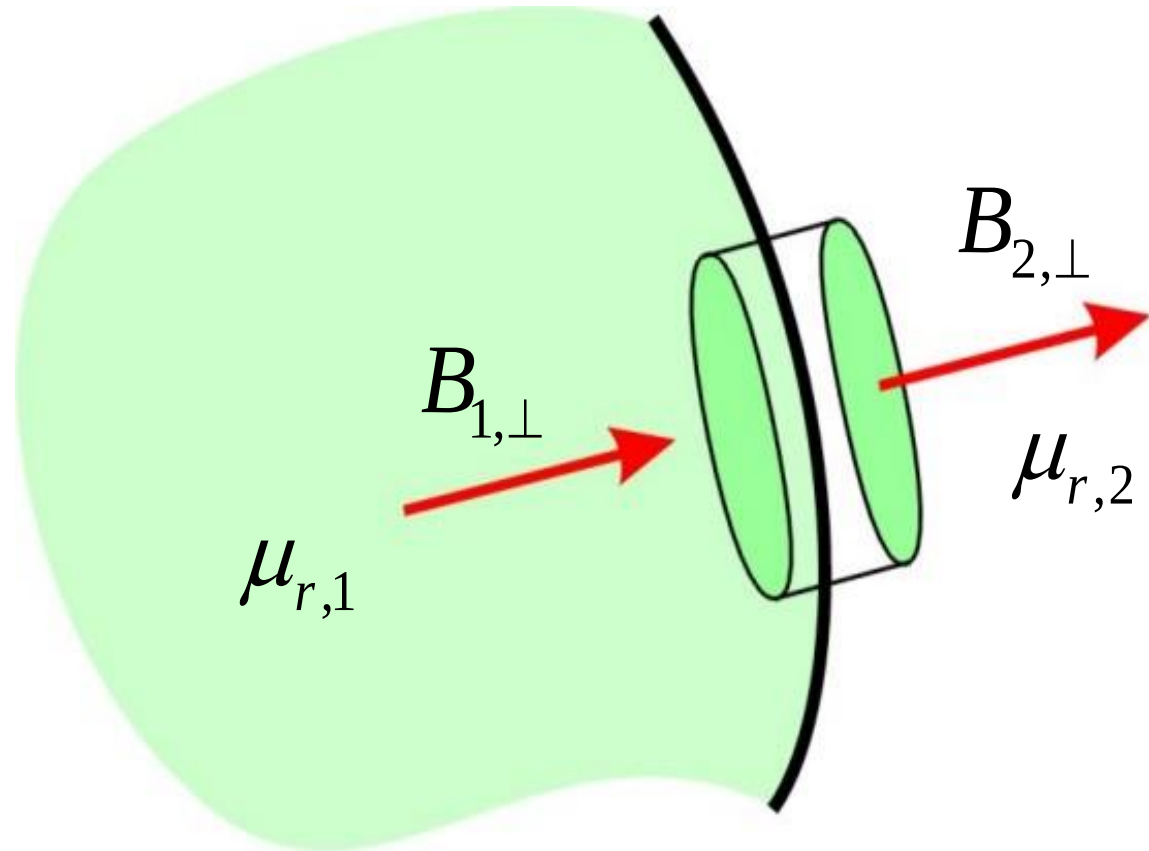
$$\oiint_{\text{Dose}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Dose

$$= B_{1,\perp} \Delta A + B_{2,\perp} (-\Delta A) = 0$$

$$\Rightarrow B_{1,\perp} \Delta A = B_{2,\perp} \Delta A \Rightarrow B_{1,\perp} = B_{2,\perp}, \quad \mu_{r,1} H_{1,\perp} = \mu_{r,2} H_{2,\perp}$$

Die senkrechte Komponente des B -Feldes ist an einer Grenzfläche stetig.





(ii) Tangentiale Komponente:

Da an der Grenzfläche keine äußeren Ströme fließen, liefert das Ampère'sche Gesetz für den Weg entlang des „infinitesimalen Rechtecks“:

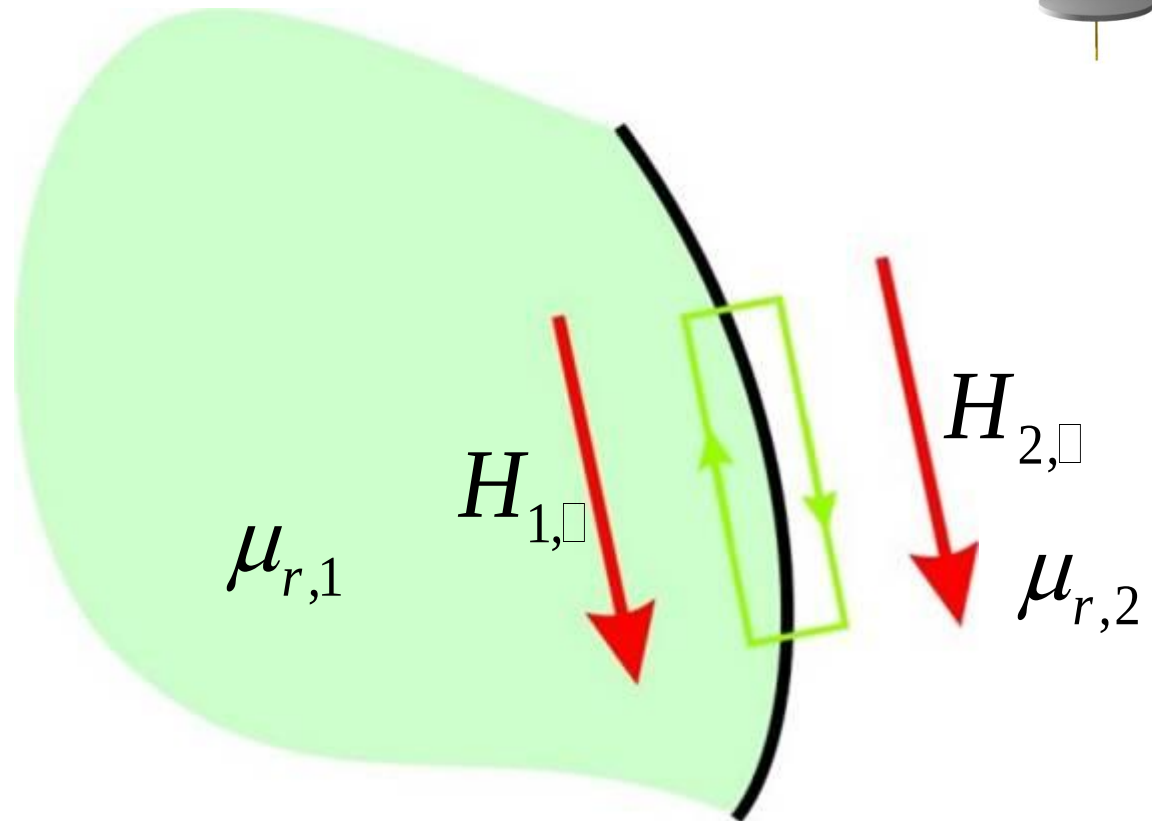
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$$

Also folgt:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = H_{1,\square} \Delta r + H_{1,\square} (-\Delta r) = 0 \Rightarrow H_{1,\square} \Delta r = H_{2,\square} \Delta r$$

$$\Rightarrow H_{1,\square} = H_{2,\square} \Rightarrow \frac{B_{1,\square}}{\mu_{r,1}} = \frac{B_{2,\square}}{\mu_{r,2}}$$

Die tangentielle Komponente des B -Feldes macht an einer Grenzfläche einen Sprung.

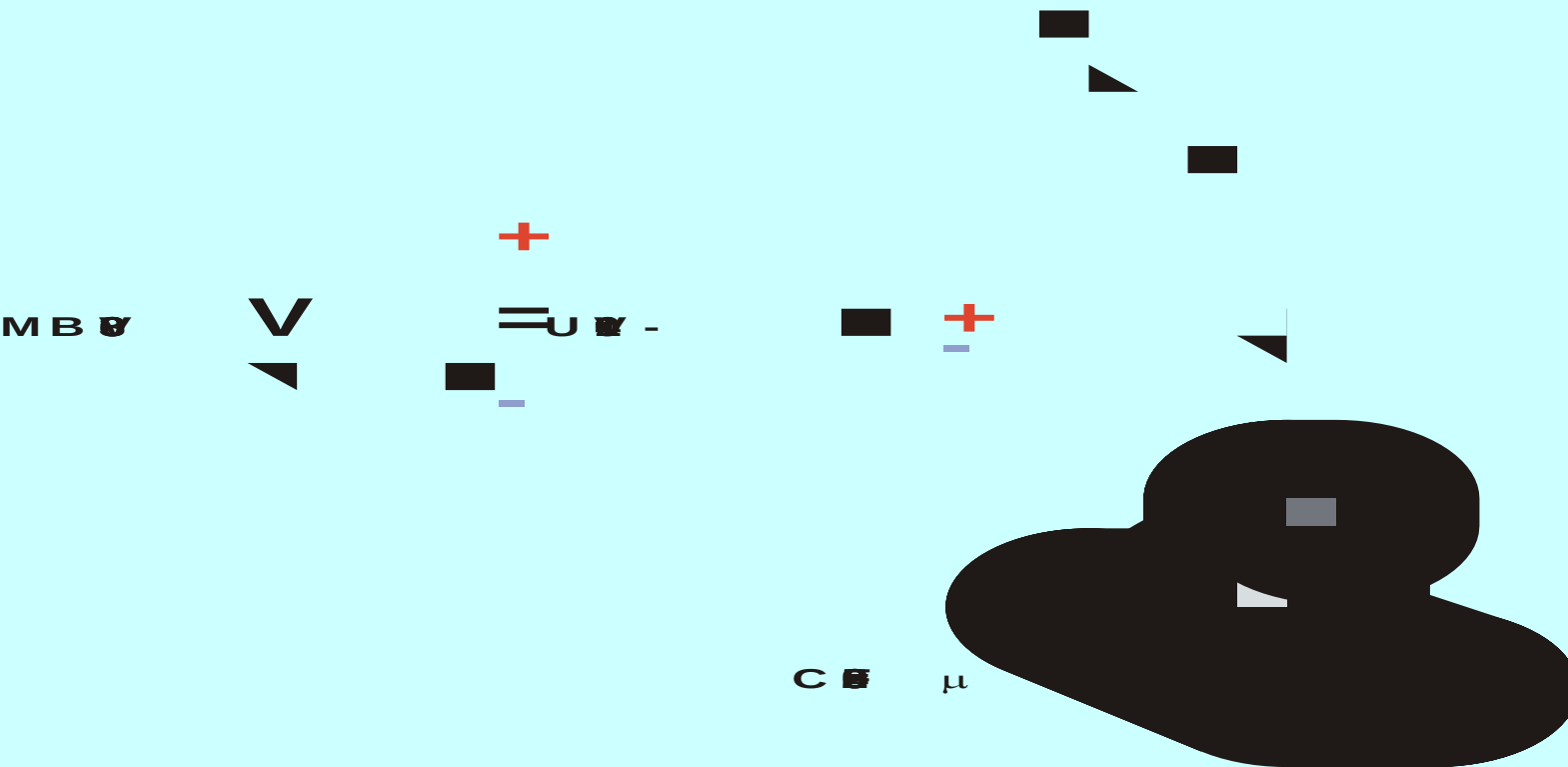


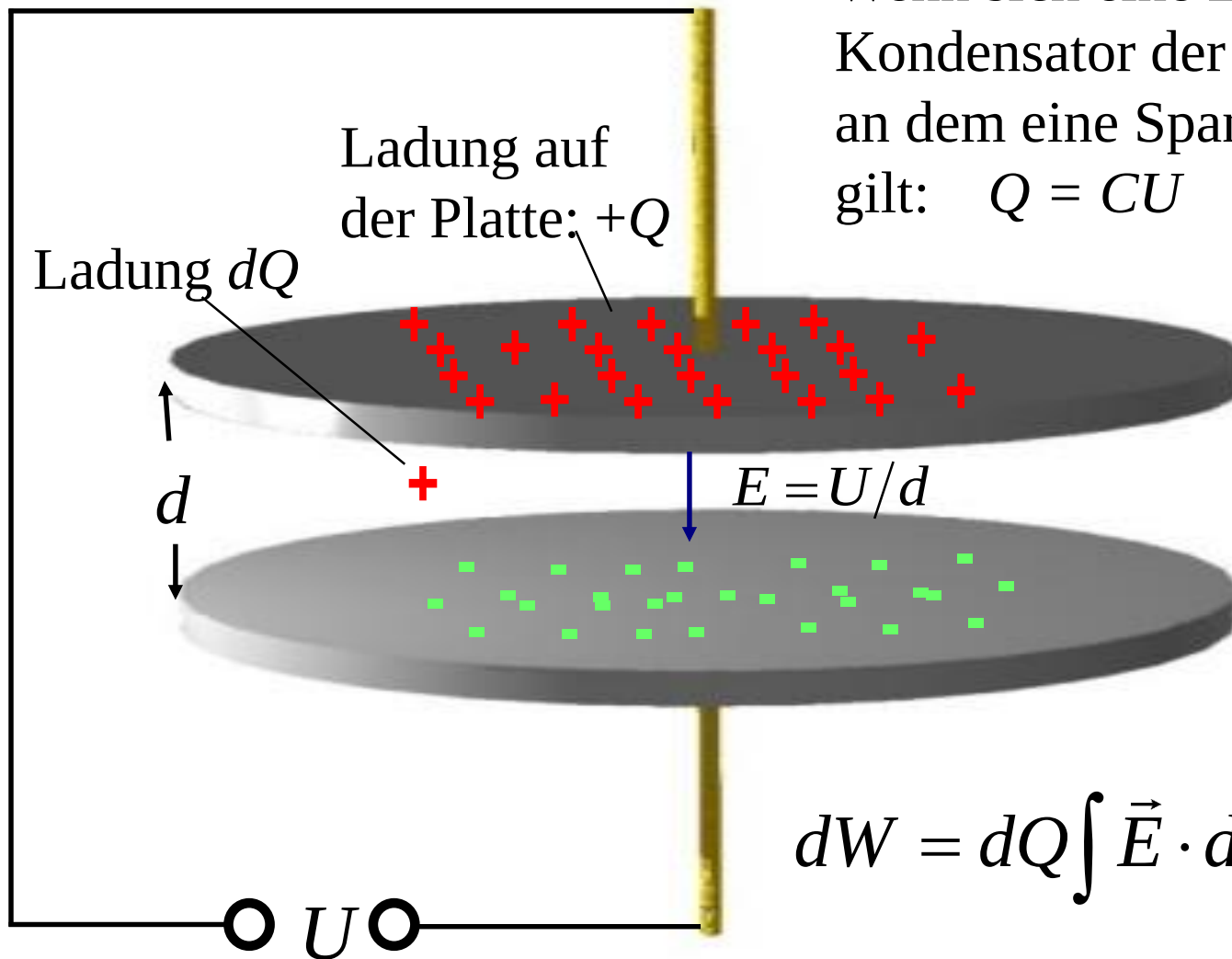


Die im elektromagnetischen Feld gespeicherte Energie

(i) Gespeicherte Energie im elektrischen Feld

Versuch 7: Entladung eines Kondensators





Wenn sich eine Ladung Q auf einem Kondensator der Kapazität C befindet, an dem eine Spannung U anliegt, dann gilt: $Q = CU$

Die Arbeit dW die notwendig ist, um eine Ladung dQ zu der Ladung Q auf der Platte hinzuzufügen ist:

$$dW = dQ \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = dQ \frac{U}{d} d = U dQ$$

$$\Rightarrow dW = \frac{Q}{C} dQ$$



Wenn der Kondensator auf die Gesamtladung Q_{ges} aufgeladen wird, dann ergibt die Integration für die gesamte aufzuwendende „Aufladearbeit“:

$$W = \int_0^{Q_{\text{ges}}} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2C} Q_{\text{ges}}^2$$

Wegen $Q = CU$ folgt daraus:

$$W = \frac{1}{2} CU^2$$

Diese Energie ist im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert.

Dieses Ergebnis kann stark verallgemeinert werden. Mit der Formel für die Kapazität eines Plattenkondensators folgt:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \right) (Ed)^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 \underbrace{(Ad)}_{\text{Kondensator-} \\ &\quad \text{volumen } V} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 V \end{aligned}$$

Für die Energiedichte w_E , d.h. die Energie pro Volumen, des elektrischen Feldes in einem Plattenkondensator gilt also:

$$w_E = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2$$



Dieses Ergebnis gilt ganz allgemein, da jeder Raumbereich „infinitesimal eben“ ist. Daher gilt für die Energiedichte w_E in einem beliebigen elektrischen Feld:

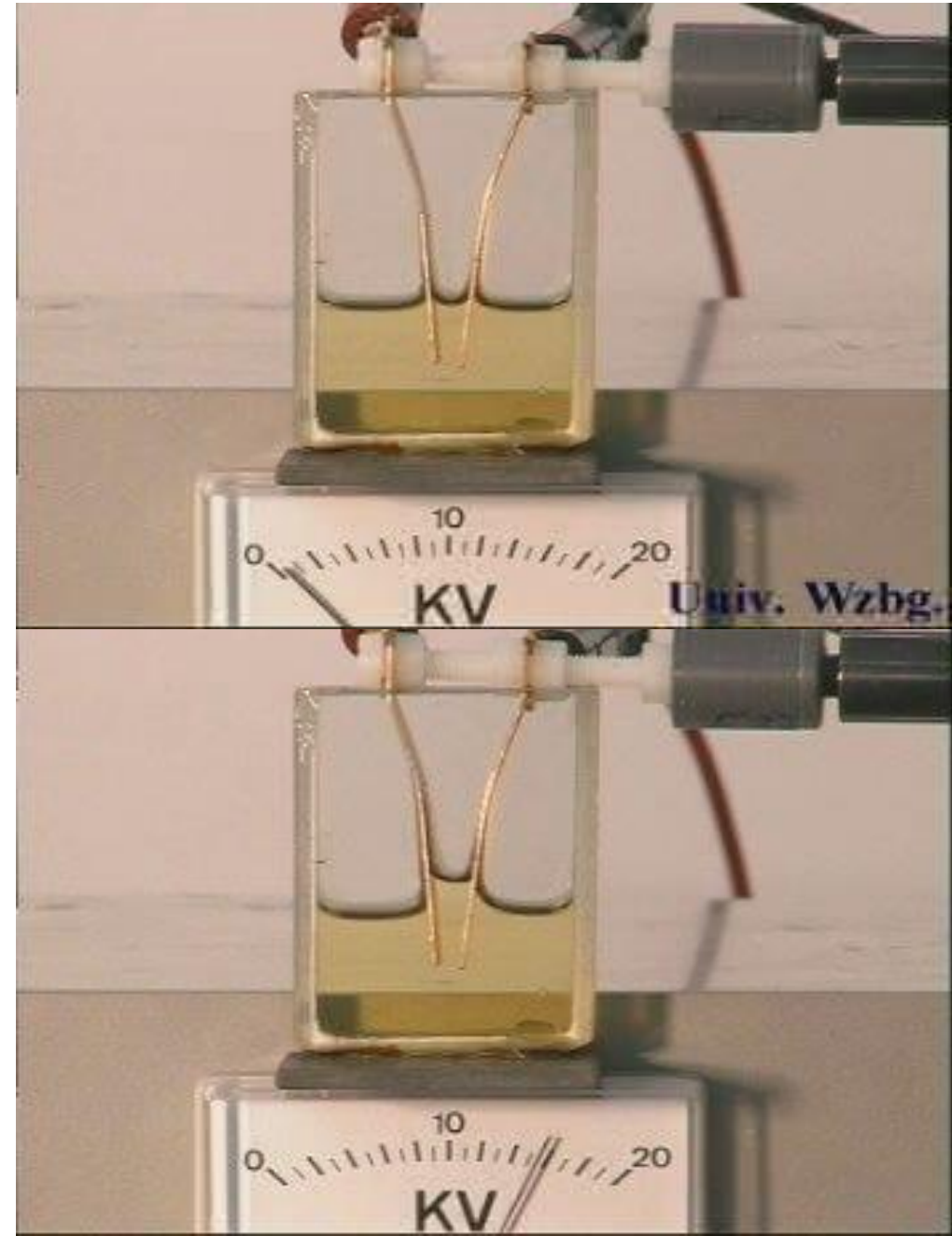
$$w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$$

Dies kann mit dem Feld der dielektrischen Verschiebung auch geschrieben werden als:

$$w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} DE$$

In einem Raumbereich mit Dielektrikum ist wegen $\epsilon_r > 1$ die Energiedichte höher als außerhalb.

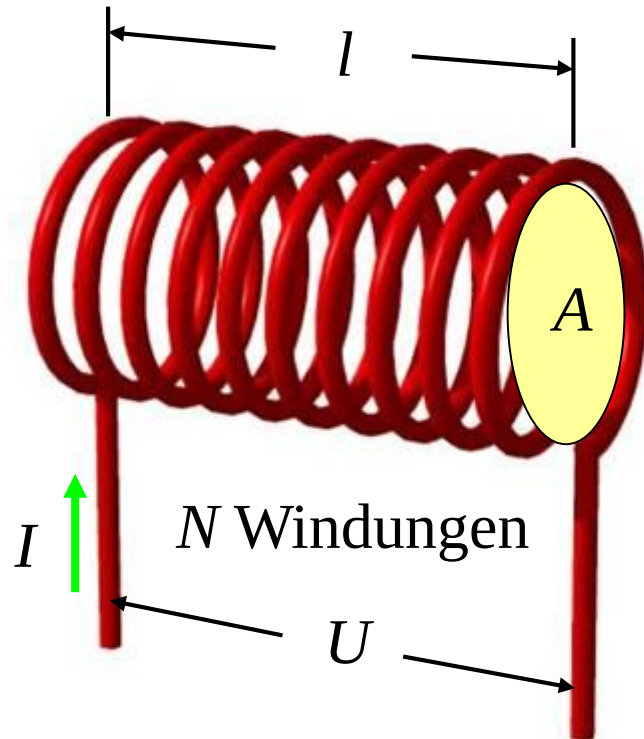
Versuch 8: Flüssigkeit im Kondensator





(ii) Gespeicherte Energie im magnetischen Feld

Wir betrachten die folgende Spule:



Das Magnetfeld im Innern der Spule ist:

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{N I}{l}$$

Wenn sich der Strom zeitlich ändert, dann wird eine Spannung U induziert:

$$U = -N A \frac{dB}{dt}$$

$$= - \underbrace{\mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l}}_{=L \text{ (Selbst) Induktivität einer Spule}} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Die Leistung P ist:

$$P = \frac{dW}{dt} = U I = L \frac{dI}{dt} I$$

$$\Rightarrow dW = L I dI$$



Aus

$$dW = L I dI$$

folgt durch Integration sofort für die in der Spule gespeicherten Arbeit bzw. Energie:

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

Diese Energie ist im magnetischen Feld der Spule gespeichert.

Dieses Ergebnis kann wie im Fall der elektrischen Feldes wieder stark verallgemeinert werden. Mit der Formel für die Induktivität einer stromdurchflossenen Spule folgt:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \left(\mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \right) I^2 \\ &= \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} \left((\mu_r \mu_0)^2 \frac{N^2 I^2}{l^2} \right) \quad (Al) \\ &\quad \text{Spulenvolumen } V \\ &= \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} \underbrace{\left(\mu_r \mu_0 \frac{N I}{l} \right)^2}_{\text{Magnetfeld } B \text{ im Inneren einer Spule}} V = \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} B^2 V \end{aligned}$$

Für die Energiedichte w_B , d.h. die Energie pro Volumen, des magnetischen Feldes innerhalb einer Spule gilt:

$$w_B = \frac{W}{V} = \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} B^2$$



Dieses Ergebnis gilt wieder ganz allgemein, da jeder Raumbereich „infinitesimal eben“ ist. Daher gilt für die Energiedichte w_B in einem beliebigen magnetischen Feld:

$$w_B = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2\mu_r\mu_0} B^2$$

Dies kann auch wieder mit dem H -Feld ausgedrückt werden. Wegen

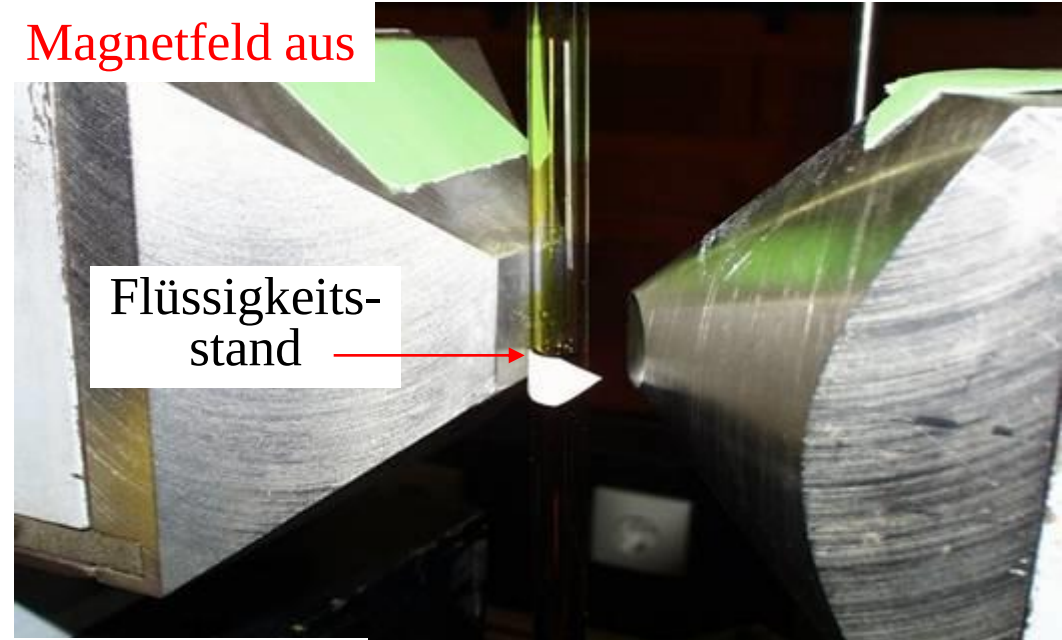
$$B = \mu_r\mu_0 H$$

folgt:

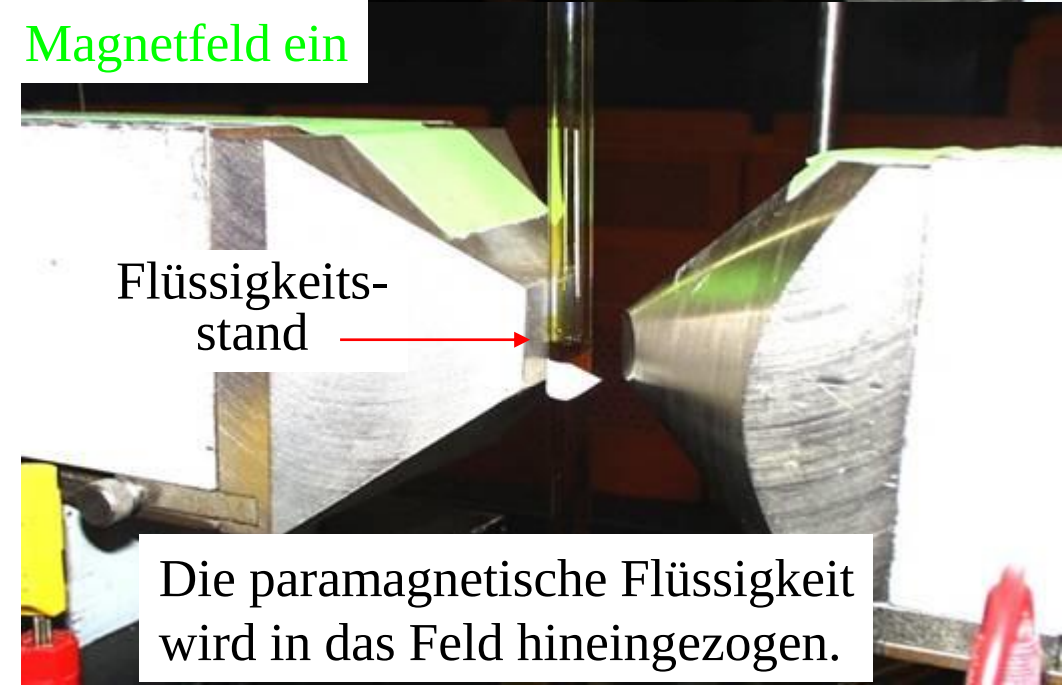
$$w_B = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} H B$$

Versuch 9: Paramagnetische Flüssigkeit

Magnetfeld aus



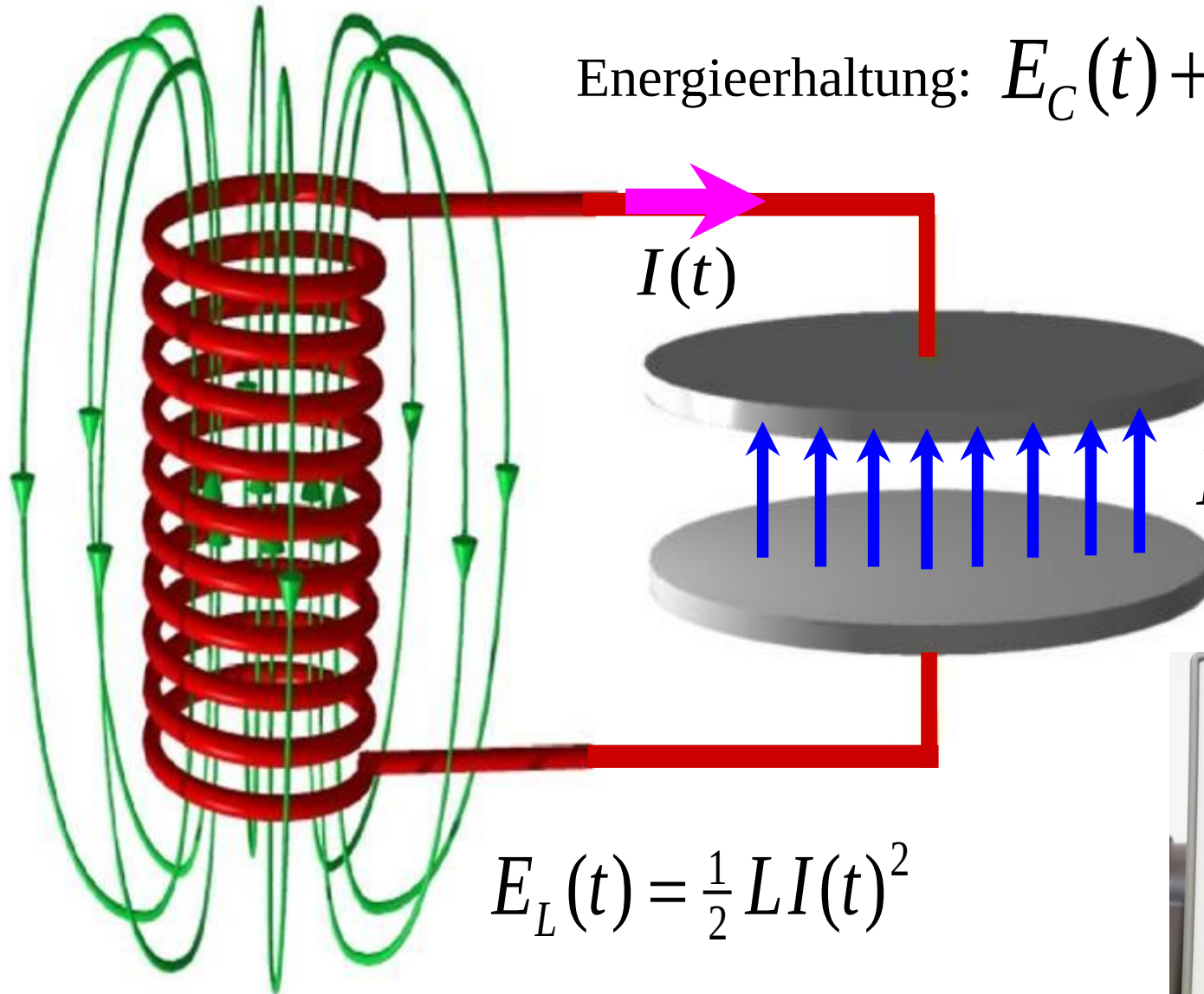
Magnetfeld ein





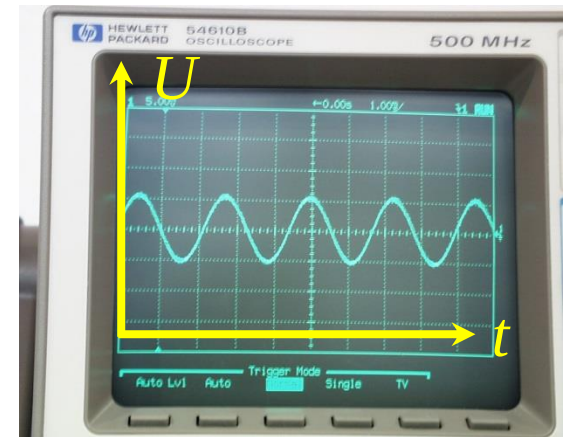
Die im elektrischen und magnetischen Feld gespeicherte Energie kann ineinander umgewandelt werden. Für den Schwingkreis gilt beispielsweise:

Energieerhaltung: $E_C(t) + E_L(t) = E$



$$E_C(t) = \frac{1}{2} C U(t)^2$$

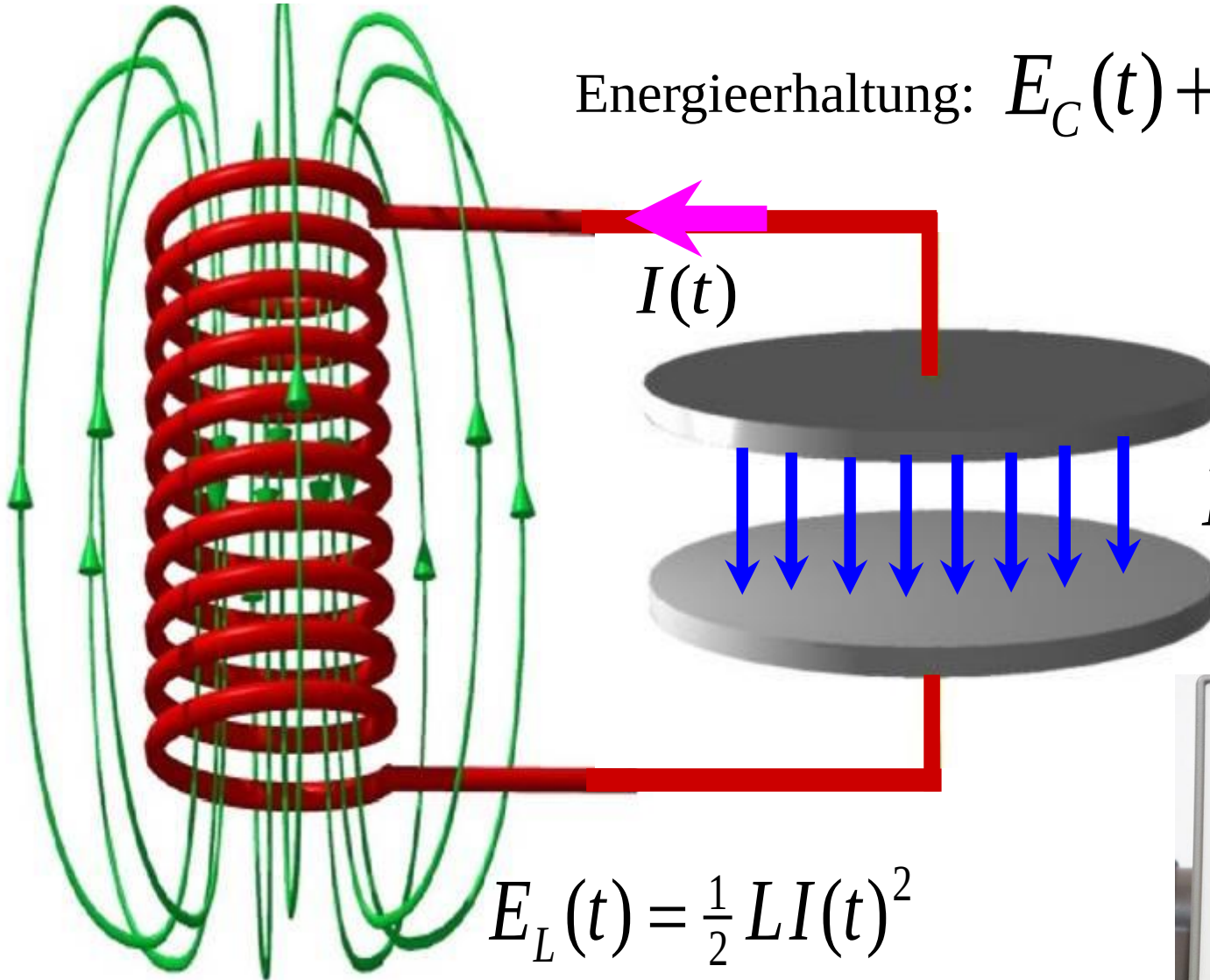
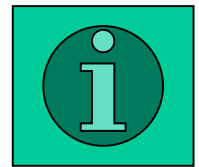
$$E_L(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2$$





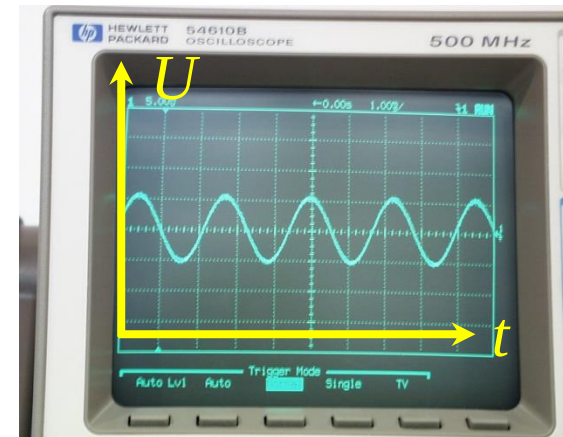
Die im elektrischen und magnetischen Feld gespeicherte Energie kann ineinander umgewandelt werden. Für den Schwingkreis gilt beispielsweise:

Energieerhaltung: $E_C(t) + E_L(t) = E$



$$E_C(t) = \frac{1}{2} C U(t)^2$$

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2$$





Die Energieerhaltung liefert:

$$E_C(t) + E_L(t) = E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} C U^2 + \frac{1}{2} L I^2 = E$$

Wegen

$$Q = CU \text{ und } I = \frac{dQ}{dt}$$

folgt nun:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 = E$$

Differenzieren dieser Gleichung ergibt:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{C} 2Q \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2} L 2 \frac{dQ}{dt} \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

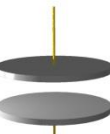
$$\Rightarrow \frac{1}{C} Q + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \omega^2 Q(t) = 0$$

Dabei wurde die Frequenz $\omega^2 = 1/LC$ eingeführt. Dies ist die DGL des harmonischen Oszillators für die Funktion $Q(t)$ und damit auch für $I(t)$ und $U(t)$.

Aus der Energieerhaltung kann also, genauso wie in der Mechanik, die zeitliche Entwicklung des Systems hergeleitet werden.



Inhalt der Vorlesung B1

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Einleitung

Ladungen & Elektrostatische Felder

Elektrischer Strom

Magnetostatik

Elektrodynamik: Die Maxwell'schen Gleichungen

Wechselstromnetzwerke

Elektromagnetische Wellen & Strahlung

5. Optik

Licht als elektromagnetische Welle

Geometrische Optik

Optische Abbildungen

Wellenoptik

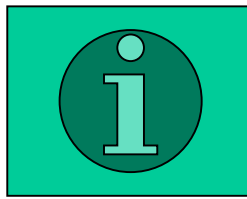
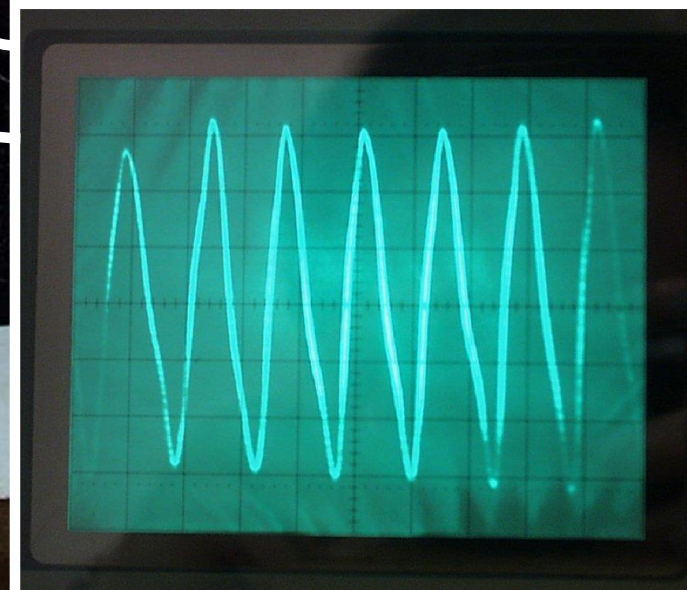
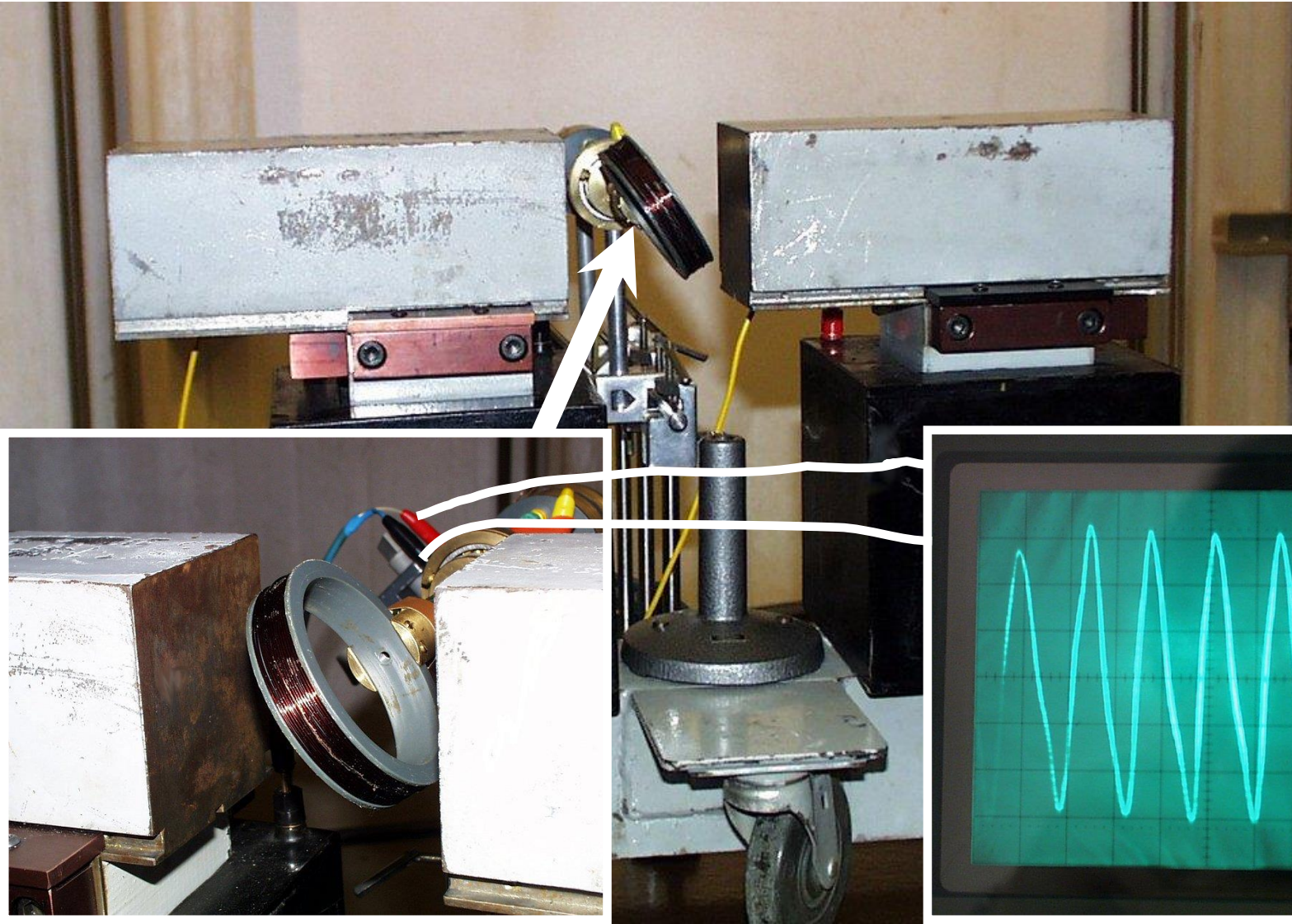


Wechselstromnetzwerke

Prinzip eines Wechselspannungsgenerators

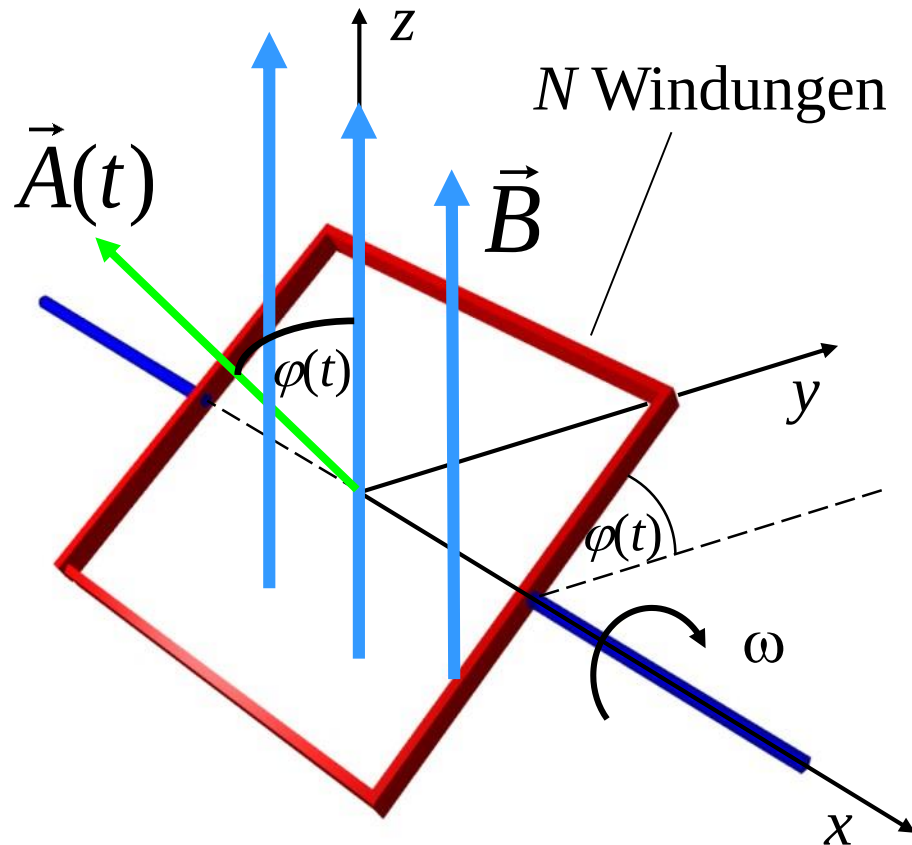
Versuch 1: Rotierende Spule in einem konstanten Magnetfeld

Bei Rotation der Spule wird an ihren Enden eine sinusförmige Spannung gemessen.





Wir betrachten eine Leiterschleife der Fläche A mit N Windungen (Spule), die in einem homogenen Magnetfeld mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.



Die Rotationsachse zeigt in die x -Richtung. Das homogene Magnetfeld hat nur eine z -Komponente, also:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

Der Fluß durch die Fläche A ist dann:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{mag.}}(t) &= \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A}(t) \\ &= BA \cos(\varphi(t)) \end{aligned}$$

$\varphi(t) = \omega t$ ist hierbei die Phase.

Einsetzen ergibt:

$$\Phi_{\text{mag.}}(t) = BA \cos(\omega t)$$



Mit dem Induktionsgesetz kann nun die in der Leiterschleife erzeugte Spannung berechnet werden:

$$U_{\text{ind}}(t) = -N \frac{d\Phi(t)}{dt} = NBA\omega \sin(\omega t)$$

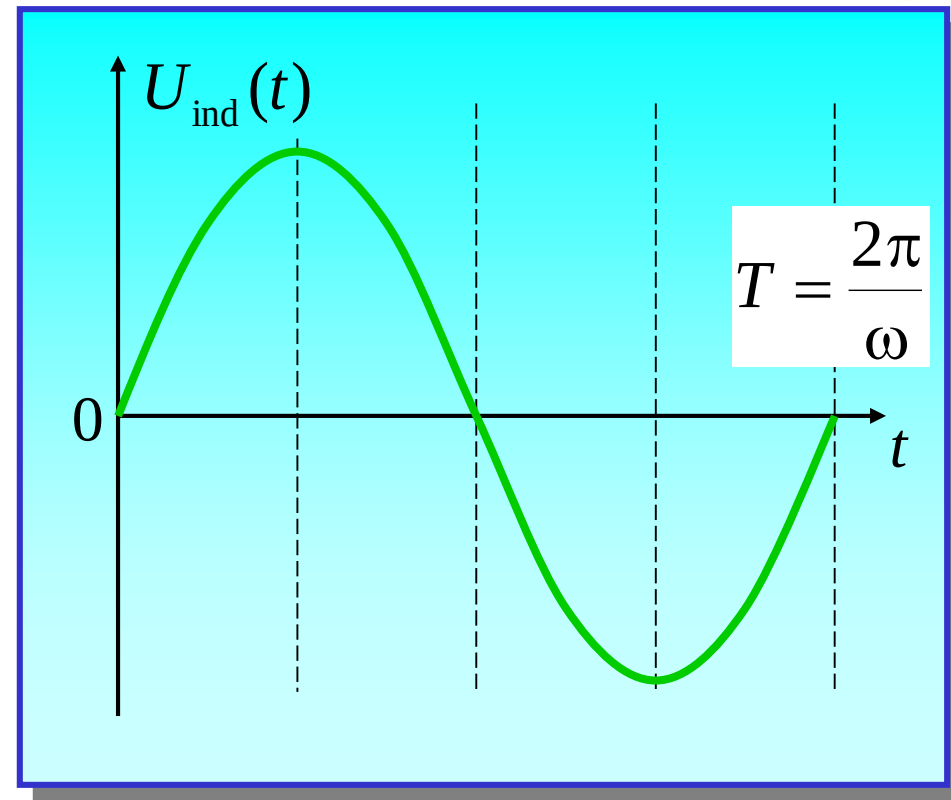
Es entsteht eine periodische Induktionsspannung mit der Amplitude:

$$U_0 = NBA\omega$$

Die Spannung ist also proportional zur Rotationsfrequenz ω . Eine periodische Spannung der Form

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

wird „*Wechselspannung*“ genannt.



Beispiel:

Die im Haushalt übliche Spannung ist eine Wechselspannung mit der Frequenz:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = 50\text{s}^{-1} = 50\text{Hz}$$

Wechselspannung und Wechselstrom

Wechselspannungen und Wechselströme haben die Form:

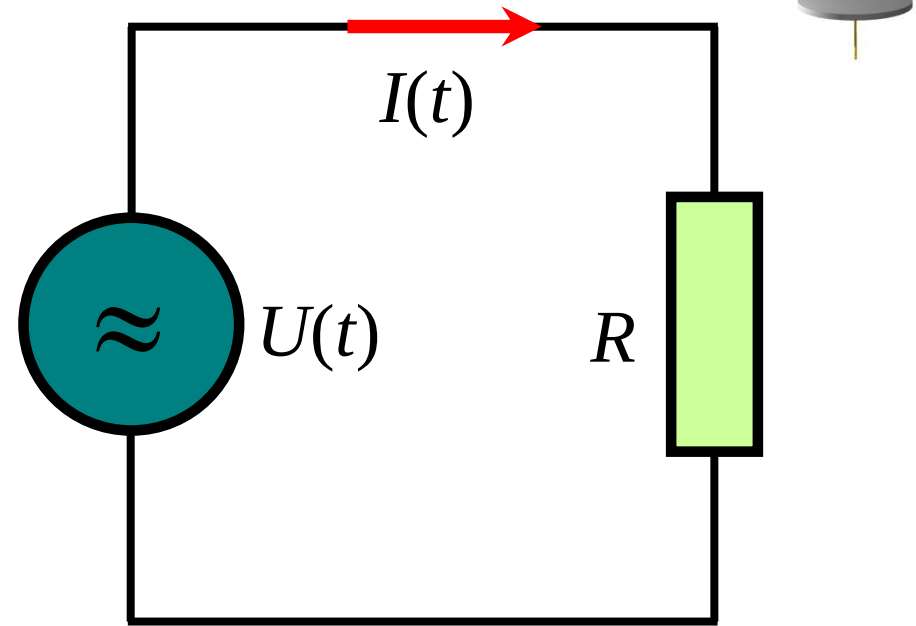
$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Dabei sind φ und ϕ Phasen bezüglich einer beliebigen Referenz. An einem Ohm'schen Widerstand sind die Phasen zwischen Strom und Spannung wegen $U(t) = R \cdot I(t)$ gleich. In diesem Fall kann einfach $\varphi = \phi = 0$ gesetzt werden.

Wir betrachten nun die wirkende elektrische Leistung P .

Die Leistung ist gegeben als Produkt von Strom und Spannung.

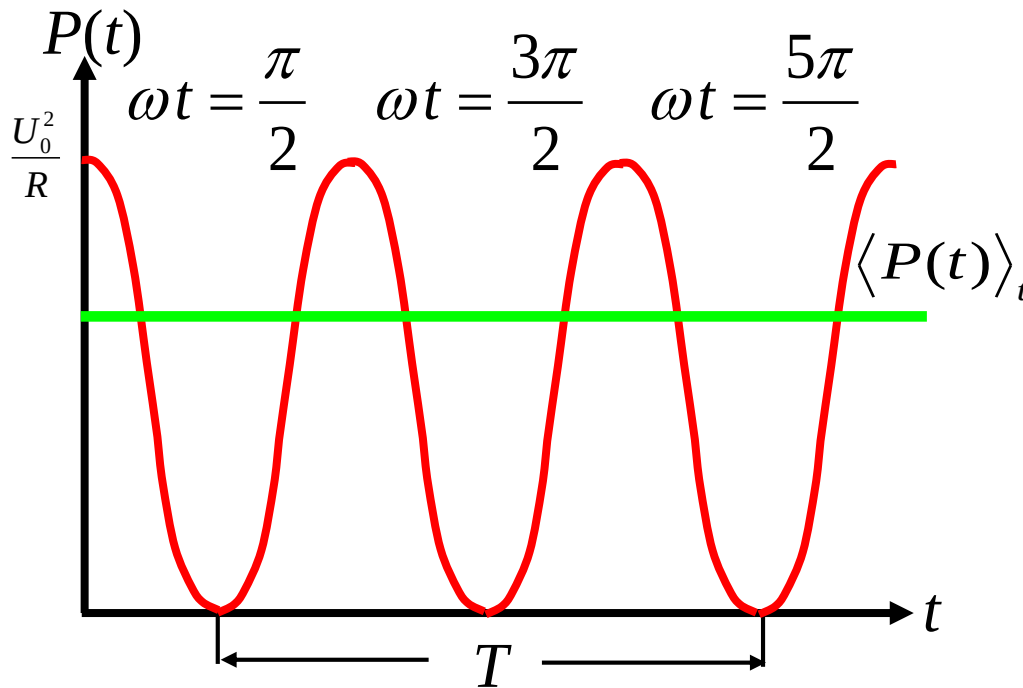


An einen Ohm'schen Widerstand gilt:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t)$$

Damit ergibt sich für die elektrische Leistung, die an einem Widerstand R verbraucht wird:

$$P(t) = U(t) I(t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t)$$



Die Leistung $P(t)$ ist nun eine zeitabhängige, periodische Größe. Entscheidend ist ihr zeitlicher Mittelwert:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

Aus der Graphik liest man ab:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} P(t) dt$$

Einsetzen liefert:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{4}{T} \frac{U_0^2}{R} \int_0^{T/4} \cos^2(\omega t) dt$$

Mit der Substitution

$$\omega t = x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\omega}$$

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

folgt:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{4}{T} \frac{U_0^2}{R} \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$$



Weiterhin gilt (siehe z.B. Bronstein):

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} \\ = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Also ergibt sich mit $\omega = 2\pi/T$:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{4}{T} \frac{U_0^2}{R} \frac{1}{2\pi/T} \frac{\pi}{4} \\ = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}$$

Dies ist die sog. „*Wirkleistung*“, die den Widerstand erwärmt. Bei einer Gleichspannung hätte sich als Wirkleistung $\langle P \rangle = U_0^2/R$ ergeben.

Es ergibt sich also für die Wirkleistung:
Gleichspannung Wechselspannung

$$\langle P \rangle_{=} = \frac{U_0^2}{R}$$

$$\langle P \rangle_{\approx} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}$$

Daher werden jeweils eine „*effektive Spannung*“ und ein „*effektiver Strom*“

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{R\sqrt{2}}$$

definiert, die an einem Ohm'schen Widerstand dieselbe mittlere Leistung bewirken würden, wie eine gleich große Gleichspannung, d.h.:

$$\langle P \rangle_{\approx} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_0^2}{2R}$$

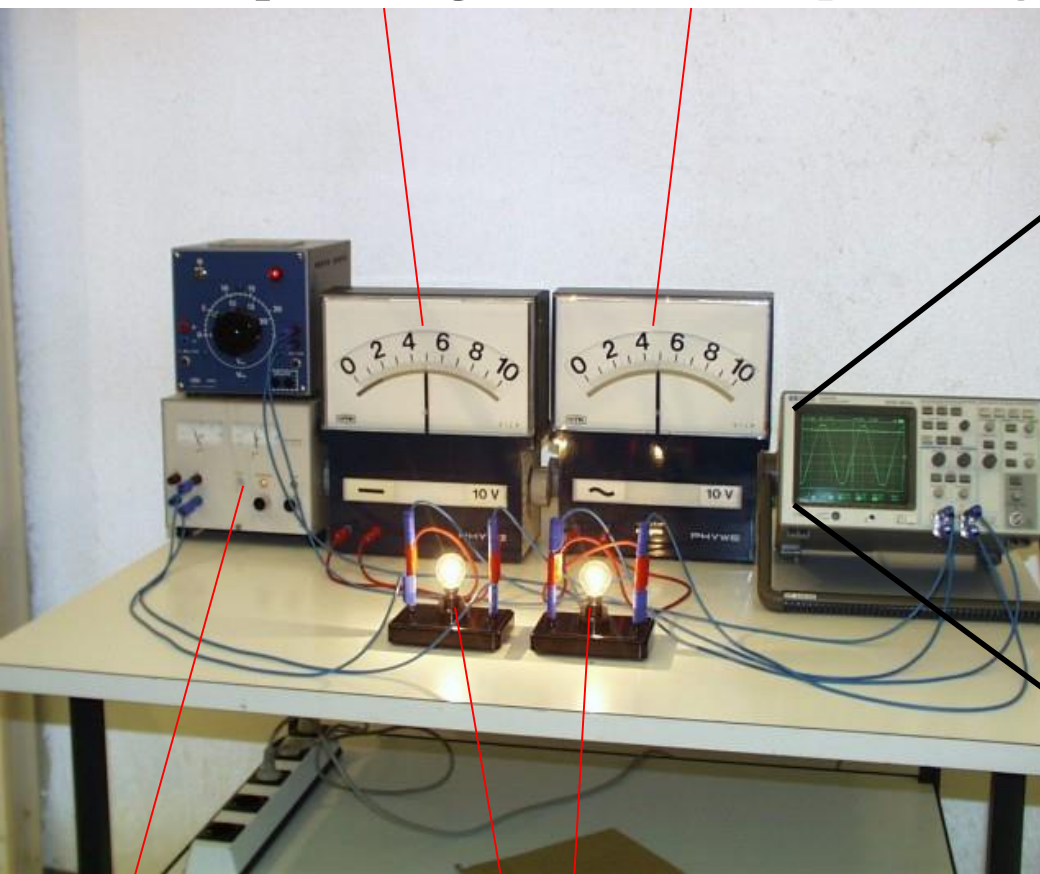


Versuch: Effektivwerte von Strom und Spannung

Die baugleichen Lampen werden auf gleiche Helligkeit eingestellt.

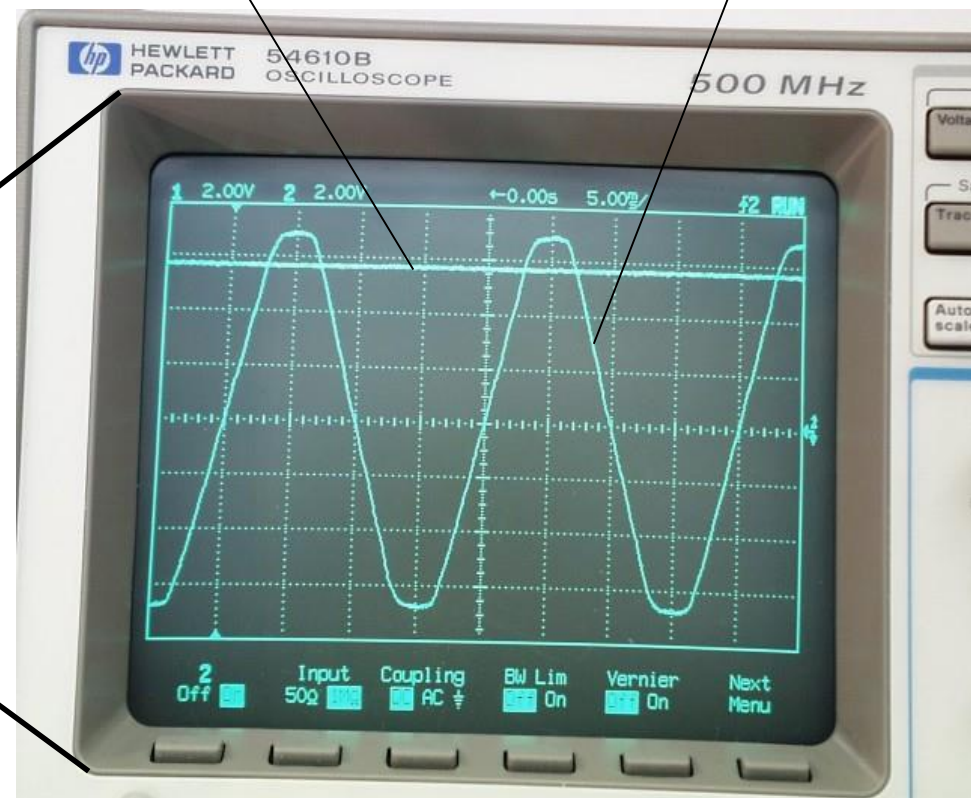
Gleichspannung

Wechselspannung



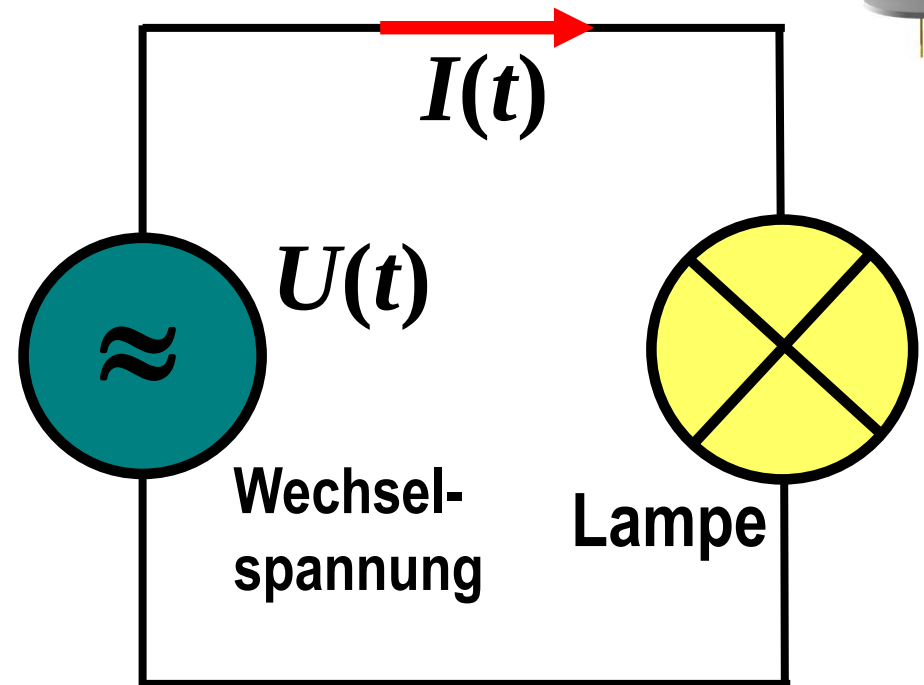
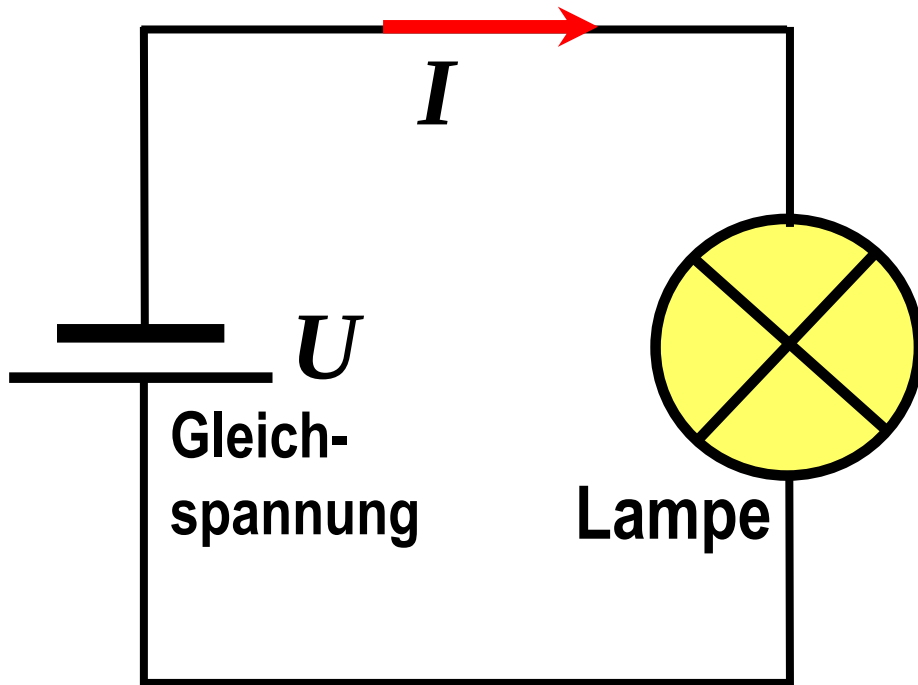
Gleichspannung

Wechselspannung



Netzgeräte

Lampen



„Die Lampen sind gleich hell“ bedeutet genauer, dass sie im *zeitlichen Mittel* gleich hell leuchten.

$$P = UI = \langle P(t) \rangle_{\approx} = \langle U(t)I(t) \rangle_{\approx} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

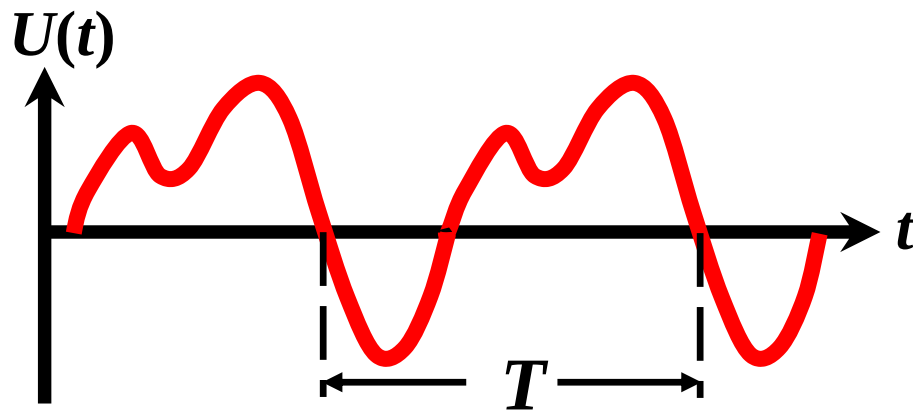
Beispiel:

Das Stromnetz liefert eine effektive Spannung von $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$. Die Spitzenspannung ist dann:

$U_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V (!)}$
Über einen Gleichrichter kann daher ein Kondensator auf über 300 V aufgeladen werden !



Allgemeine, zeitlich periodische Spannungsverläufe können immer auf sinusförmige zurückgeführt werden. Ein möglicher Verlauf von $U(t)$ sieht so aus:



Hierbei sind T die Schwingungsdauer und $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

In Abschnitt 2.8.1 hatten wir bereits gesehen, dass eine periodische Größe $U(t)$ immer durch eine sog. „Fourierreihe“ ausgedrückt werden kann:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

mit Konstanten u_n und φ_n .

Beliebige periodische Vorgänge können daher immer aus einzelnen Sinusschwingungen aufgebaut werden.

Daher werden in den folgenden Abschnitten immer nur Spannungs- und Stromverläufe der Form

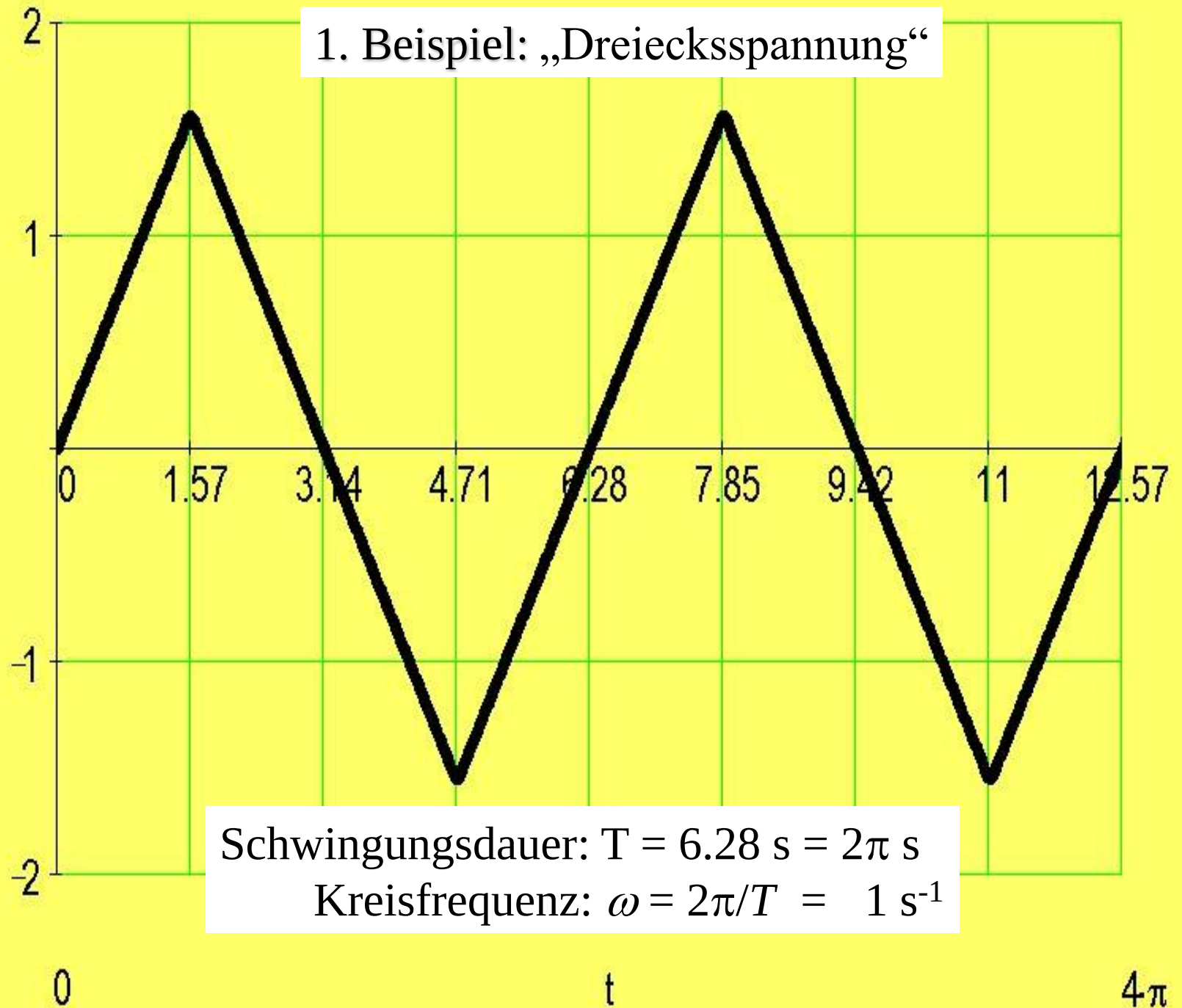
$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

betrachtet. Zwei Beispiele für Fourier-Zerlegungen folgen jetzt.

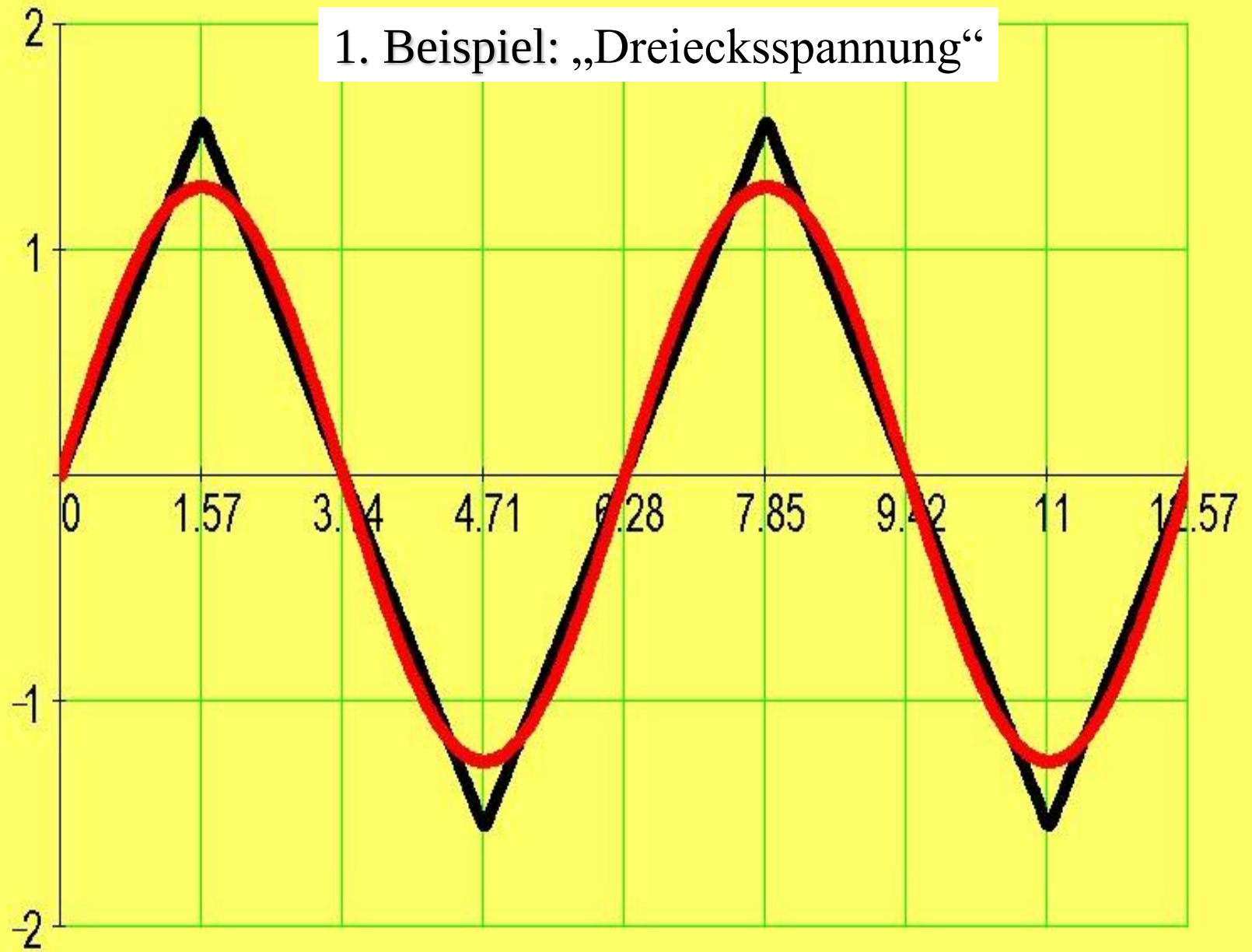
$U(t)$

1. Beispiel: „Dreiecksspannung“



Fourier-Zerlegung

1. Beispiel: „Dreiecksspannung“



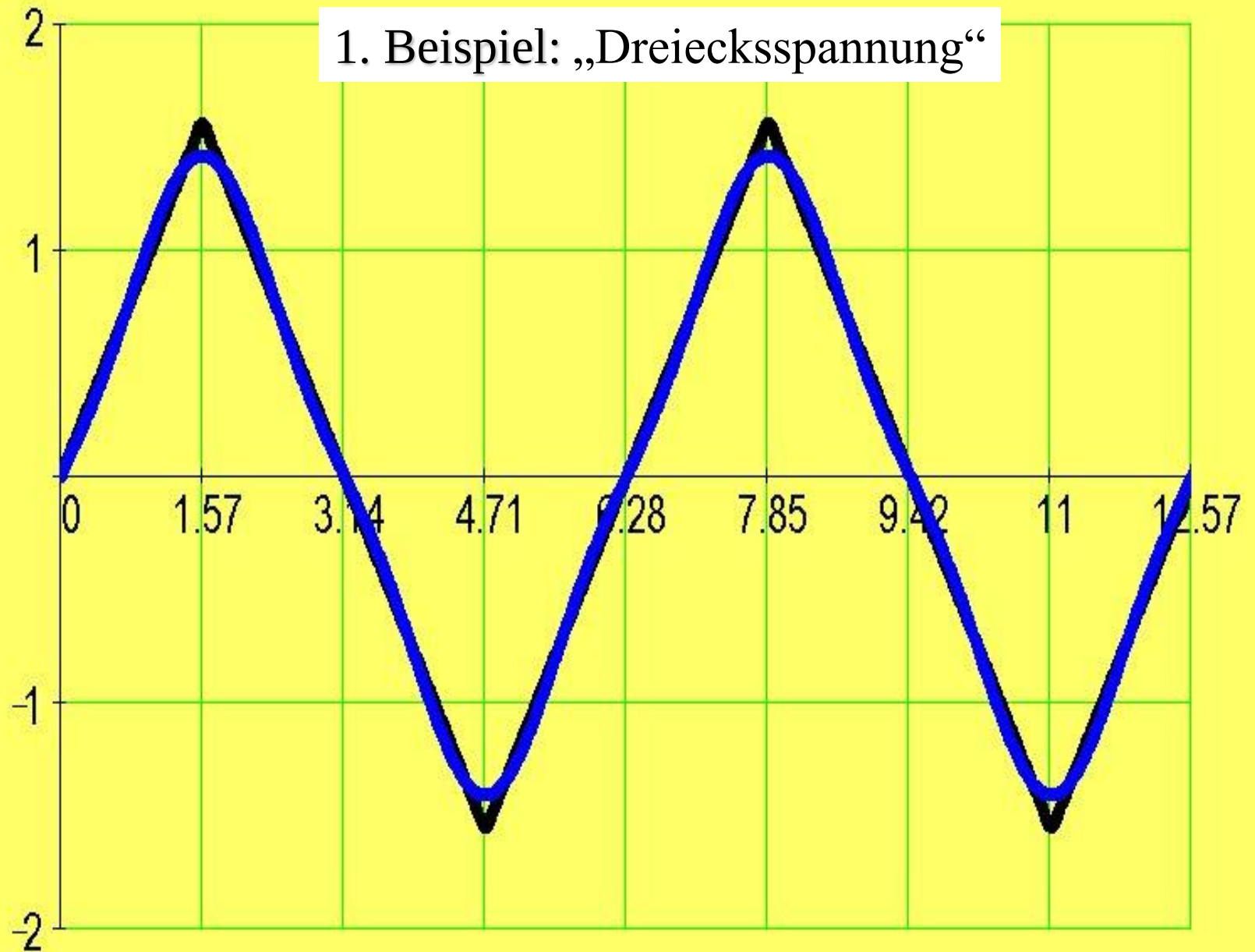
$$U_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin(t)$$

t

4π

Fourier- Zerlegung

1. Beispiel: „Dreiecksspannung“



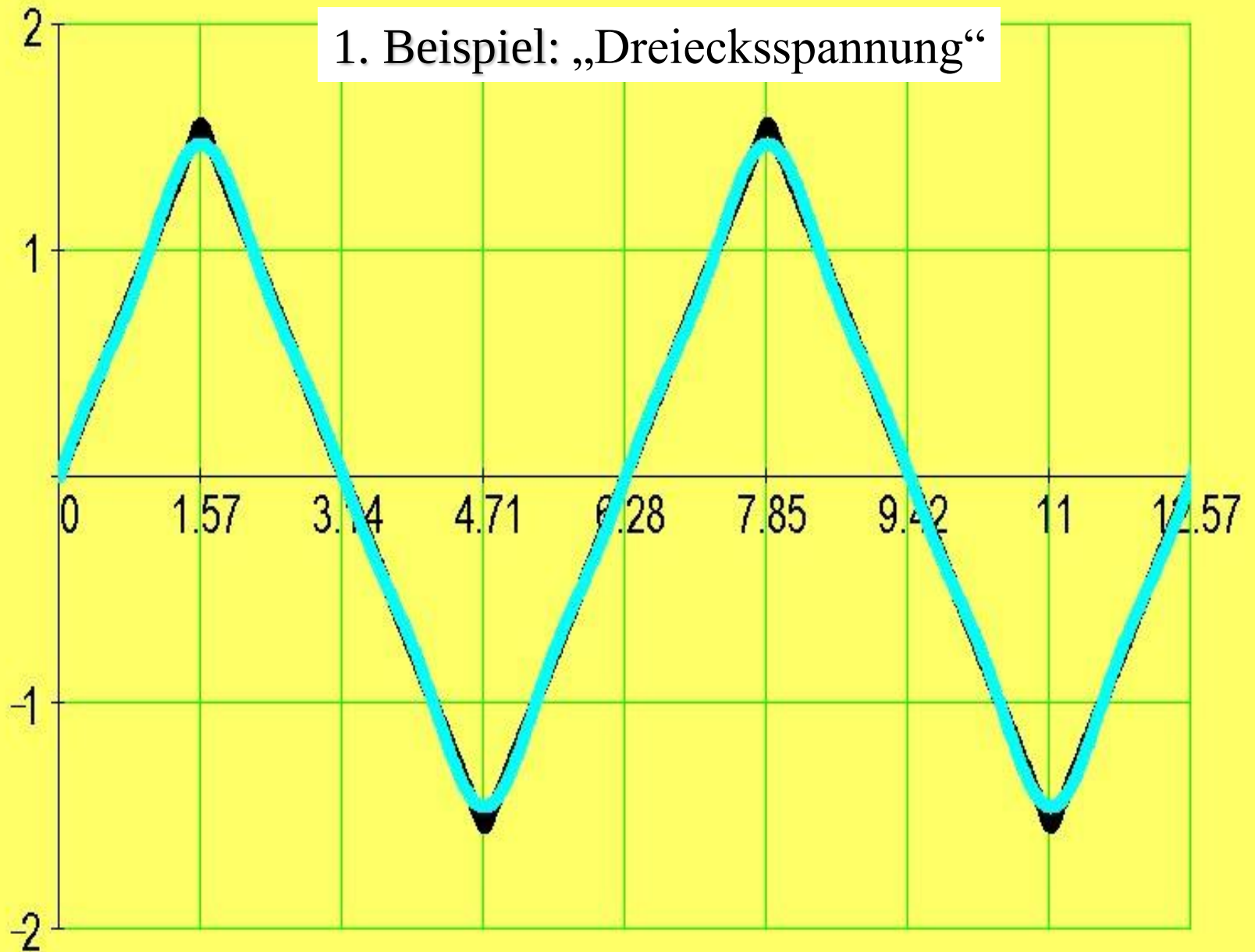
$$U_2(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(t) - \frac{\sin(3t)}{3^2} \right)$$

t

4π

Fourier- Zerlegung

1. Beispiel: „Dreiecksspannung“

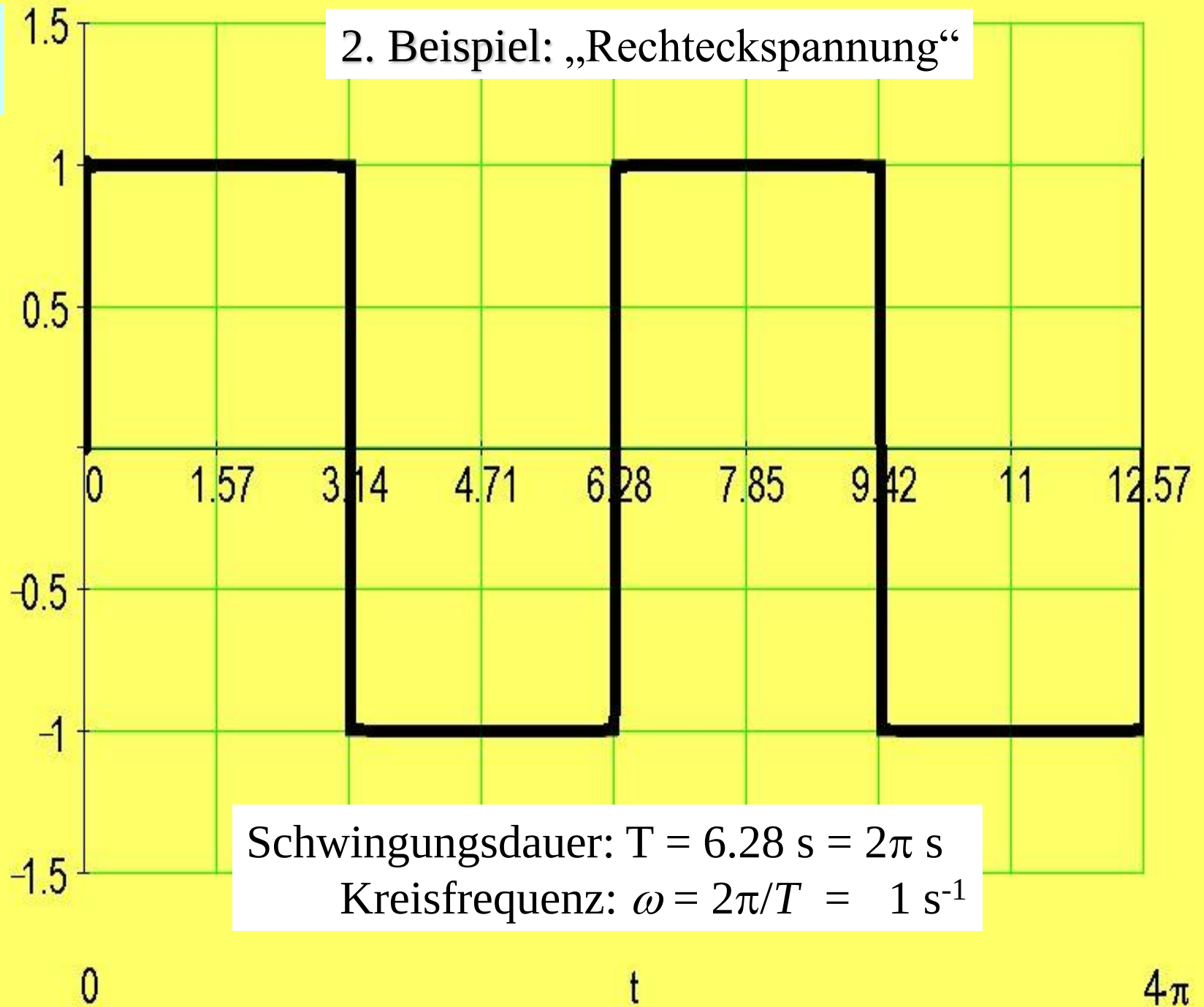


$$U_3(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(t) - \frac{\sin(3t)}{3^2} + \frac{\sin(5t)}{5^2} \right)$$

4π

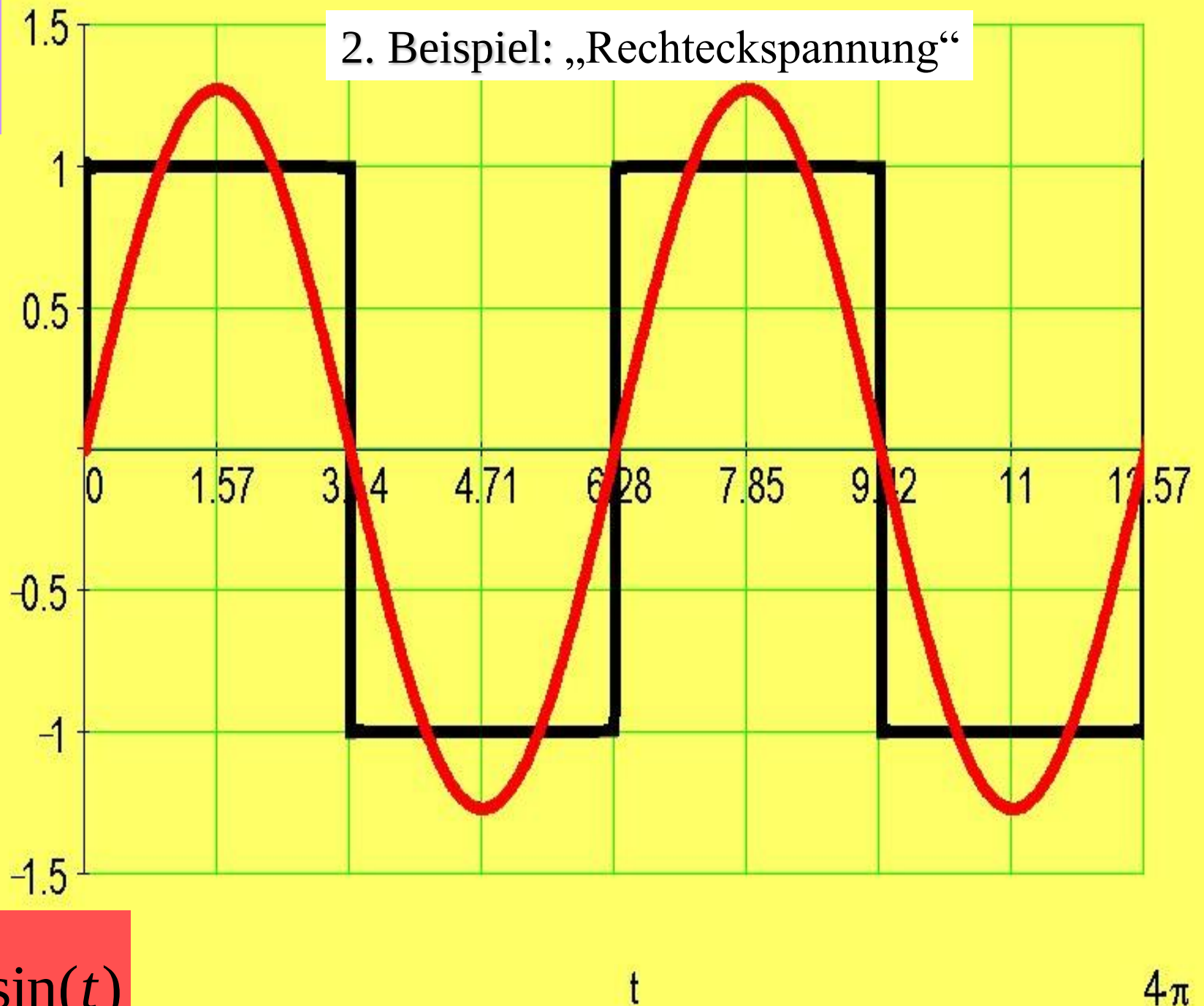
$U(t)$

2. Beispiel: „Rechteckspannung“



Fourier- Zerlegung

2. Beispiel: „Rechteckspannung“



$$U_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin(t)$$

Fourier- Zerlegung

2. Beispiel: „Rechteckspannung“



$$U_3(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} \right)$$

4π

Fourier- Zerlegung

2. Beispiel: „Rechteckspannung“



$$U_5(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \frac{\sin(9t)}{9} \right) \quad 4\pi$$



Die Effektivwerte von Strom- und Spannung hängen aber von der Form der Wechselspannung ab. Sie waren über den zeitlichen Mittelwert der Leistung $\langle P(t) \rangle$ definiert worden:

$$\begin{aligned}\langle P(t) \rangle_t &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T U(t) I(t) dt = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}\end{aligned}$$

Mit dem Ohm'schen Gesetz folgt:

$$\begin{aligned}\langle P(t) \rangle_t &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U^2(t)}{R} dt = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} \\ \Rightarrow U_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt}\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für I_{eff} :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt}$$

Beispiel:

Effektivwert für eine Dreiecksspannung

$$U(t) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{T/4}, & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ U_0 \left(2 - \frac{t}{T/4} \right), & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}$$

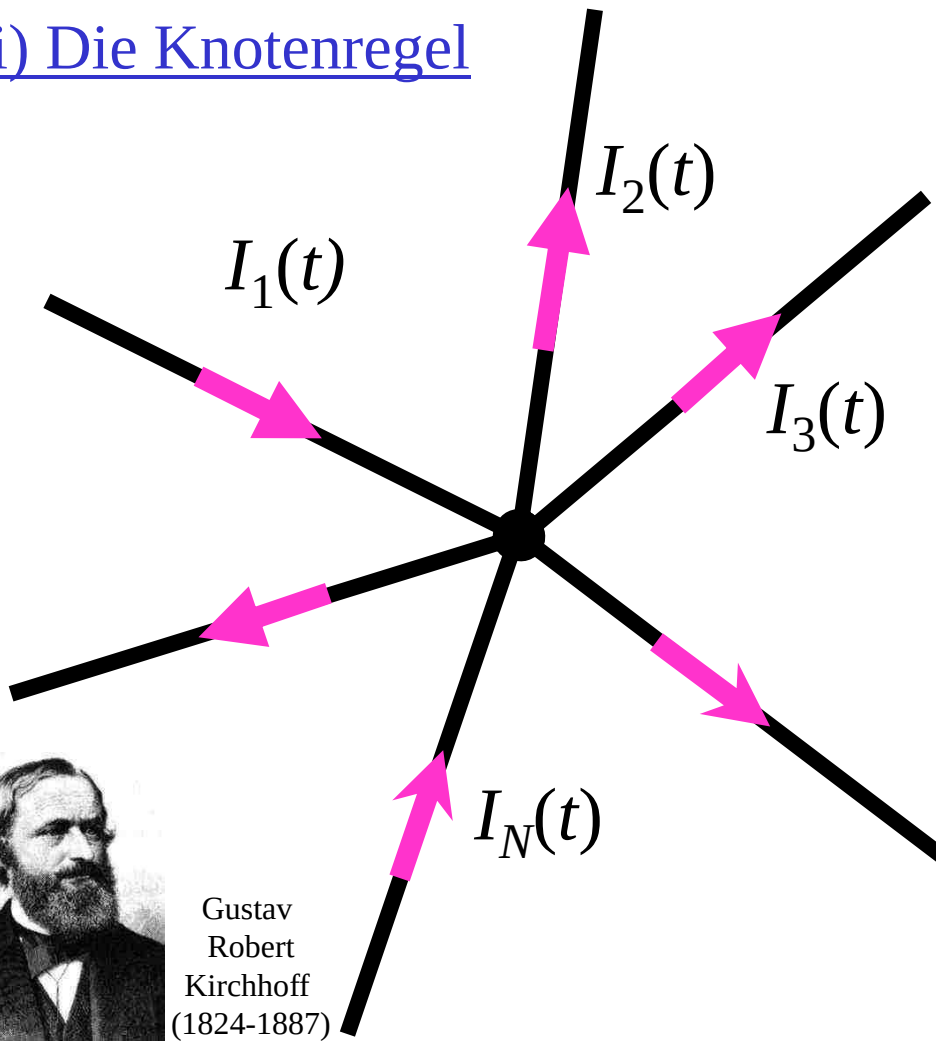
$$\begin{aligned}\Rightarrow U_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/4}^{3T/4} U^2(t) dt} \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$



Kirchhoff'sche Regeln für Wechselspannungen und Wechselströme

In einem früheren Kapitel wurden die beiden *Kirchhoff'schen Regeln* als Grundlagen zur Berechnung von elektrischen Netzwerken eingeführt. Sie gelten auch für Wechselspannungen und Wechselströme.

(i) Die Knotenregel



Gustav
Robert
Kirchhoff
(1824-1887)

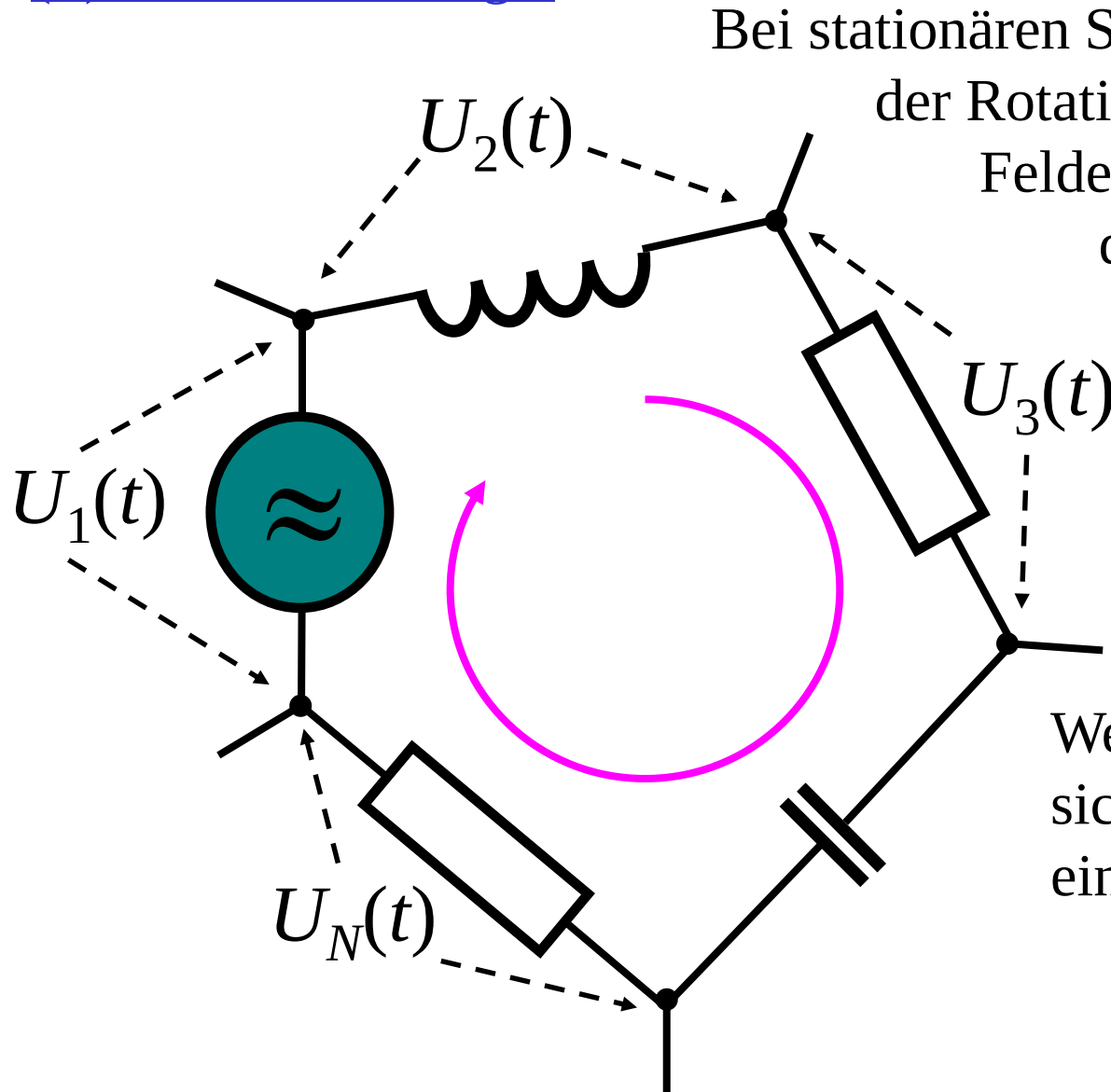
Im Fall stationärer Ströme drückt die Knotenregel das Prinzip der Ladungserhaltung aus. Dieses Prinzip muß aber für alle Zeitpunkte erfüllt sein.

In jedem Knoten eines elektrischen Netzwerkes verschwindet daher zu jedem Zeitpunkt t die Summe aller N Ströme:

$$\sum_{i=1}^N I_i(t) = 0$$



(ii) Die Maschenregel



Bei stationären Strömen verschwindet wegen der Rotationsfreiheit des elektrostatischen Feldes in jeder geschlossenen Masche die Summe aller Spannungen.

In der Elektrodynamik war:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_{\text{ind}}$$

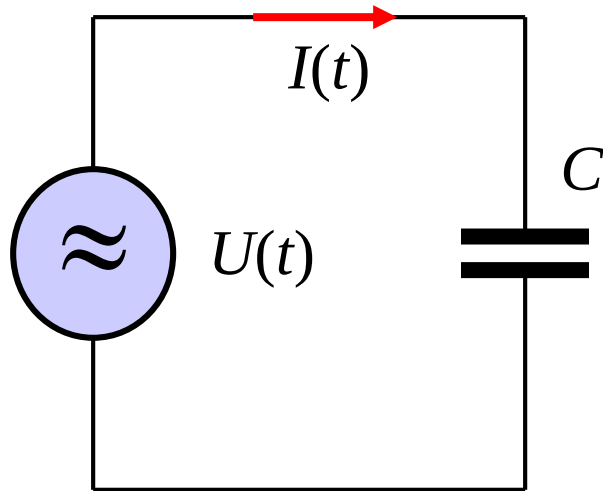
$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} - U_{\text{ind}} = 0$$

Wenn Induktivitäten mit berücksichtigt werden, gilt also auch in einer Masche zu jedem Zeitpunkt:

$$\sum_{i=1}^N U_i(t) = 0$$



Kondensator im Wechselstromkreis



Der Zusammenhang zwischen der Spannung und dem Strom ist:

$$Q = CU \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

Da

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

folgt:

$$I(t) = -\omega C U_0 \sin(\omega t)$$

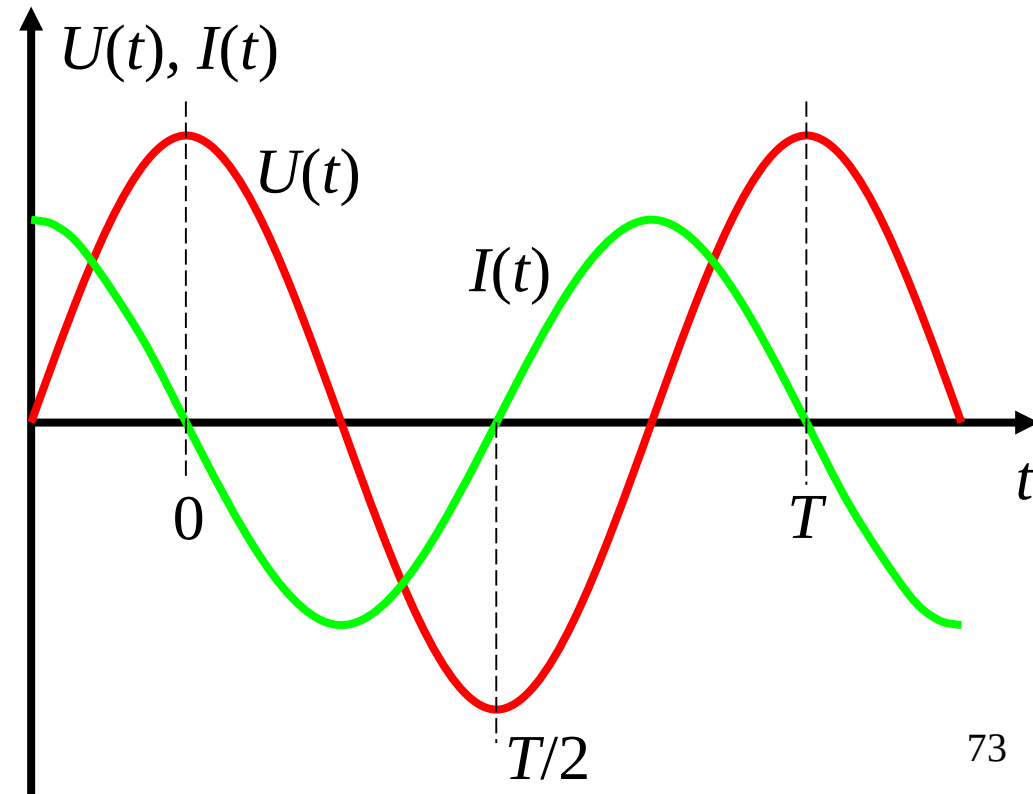
Mit

$$-\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} I(t) &= \omega C U_0 \cos\left(\omega t + \pi/2\right) \\ &= I_0 \cos\left(\omega t + \pi/2\right) \end{aligned}$$

Am Kondensator läuft der Strom der Spannung um $\pi/2 = 90^\circ$ voraus.



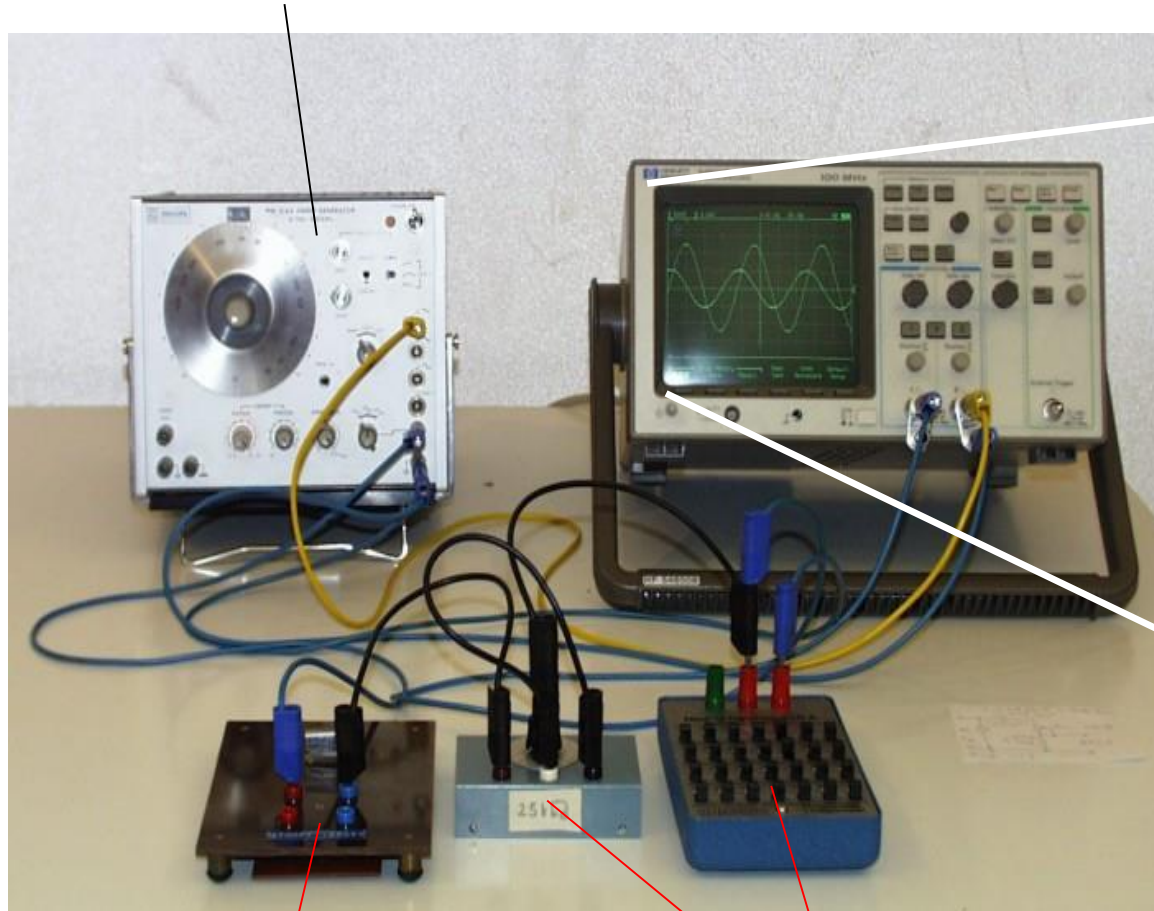


Versuch 3: RC-Kreis

Sinusgenerator

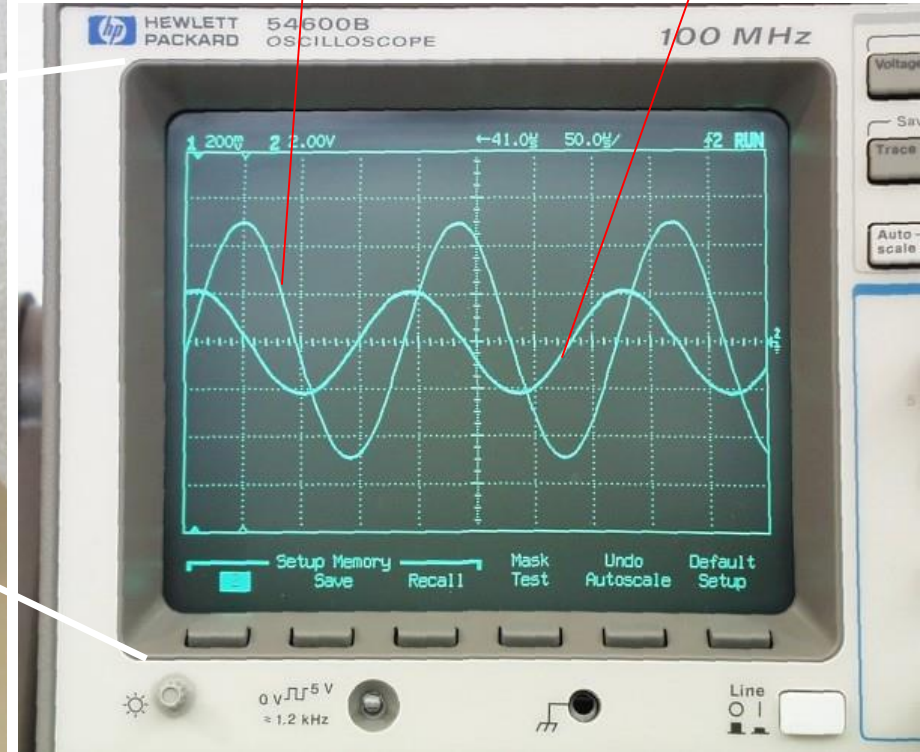
Spannung

Strom



Kondensator

Widerstände



Beim Kondensator läuft der Strom der Spannung voraus, weil sich zunächst Ladungen auf den Platten ansammeln müssen.

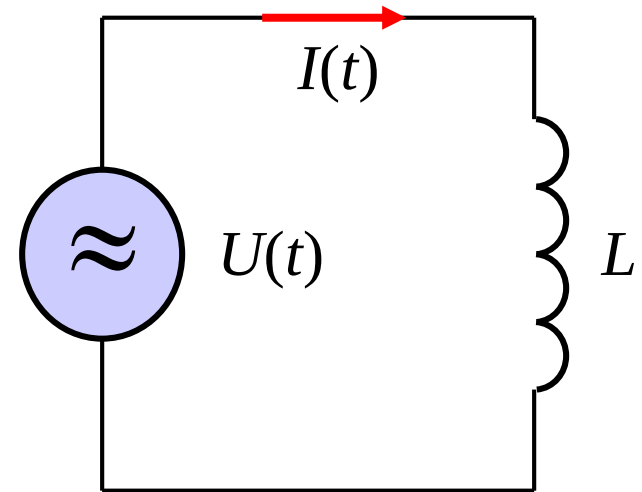


Die mittlere Leistung am Kondensator ist ($\omega = 2\pi/T$):

$$\begin{aligned}\langle P(t) \rangle_t &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) I(t) dt \\ &= \frac{\omega C U_0^2}{T} \underbrace{\int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt}_{=0} = 0\end{aligned}$$

Am Kondensator wird im Mittel also *keine* elektrische Leistung aufgenommen! Ein idealer Kondensator wird im Gegensatz zu einem Ohm'schen Widerstand also nicht erwärmt. Diese zeitabhängige Leistung nennt man daher auch „*Scheinleistung*“ oder „*Blindleistung*“.

Induktivität im Wechselstromkreis



Der Zusammenhang von Strom und Spannung ist nun (Maschenregel):

$$\begin{aligned}U(t) - L \frac{dI(t)}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow U(t) &= L \frac{dI(t)}{dt}\end{aligned}$$



Integration ergibt:

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U(t') dt' = \frac{U_0}{L} \int_0^t \cos(\omega t') dt'$$

$$= \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t)$$

Diesmal ist:

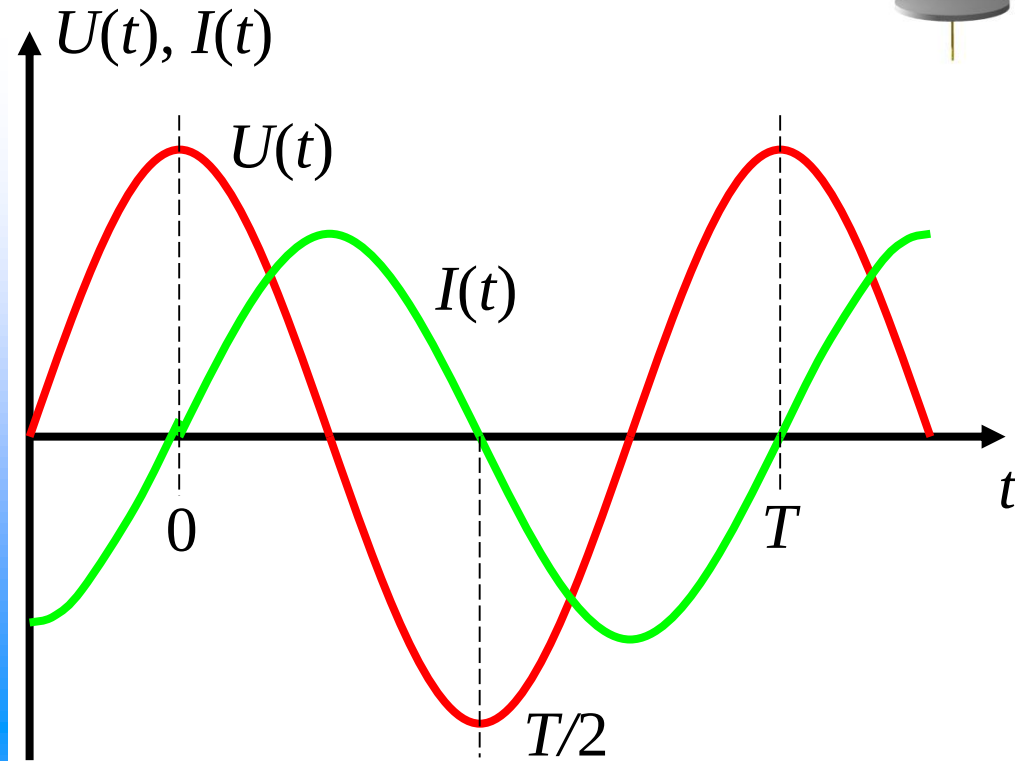
$$\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$$

Damit folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$= I_0 \cos(\omega t - \pi/2)$$

Am der Spule läuft der Strom der Spannung um $\pi/2 = 90^\circ$ nach. Es muß also erst eine Spannung anliegen, damit sich der Strom aufbaut.



Wegen der Phasenverschiebung um $\pi/2$ zwischen Strom und Spannung gilt hier für die mittlere Leistung wieder:

$$\langle P(t) \rangle_t = 0$$

Bei einer idealen Spule wirkt also auch nur die Blindleistung.

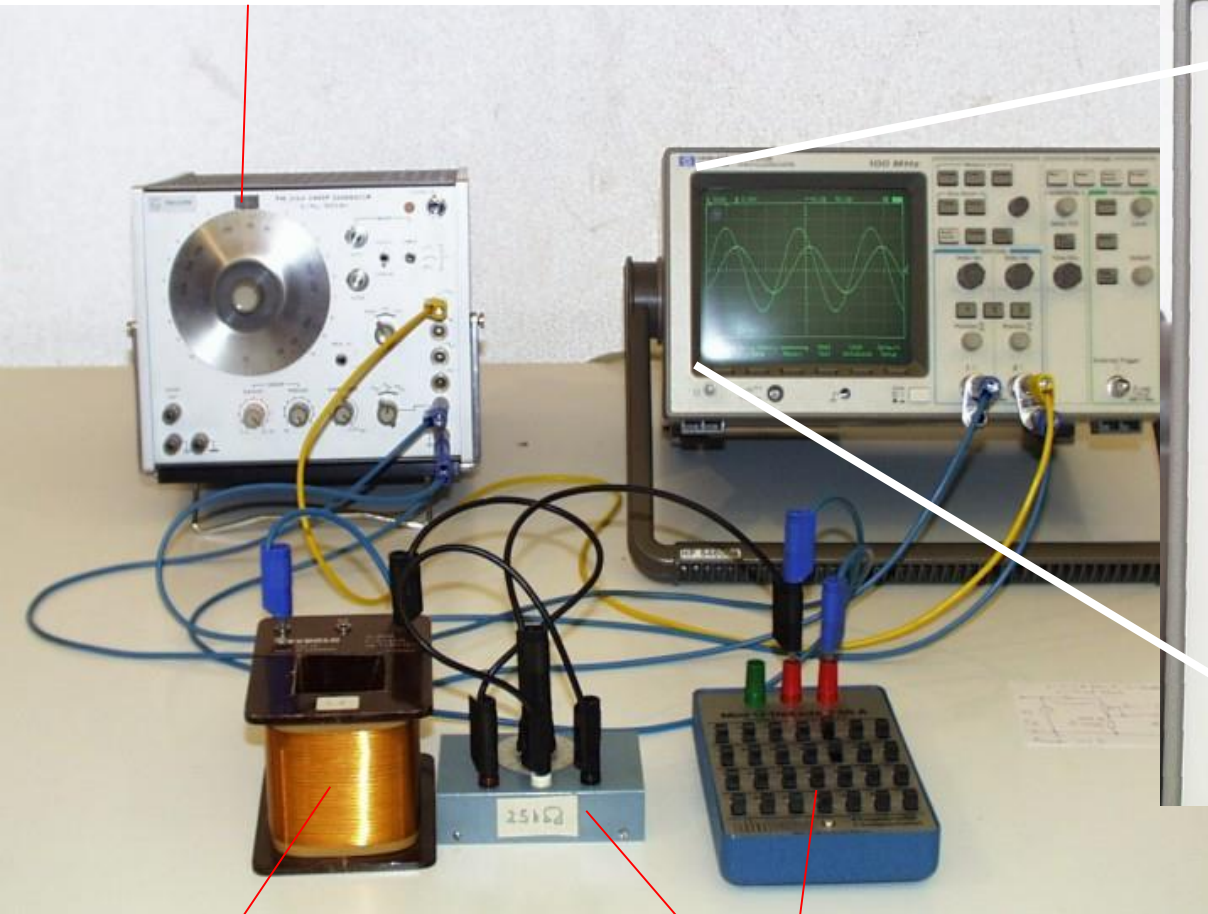


Versuch 4: RL-Kreis

Sinusgenerator

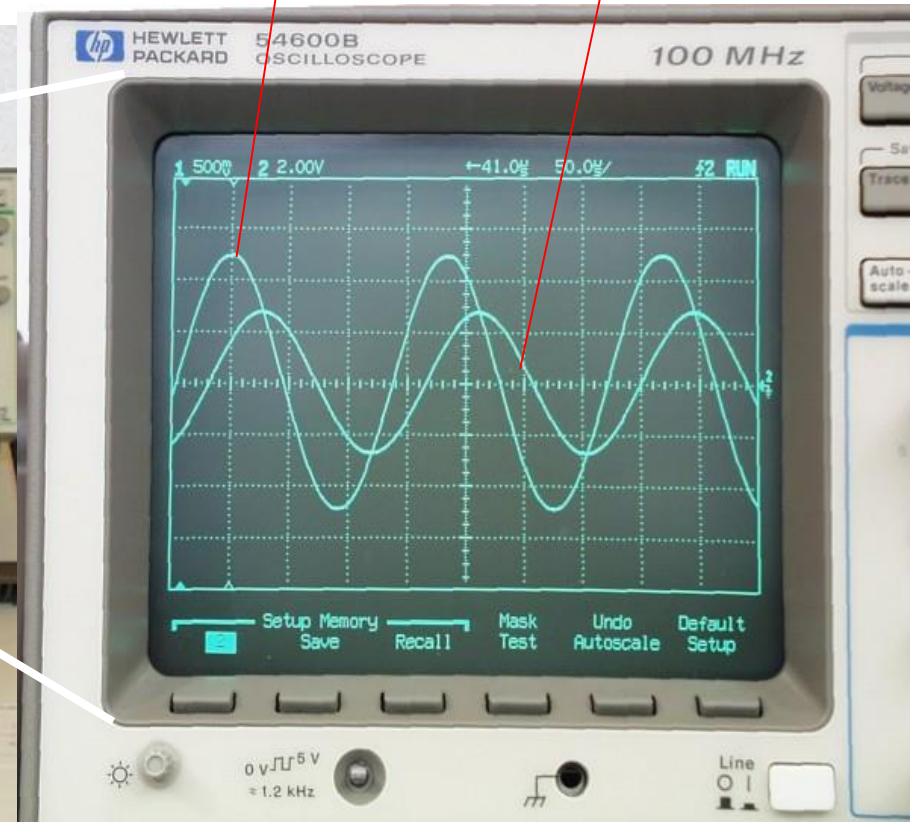
Spannung

Strom



Spule

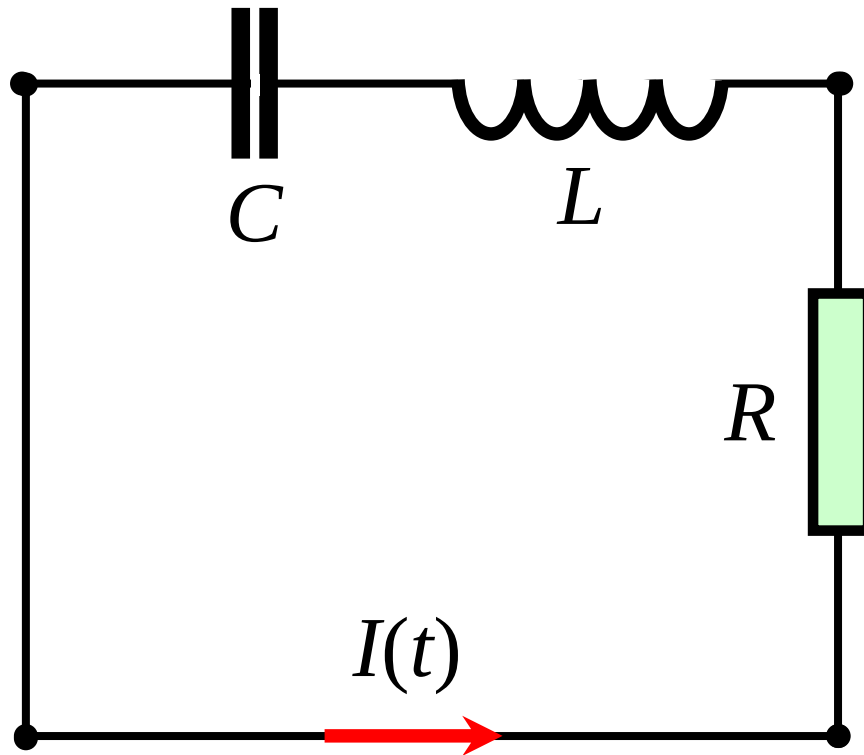
Widerstände



Bei der Spule läuft der Strom der Spannung nach, weil die Induktionsspannung ihrer Ursache entgegenwirkt.



Der elektrische Schwingkreis



Wir betrachten eine Reihenschaltung aus einer Spule, einem Kondensator und einem Ohm'schen Widerstand. Gesucht ist die Zeitabhängigkeit des Stromflusses $I(t)$ durch diesen „Schwingkreis“.

Aufgrund der Maschenregel gilt:

$$U_C - U_L + U_R = 0$$

Einsetzen der jeweiligen Spannungen ergibt: $\frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = 0$

Differenzieren dieser Gleichung führt mit $I(t) = dQ/dt$ auf die DGL:

$$\frac{I(t)}{C} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad I(0) = I_0, \dot{I}(0) = \dot{I}_0$$



Umformen dieser DGL ergibt:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = 0$$

Mit den Definitionen

$$\frac{R}{L} = 2\gamma \quad \text{und} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

folgt:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0$$

Dies ist dieselbe DGL wie beim gedämpften harmonischen Oszillator. Daher kann die Lösung direkt aus Abschnitt 2.8.5 übertragen werden.

In Abschnitt 2.8.5 waren die Vorfaktoren in der DGL wie folgt definiert:

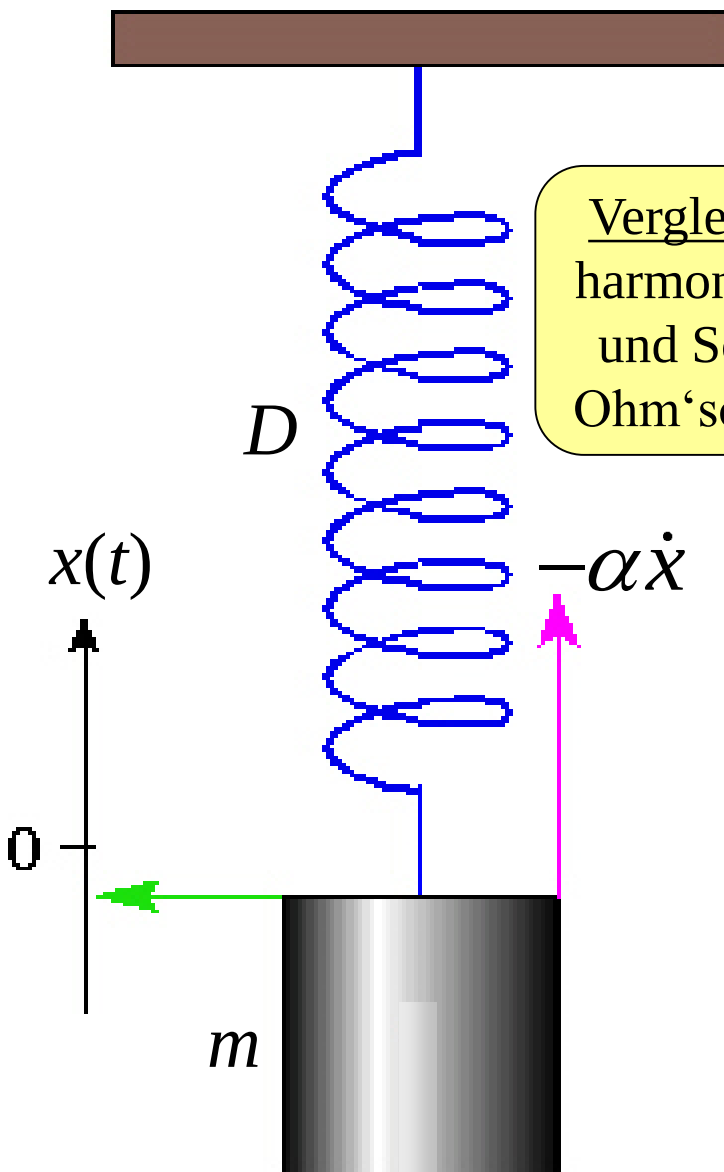
$$\frac{\alpha}{m} = 2\gamma \quad \text{und} \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2$$

Der Widerstand R entspricht also dem Reibungsfaktor α . Ohne den Widerstand, d.h. für $R = 0$, ergibt sich eine ungedämpfte harmonische Schwingung für den fließenden Strom, also:

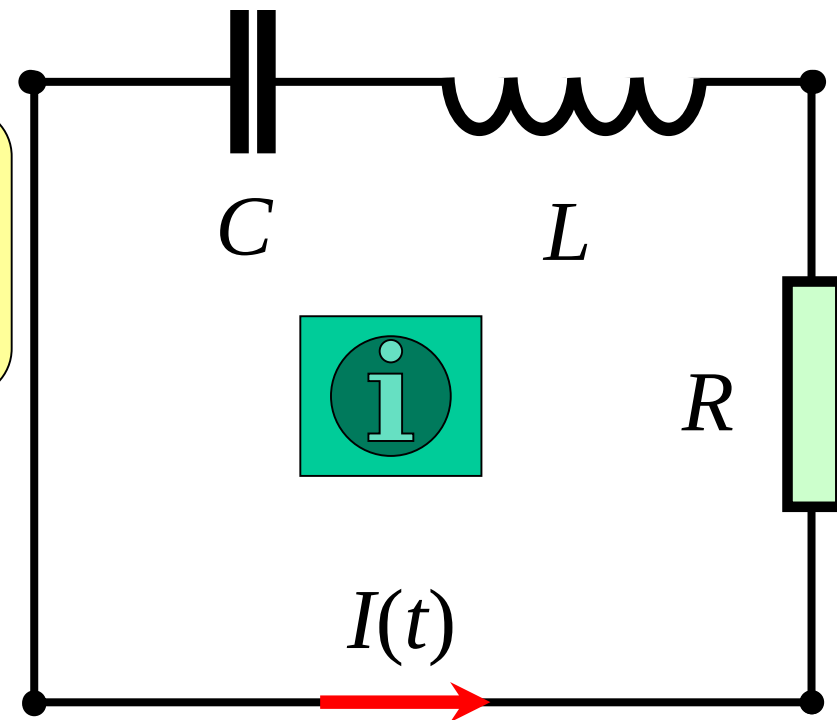
$$I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{I}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Der Vergleich mit dem gedämpften harmonischen Oszillator ergibt:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0$$



Vergleich: gedämpfter
harmonischer Oszillator
und Schwingkreis mit
Ohm'schem Widerstand



$$x(t) \Leftrightarrow I(t)$$

$$m \Leftrightarrow L$$

$$D^{-1} \Leftrightarrow C$$

$$\alpha \Leftrightarrow R$$



Das Verhältnis von ω_0 und γ bestimmt daher wieder, welcher spezielle Fall sich als Lösung für $I(t)$ ergibt. Der Vergleich mit Abschnitt 2.8.5 ergibt:

(i) Schwingfall:

In diesem Fall ist $\omega_0 > \gamma$. Dann wird $I(t)$ durch eine gedämpfte Schwingung beschrieben. $\omega_0 > \gamma$ bedeutet für den elektrischen Schwingkreis:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} > \frac{R}{2L} \Rightarrow 2\sqrt{LC} > RC$$

Im Schwingfall muß also die doppelte Periode $2(LC)^{1/2}$ des ungedämpften Kreises größer sein als die Zeitkonstante des RC -Teils.

(ii) Kriechfall:

Dann ist $\omega_0 < \gamma$. Nun ist $I(t)$ eine abfallende Exponentialfunktion. $\omega_0 < \gamma$ bedeutet:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} < \frac{R}{2L} \Rightarrow 2\sqrt{LC} < RC$$

(iii) Aperiodischer Grenzfall:

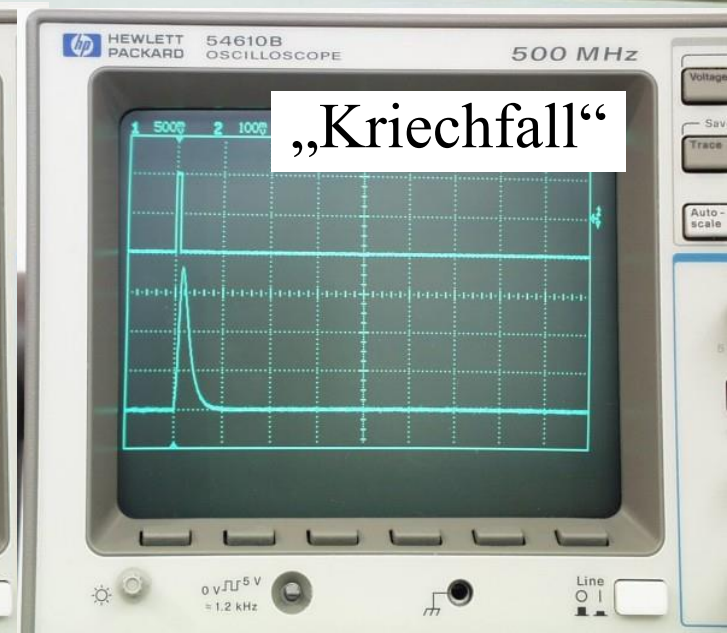
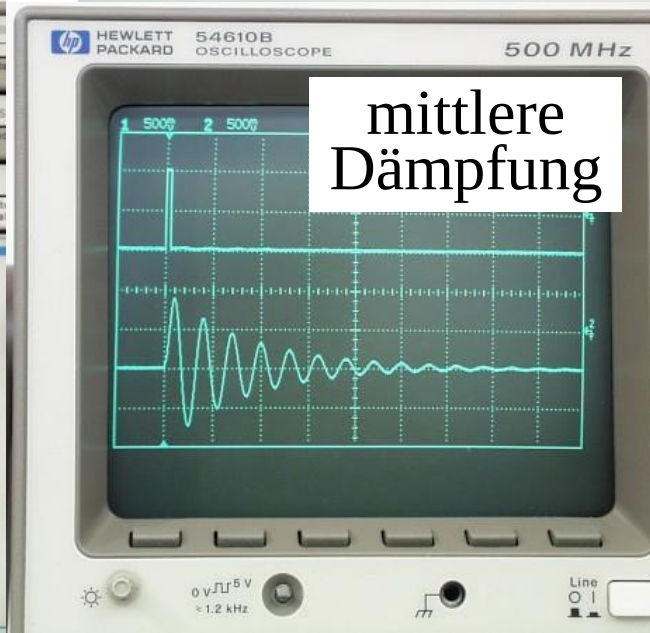
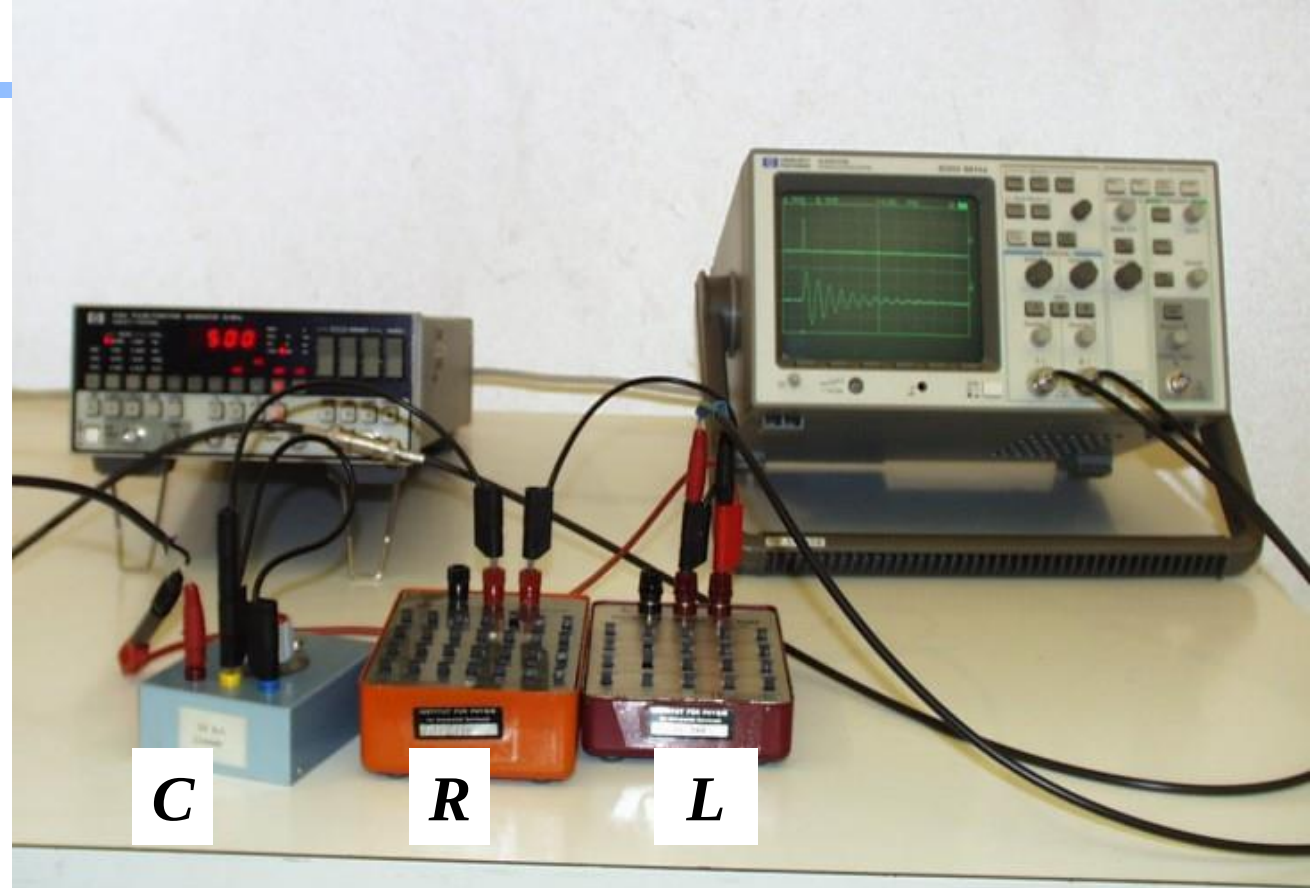
Es ist $\omega_0 = \gamma$. Dann ist $I(t)$ ebenfalls eine abfallende Exponentialfunktion. $\omega_0 = \gamma$ bedeutet jetzt für die Parameter des Schwingkreises:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L} \Rightarrow 2\sqrt{LC} = RC$$

Versuch 5: LCR-Kreis

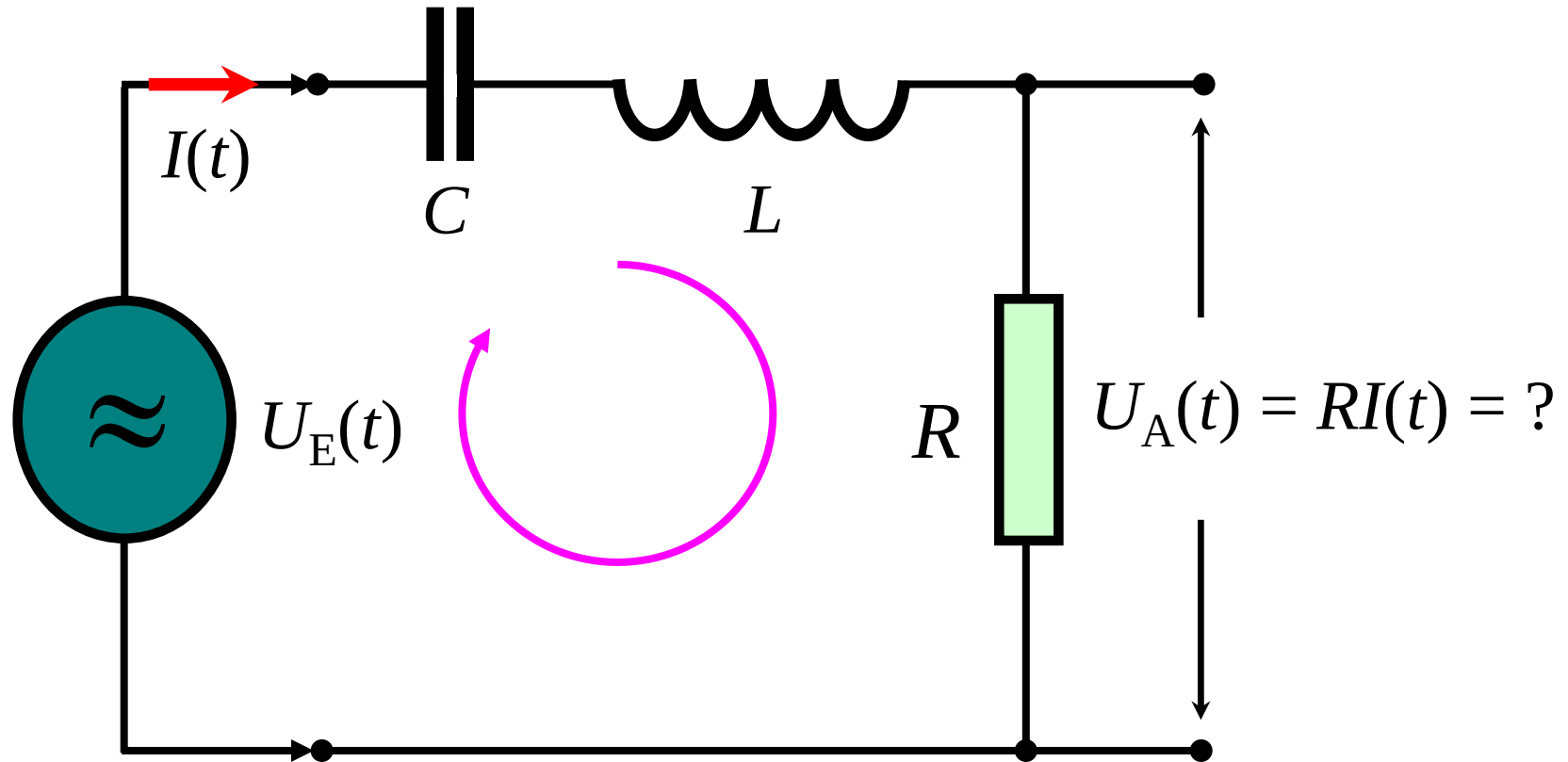
Der elektrische Schwingkreis für verschiedene Kombinationen der Werte für den Widerstand R , die Induktivität L der Spule und der Kapazität C des Kondensators.

Anregungs-
impuls





Der Schwingkreis kann auch von Außen mit einer Wechselspannung angeregt werden.



Die Maschenregel ergibt jetzt: $U_C - U_L + U_R = U_E$

Einsetzen der jeweiligen Spannungen liefert:

$$\frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = U_E(t)$$



Differenzieren dieser Gleichung führt wieder mit $I(t) = dQ/dt$ auf die DGL:

$$\frac{I(t)}{C} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} = \frac{dU_E(t)}{dt}$$

Mit den Definitionen $\frac{R}{L} = 2\gamma$ und $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ folgt wie vorher:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{1}{L} \frac{dU_E(t)}{dt} = f(t)$$

Das ist eine lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $I(t)$. Sie kann für eine periodische Anregung $U_E(t)$ und damit auch für eine periodische Funktion $f(t)$ wie in Abschnitt 2.8.7 ausführlich beschrieben gelöst werden. Die DGL ist analog zu der DGL des gedämpften harmonischen Oszillators mit äußerer Anregung.

Dies wird jetzt nicht weiter diskutiert, weil es später in Abschnitt 4.6.8 über sog. „Vierpole“ noch ausführlicher behandelt wird.



Komplexe Schreibweise

Es wird jetzt ein Formalismus vorgestellt, mit dem beliebige R,C,L-Netzwerke berechnet werden können.

Dazu wird der *Wechselstromwiderstand*

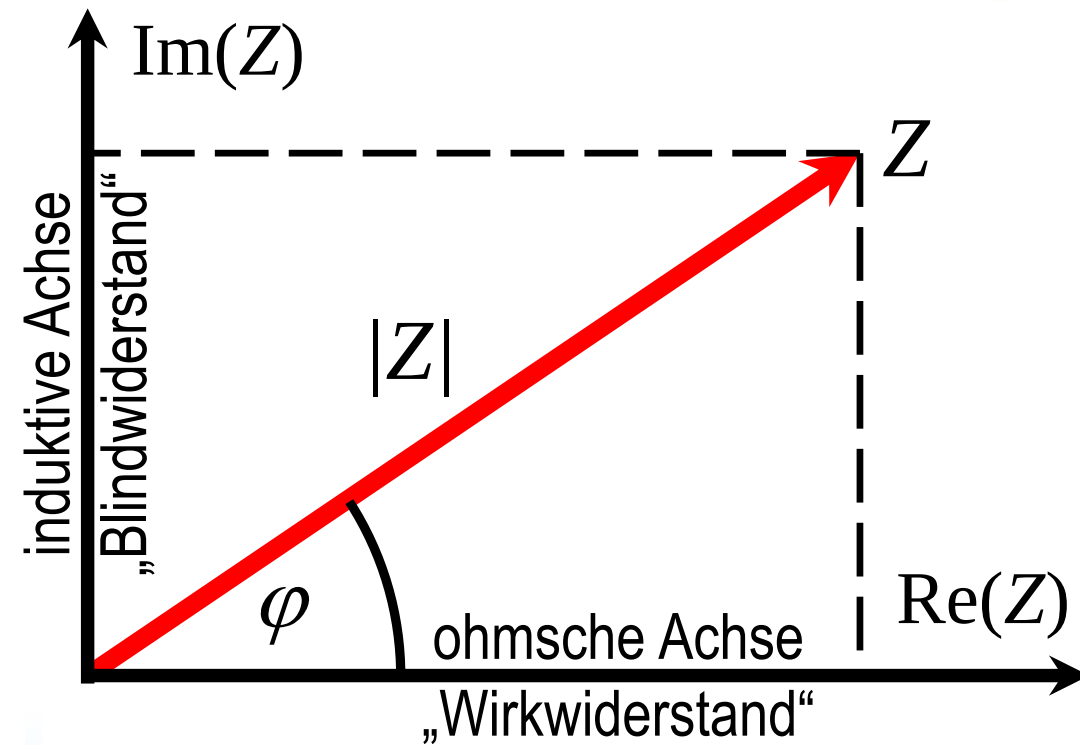
$$Z = |Z| e^{i\varphi}$$

definiert, der eine komplexe Zahl mit dem Betrag $|Z|$ und der Phase φ ist. Der Wechselstromwiderstand eines Stromkreises wird auch als seine „*Impedanz*“ bezeichnet.

Für eine Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

wird jetzt die komplexe Schreibweise



$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

eingeführt. Dem Realteil von $U(t)$ entspricht jetzt die ursprüngliche Wechselspannung.



Auch für den Strom schreibt man

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

wobei die Amplitude I_0 eine *komplexe Zahl* sein kann. Wir berechnen jetzt das Verhältnis der Amplituden $Z = U_0/I_0$ für einen Ohm'schen Widerstand, eine Kapazität und eine Induktivität. Dieses Verhältnis ist die Impedanz.

(i) Ohm'scher Widerstand:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = R I_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow U_0 = R I_0 \Rightarrow Z = \frac{U_0}{I_0} = R$$

Ein Ohm'scher Widerstand hat also eine reelle Impedanz, d.h.

$$|Z| = R \text{ und } \varphi = 0.$$

(ii) Kapazität:

Am Kondensator gilt:

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} = C \frac{dU(t)}{dt}$$

$$= C \frac{d}{dt} (U_0 e^{i\omega t})$$

$$= C i \omega U_0 e^{i\omega t}$$

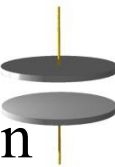
Dann folgt für die Impedanz:

$$\Rightarrow Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{i\omega C} = -i \frac{1}{\omega C}$$

Diese Impedanz ist rein imaginär, mit:

$$|Z| = \frac{1}{\omega C} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z| = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |Z| = \infty$$



(iii) Induktivität:

An einer Spule gilt:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = L \frac{dI(t)}{dt}$$

$$= L \frac{d}{dt} (I_0 e^{i\omega t})$$

$$= L i \omega I_0 e^{i\omega t}$$

Dann folgt für die Impedanz:

$$\Rightarrow Z = \frac{U_0}{I_0} = i\omega L$$

Diese Impedanz ist wieder rein imaginär, mit:

$$|Z| = \omega L \quad \varphi = +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z| = \infty \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |Z| = 0$$

Mit der Impedanz und dem Ohm'schen Gesetz kann rückwärts wieder der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung berechnet werden.

Beispiel:

Strom und Spannung am Kondensator

Es war: $Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{i(-\pi/2)}$

Mit dem Ohm'schen Gesetz folgt:

$$U(t) = \text{Re}(U_0 e^{i\omega t}) = U_0 \cos(\omega t)$$

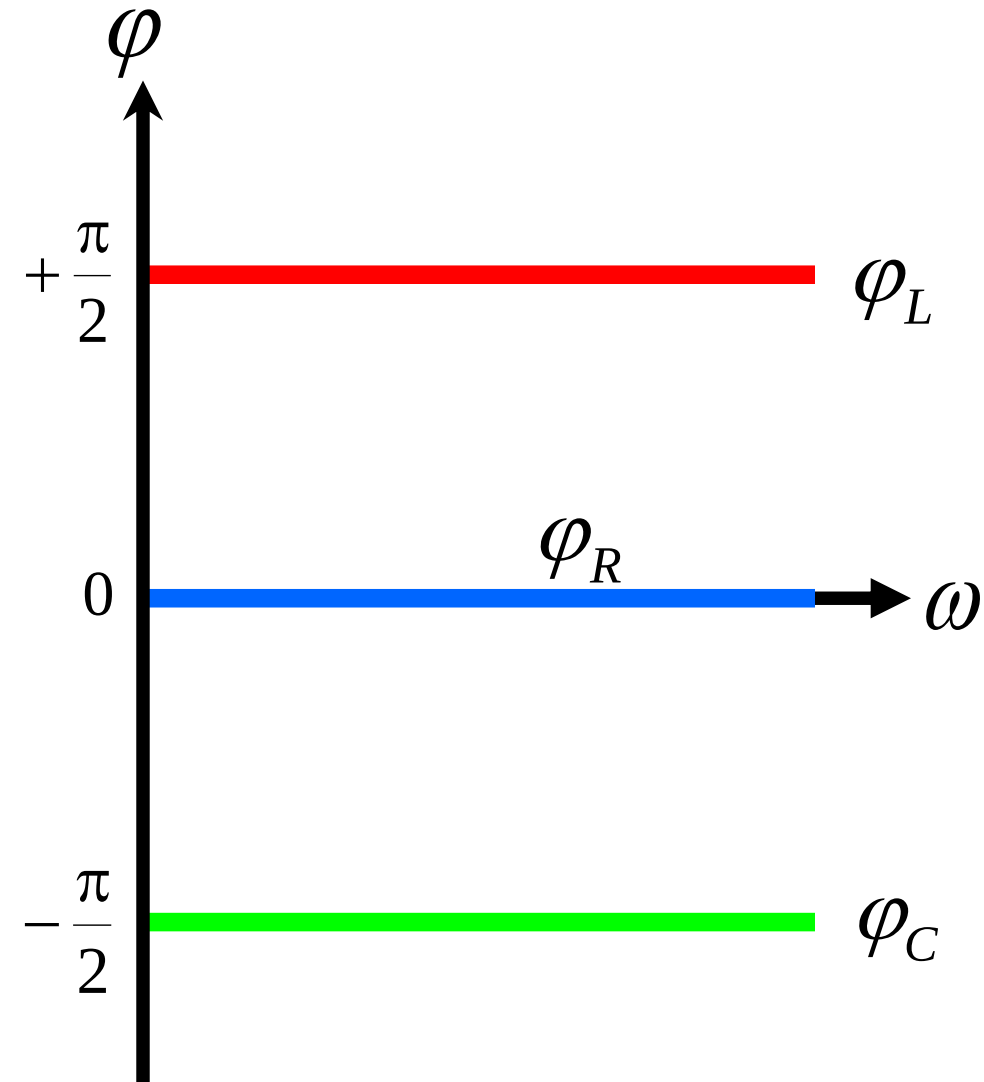
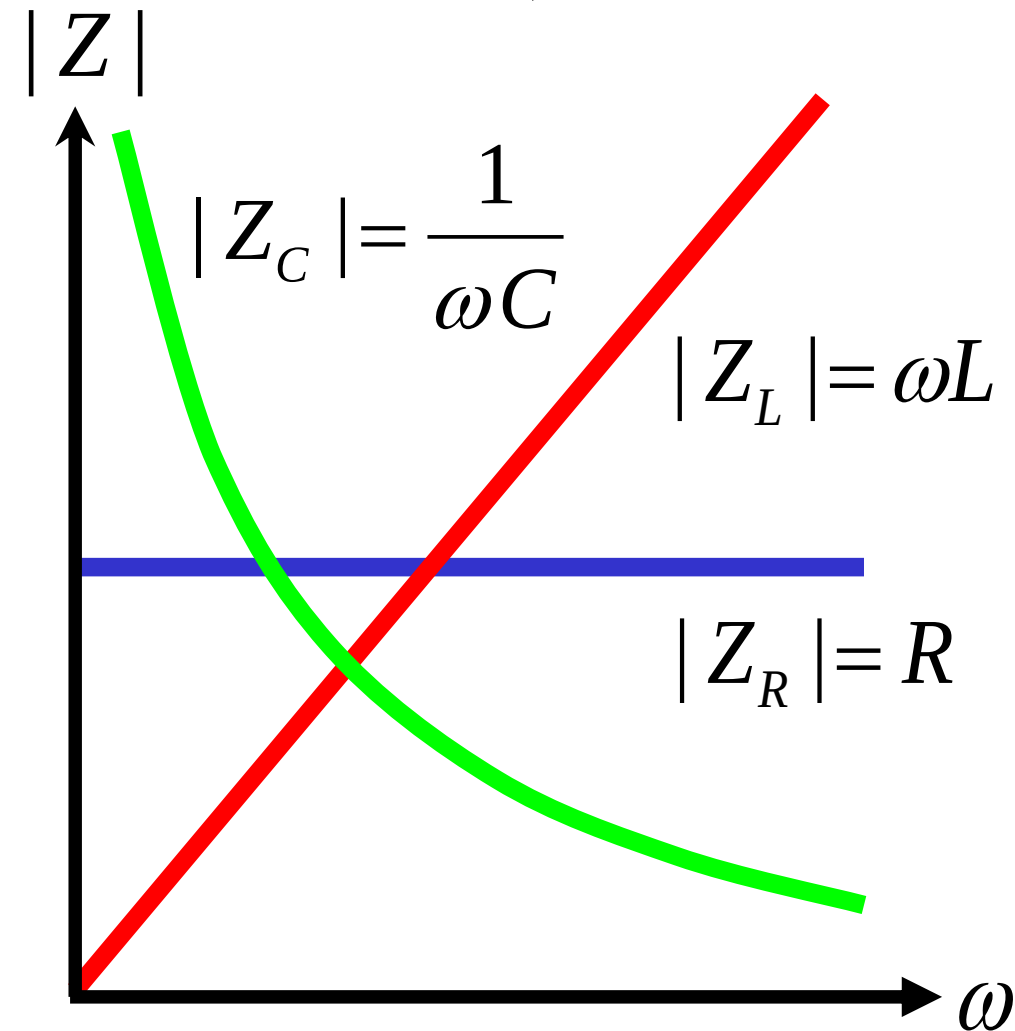
$$Z_C = \frac{U_0}{I_0} \Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{Z_C} = U_0 \omega C e^{i\pi/2}$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \text{Re}(I_0 e^{i\omega t}) = \text{Re}(U_0 \omega C e^{i\pi/2} e^{i\omega t}) \\ &= \text{Re}(U_0 \omega C e^{i(\omega t + \pi/2)}) = U_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Strom eilt Spannung um $\pi/2$ voraus.



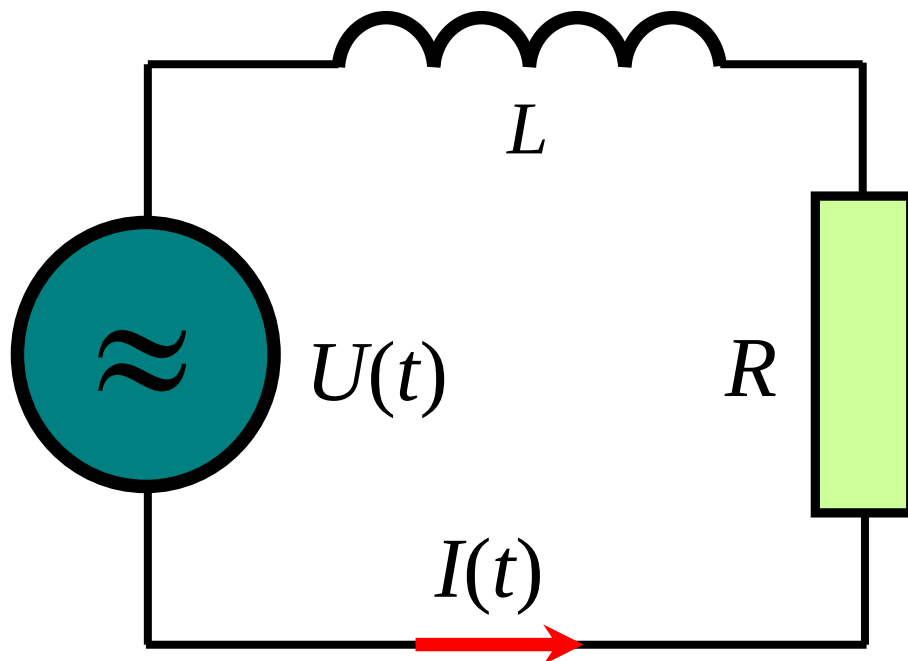
Zusammenfassung der Werte für die Impedanzen eines Ohm'schen Widerstandes, einer Induktivität und einer Kapazität.





Dieses Vorgehen lässt sich jetzt auf beliebige RCL -Kreise übertragen. Dies soll anhand von zwei Beispielen verdeutlicht werden.

Beispiel 1: Serienschaltung aus einem Ohm'schen Widerstand und einer Induktivität:



Die Gesamtimpedanz Z_{RL} ergibt sich durch Addition der Einzelimpedanzen wie bei der Serienschaltung von Ohm'schen Widerständen.

Also folgt:

$$Z_{RL} = Z_R + Z_L = R + i\omega L$$

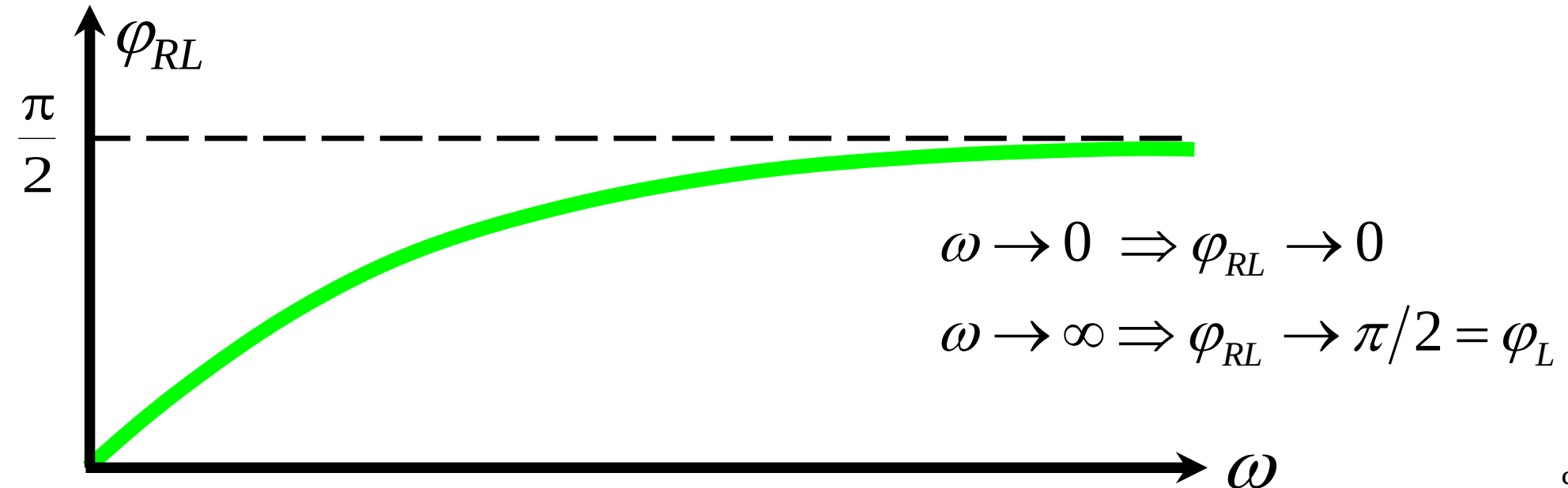
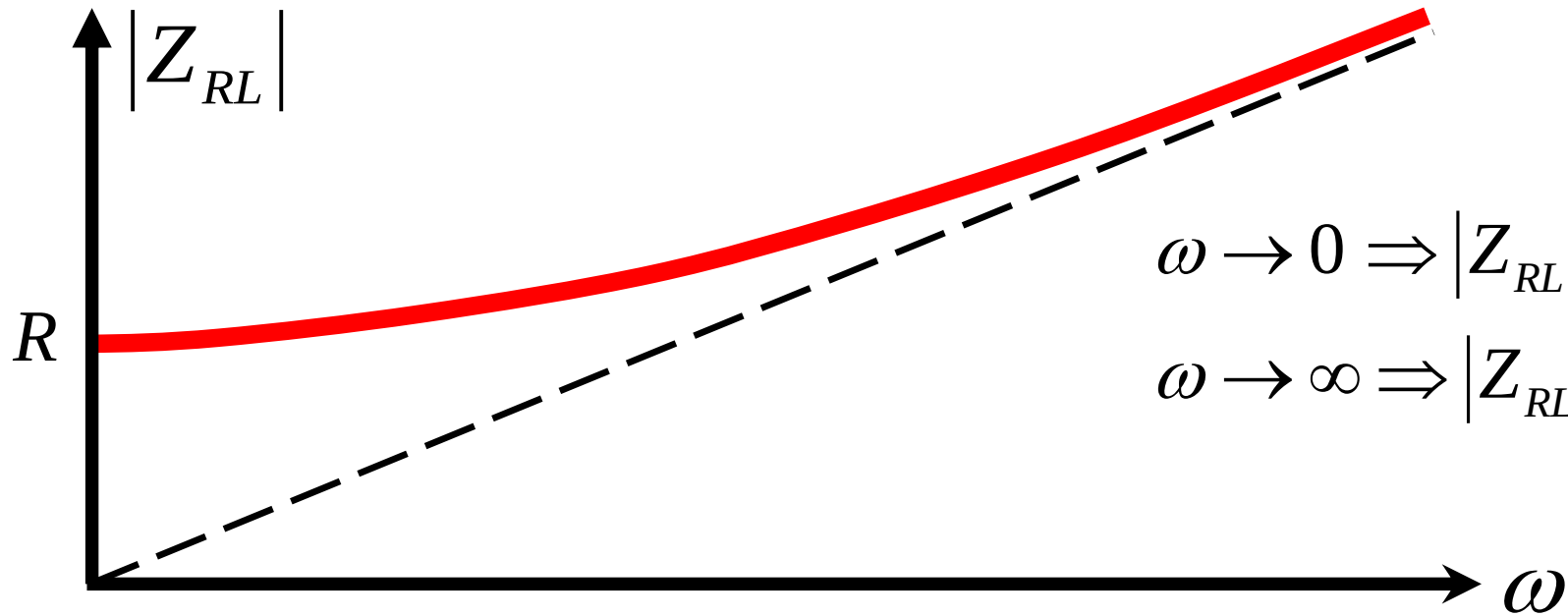
$$|Z_{RL}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\varphi_{RL} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(Z_{RL})}{\text{Re}(Z_{RL})}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist dann:

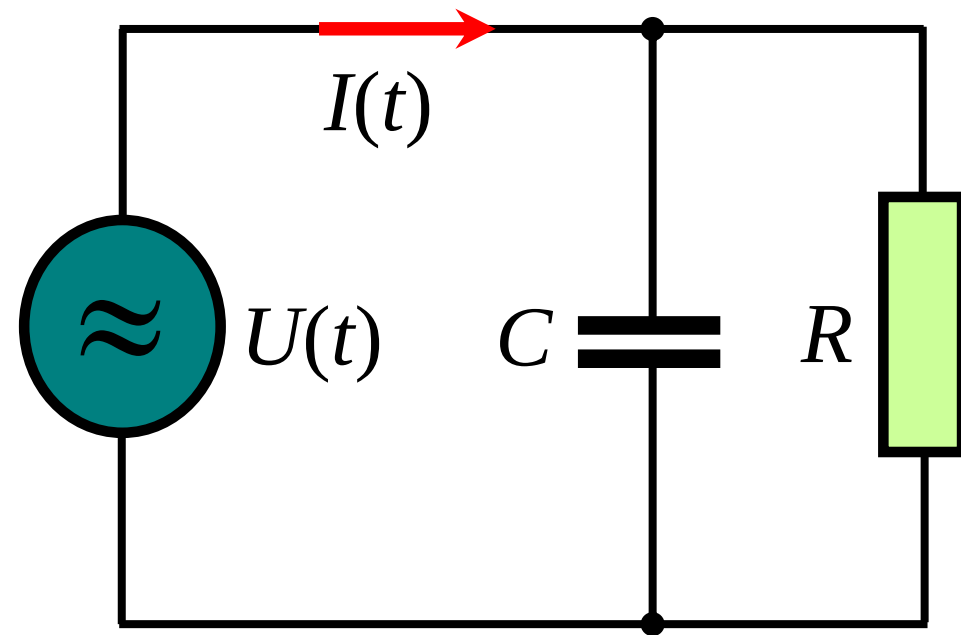
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow U(t) = |Z_{RL}| I_0 \cos(\omega t + \varphi_{RL})$$

Frequenzgang eines RL -Kreises



Beispiel 2: Parallelschaltung aus einem Ohm'schen Widerstand und einer Kapazität:



Die Gesamtimpedanz Z_{RC} ergibt sich durch Addition der Kehrwerte der Einzelimpedanzen wie bei der Parallelschaltung von Ohm'schen Widerständen. Es folgt:

$$\frac{1}{Z_{RC}} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/i\omega C} = \frac{1}{R} + i\omega C$$

$$Z_{RC} = \frac{1}{1/R + i\omega C} = \frac{R}{1 + i\omega RC}$$

$$= \frac{R(1 - i\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2}$$

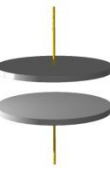
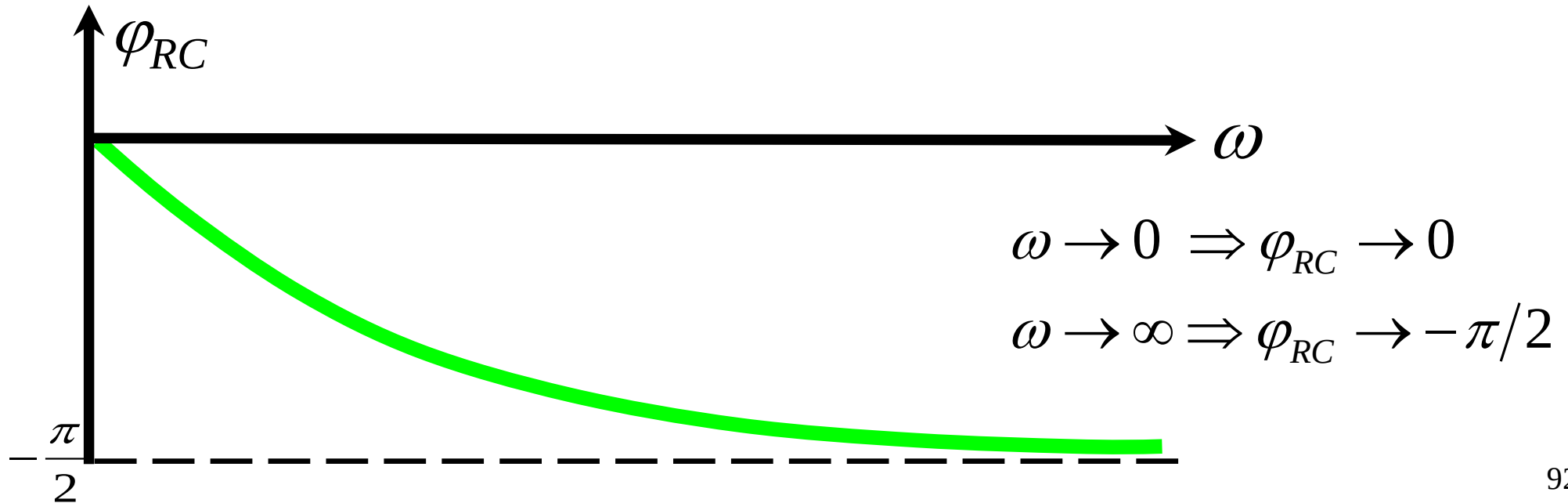
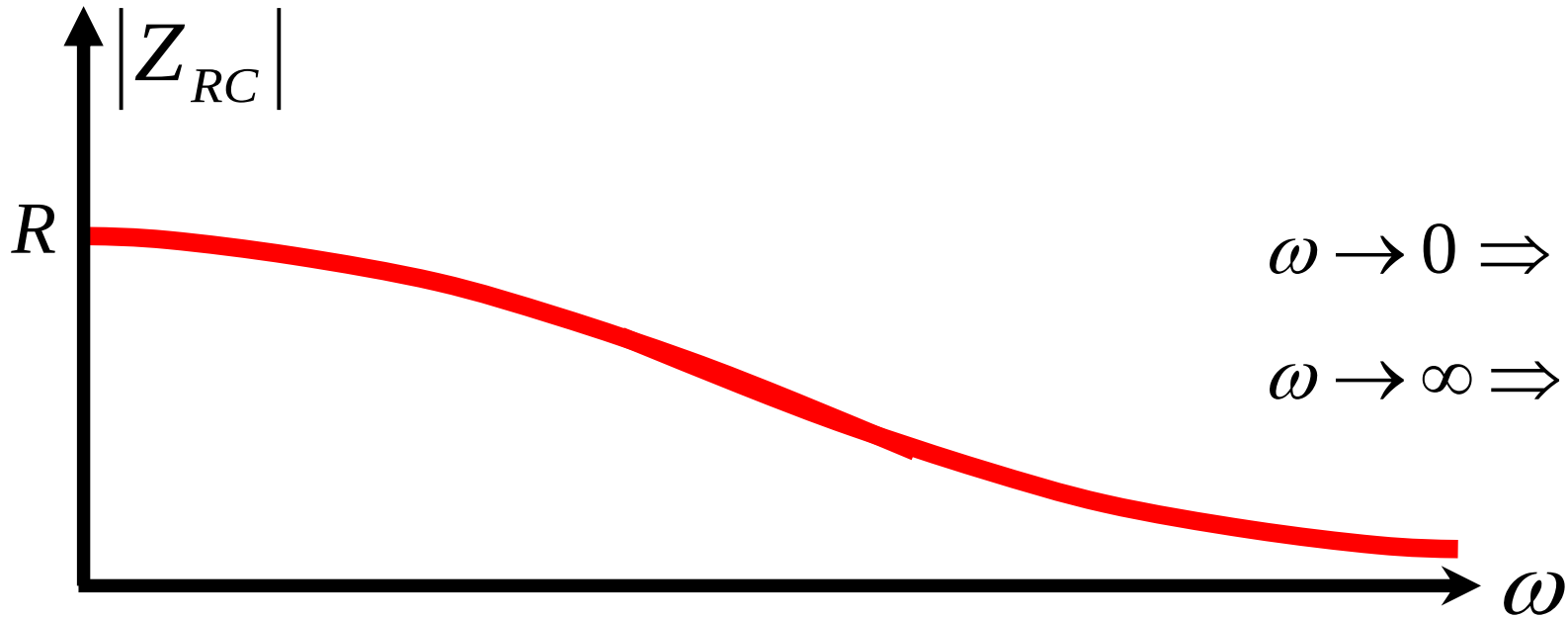
$$|Z_{RC}| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\tan(\varphi_{RC}) = \frac{-\omega R^2 C}{R} = -\omega RC$$

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist dann:

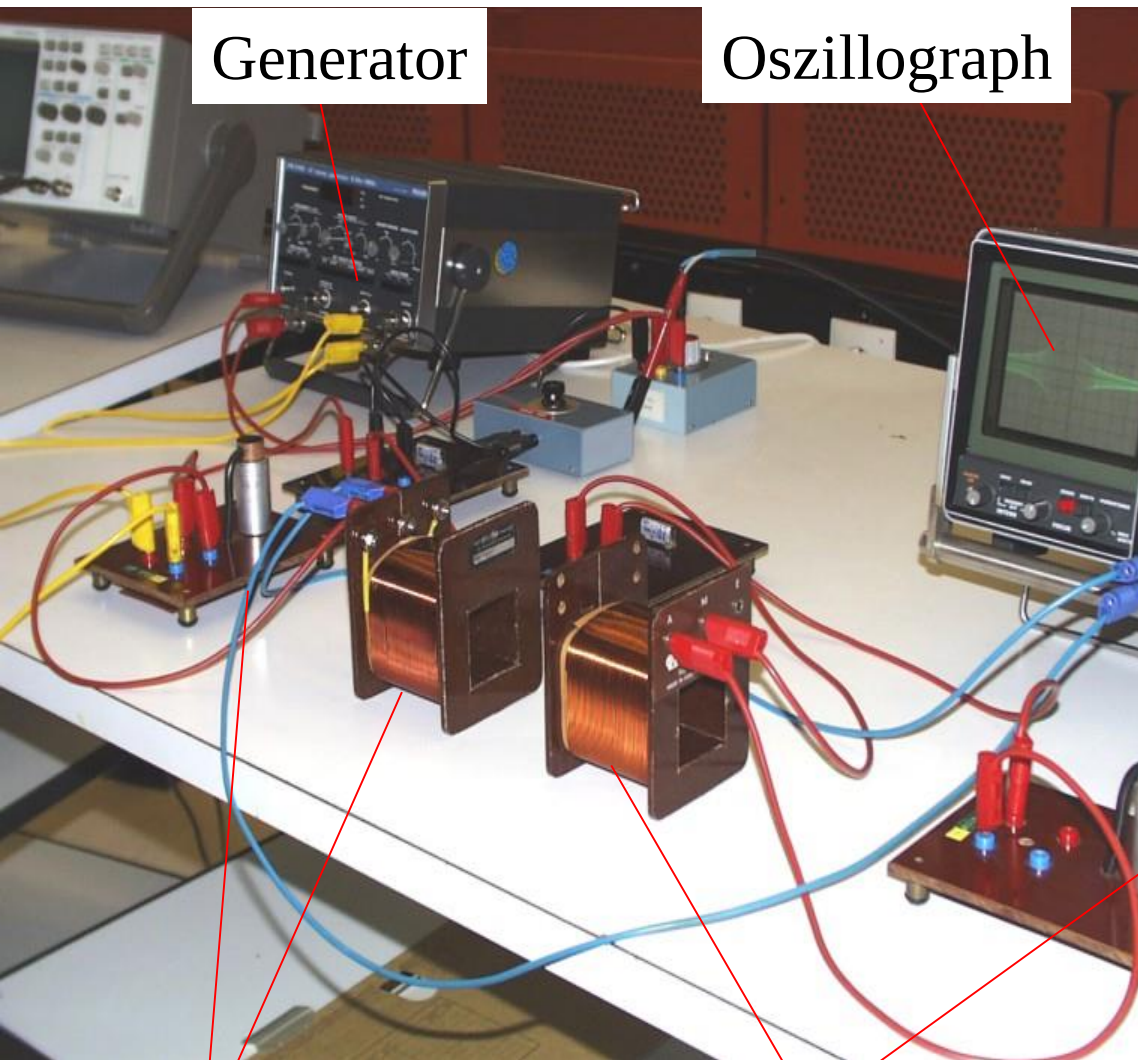
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow U(t) = |Z_{RC}| I_0 \cos(\omega t + \varphi_{RC})$$

Frequenzgang eines RC -Kreises



Versuch 8: Gekoppelte Schwingkreise

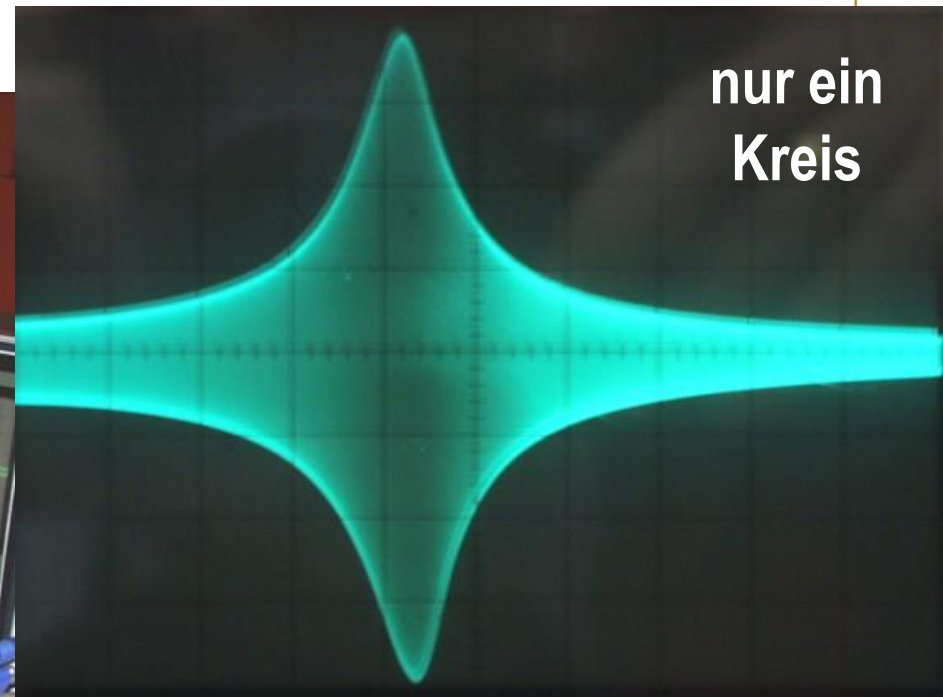


Generator

Oszillograph

1. Schwing-
kreis

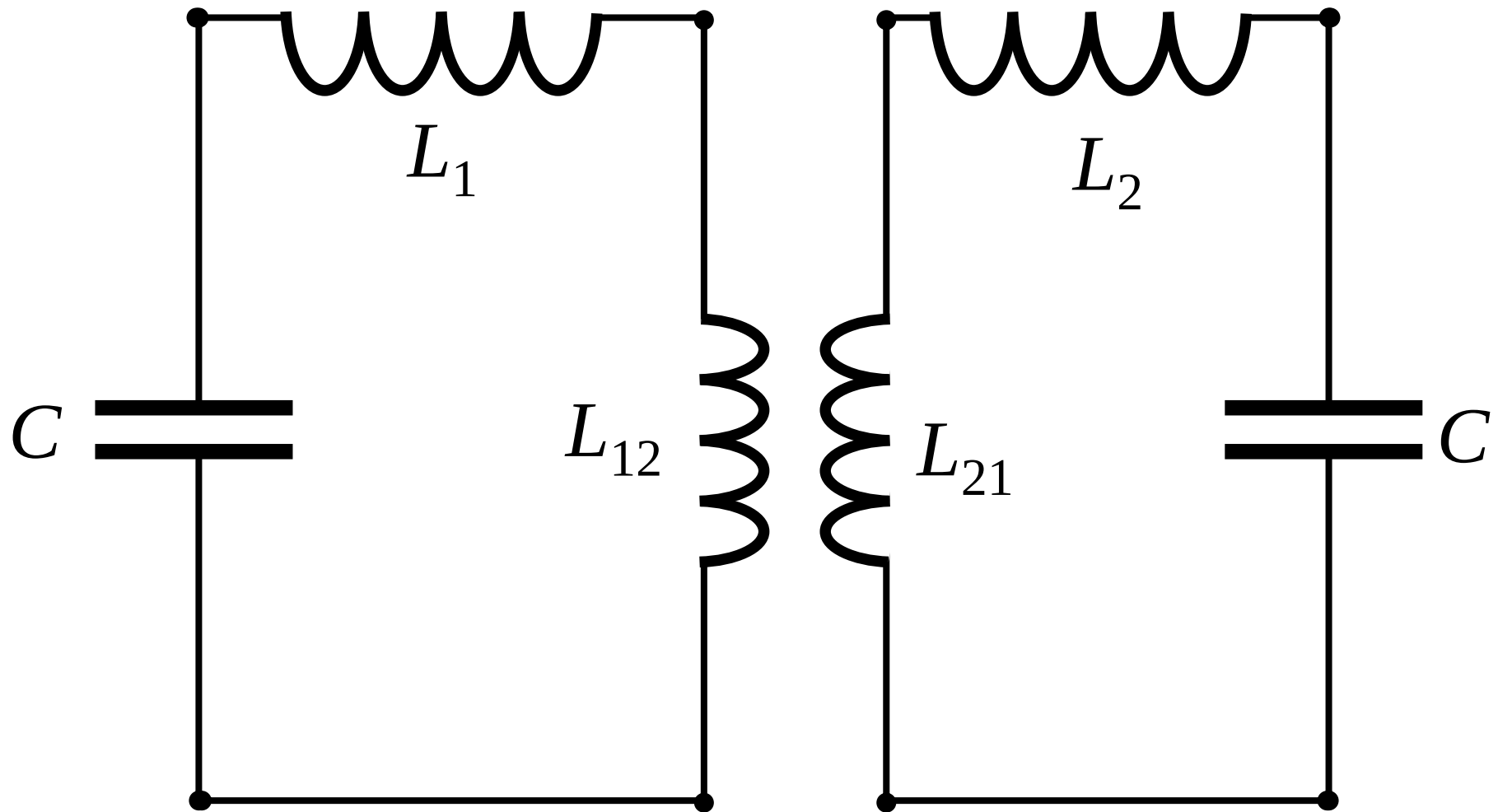
2. Schwing-
kreis



nur ein
Kreis



2 Kreise
gekoppelt

(vii) Induktiv gekoppelte Schwingkreise

Die beiden Schwingkreise sind über die Induktivitäten L_{12} und L_{21} miteinander gekoppelt. Die Magnetfelder der beiden Induktivitäten müssen sich dafür gegenseitig durchsetzen ($\Rightarrow$ Transformator, Abschnitt 4.6.10)



Elektrische Leistungsaufnahme bei Vierpolen

An einen Vierpol wird eine Spannung $U(t)$ angelegt. Für den fließenden Strom $I(t)$ gilt dann:

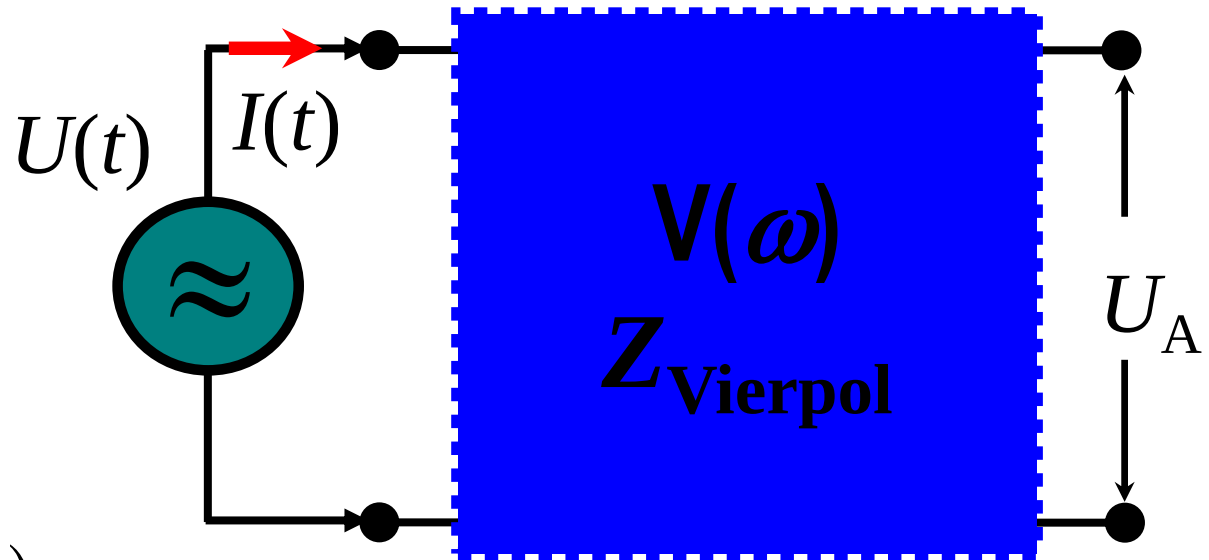
$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I(t) = \frac{U_0}{|Z_{\text{Vierpol}}|} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$= I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Für die aufgenommene Leistung $P(t)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t)I(t) \\ &= U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$



Entscheidend ist wieder der zeitliche Mittelwert der Leistung:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

$$= \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) dt$$



Wegen $\cos(x - \varphi) = \cos(x) \cos(\varphi) + \sin(x) \sin(\varphi)$ folgt:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{U_0 I_0}{T} \left(\underbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t) \cos(\varphi) dt}_{(T/2) \cos(\varphi)} + \underbrace{\int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\varphi) dt}_{=0} \right)$$

$$\Rightarrow \langle P(t) \rangle_t = \frac{U_0 I_0}{2} \cos(\varphi)$$

Mit $\frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}}$ und $\frac{I_0}{\sqrt{2}} = I_{\text{eff}}$ ergibt sich für die gemittelte Leistung:

$$\langle P(t) \rangle_t = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

Die Wirkleistung hängt also vom Winkel φ der Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom ab.

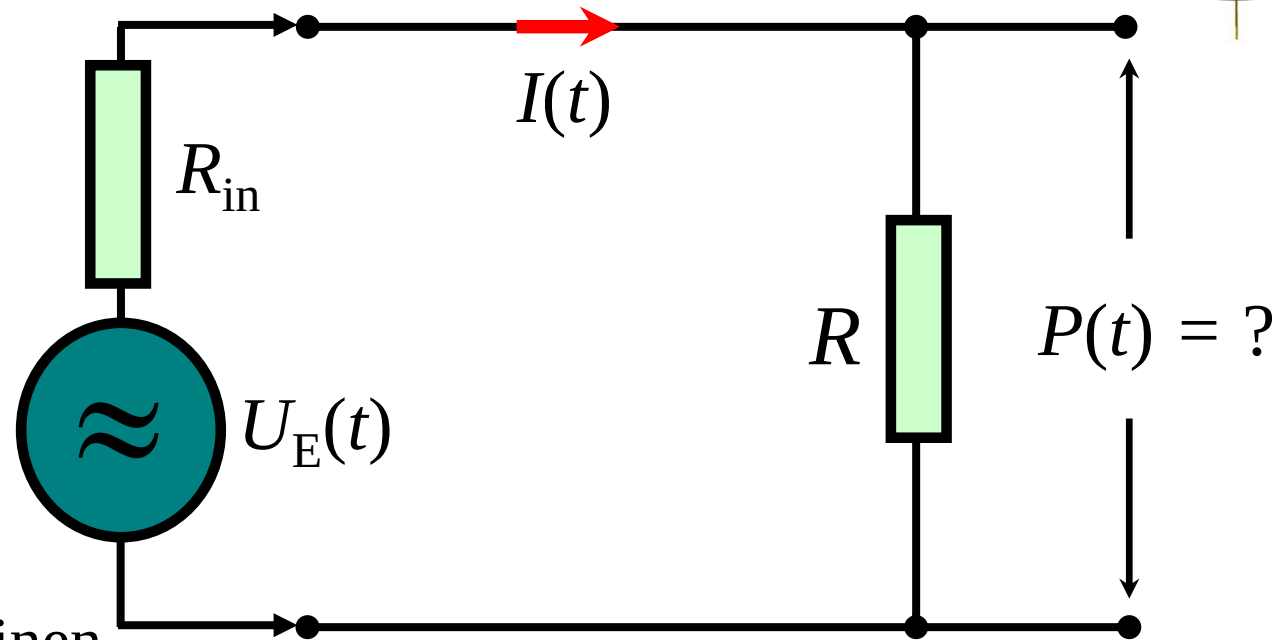
Um an einen realen Verbraucher R die maximale Leistung abzugeben (z.B. bei einer elektrischen Heizung), muß eine sog. Leistungsanpassung stattfinden.

Jede Spannungsquelle hat einen Innenwiderstand R_{in} . Es fließt ein Strom:

$$I = \frac{U_E}{R_{\text{in}} + R}$$

Für die aufgenommene Leistung gilt dann:

$$P = RI^2 = U_E^2 \frac{R}{(R_{\text{in}} + R)^2}$$



Die maximale Leistung ergibt sich wenn:

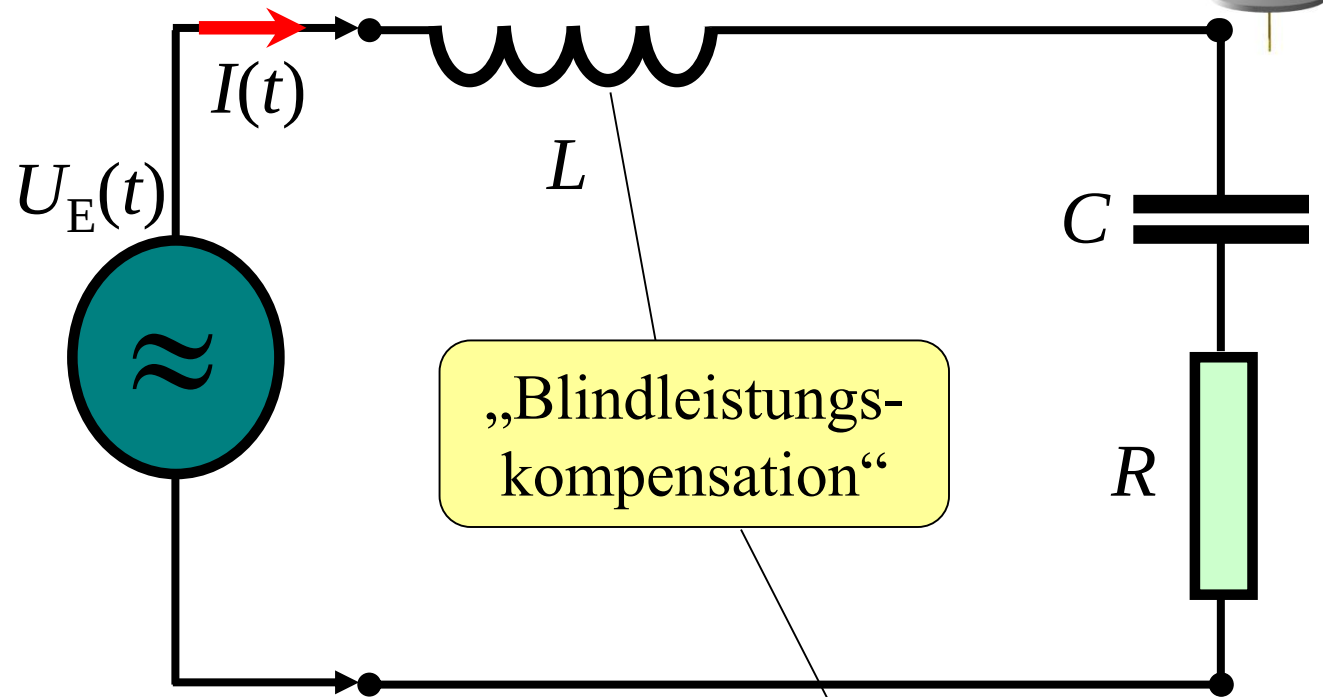
$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R = R_{\text{in}}$$

Die Leistungsaufnahme ist optimal, wenn der Widerstand des Verbrauchers dem Innenwiderstand der Spannungsquelle entspricht.

Im Fall von komplexen Widerständen muß die Wirkleistung maximiert werden. Wegen

$$\langle P(t) \rangle_t = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

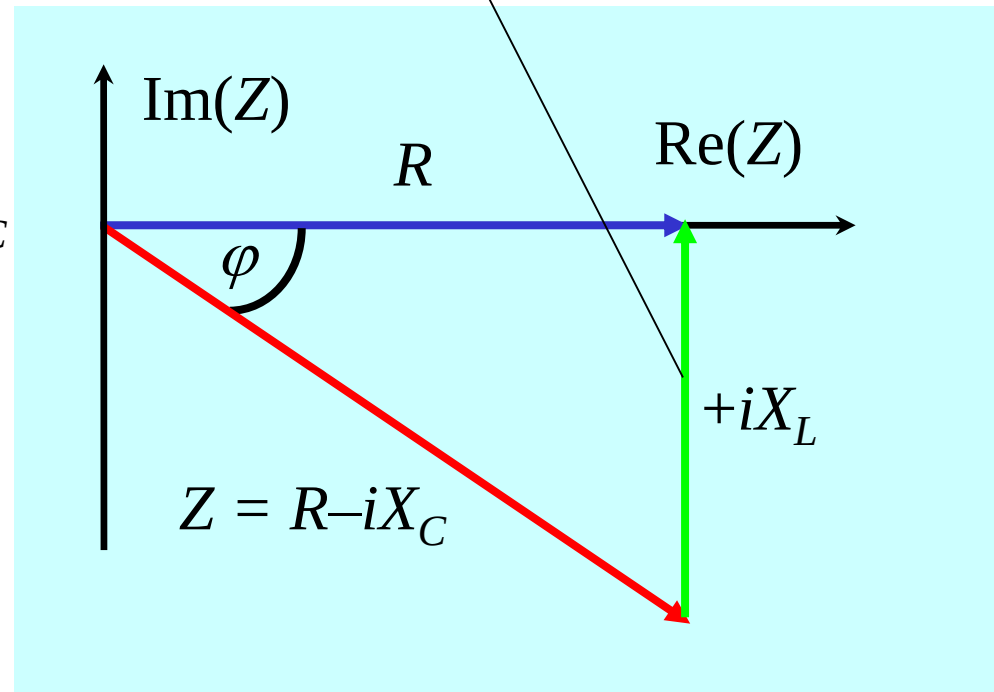
bedeutet dies, dass für den gesamten Vierpol $\varphi = 0$ anzustreben ist.



Wir betrachten das einfache Beispiel eines RC -Kreises. Die Impedanz ist:

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} = R - i(\omega C)^{-1} = R - iX_C$$

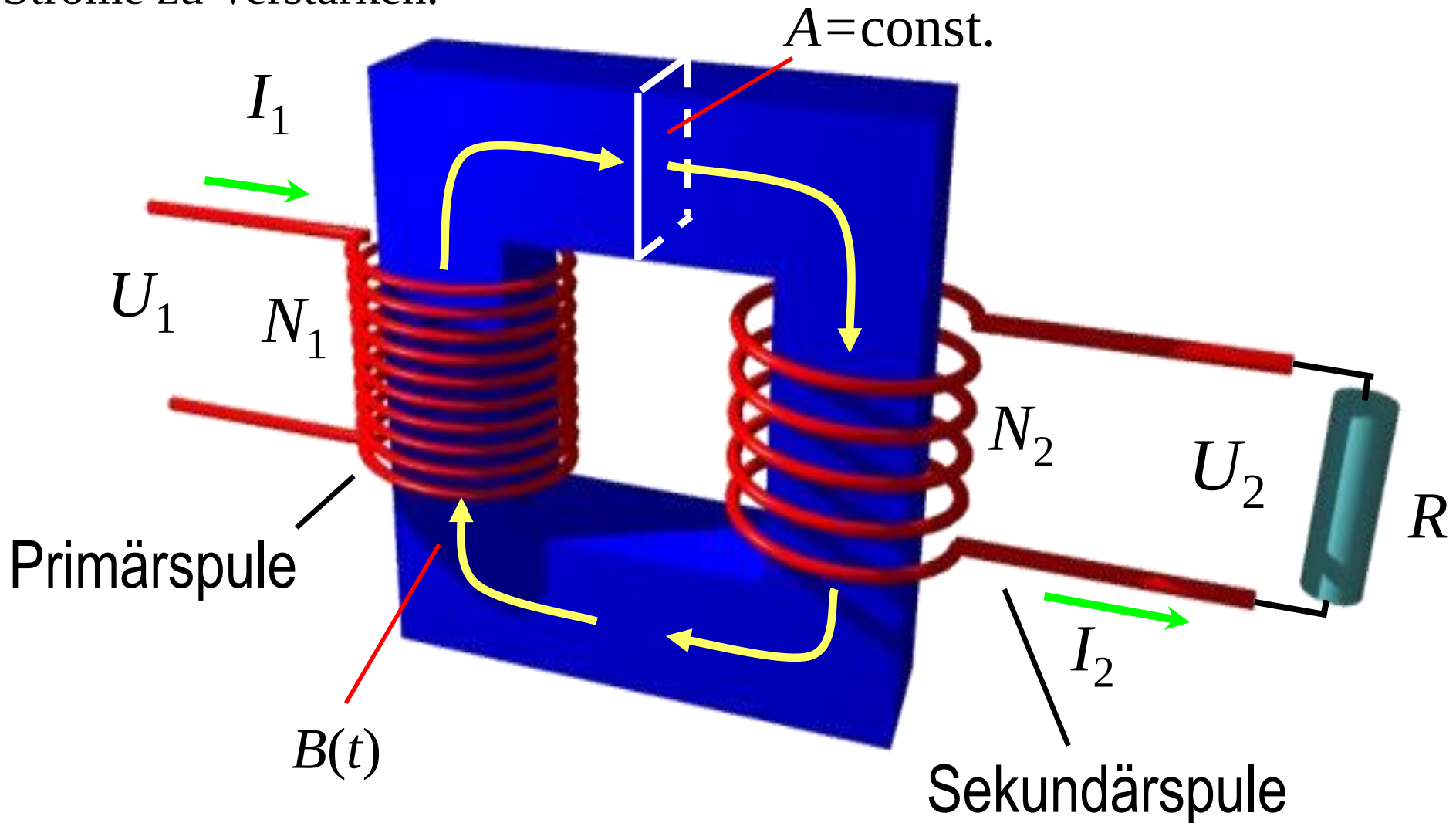
Der Imaginärteil müßte verschwinden. Dies kann durch Hinzuschalten einer Induktivität mit der Impedanz $i\omega L = iX_L$ erreicht werden, wobei $X_L = X_C$ sein sollte: $Z = R - iX_C + iX_L = R$





Der Transformator

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen mit den Windungszahlen N_1 und N_2 , die auf ein Eisenjoch gewickelt sind. Er dient dazu, Spannungen und Ströme zu Verstärken.



Aufbau eines Transformators

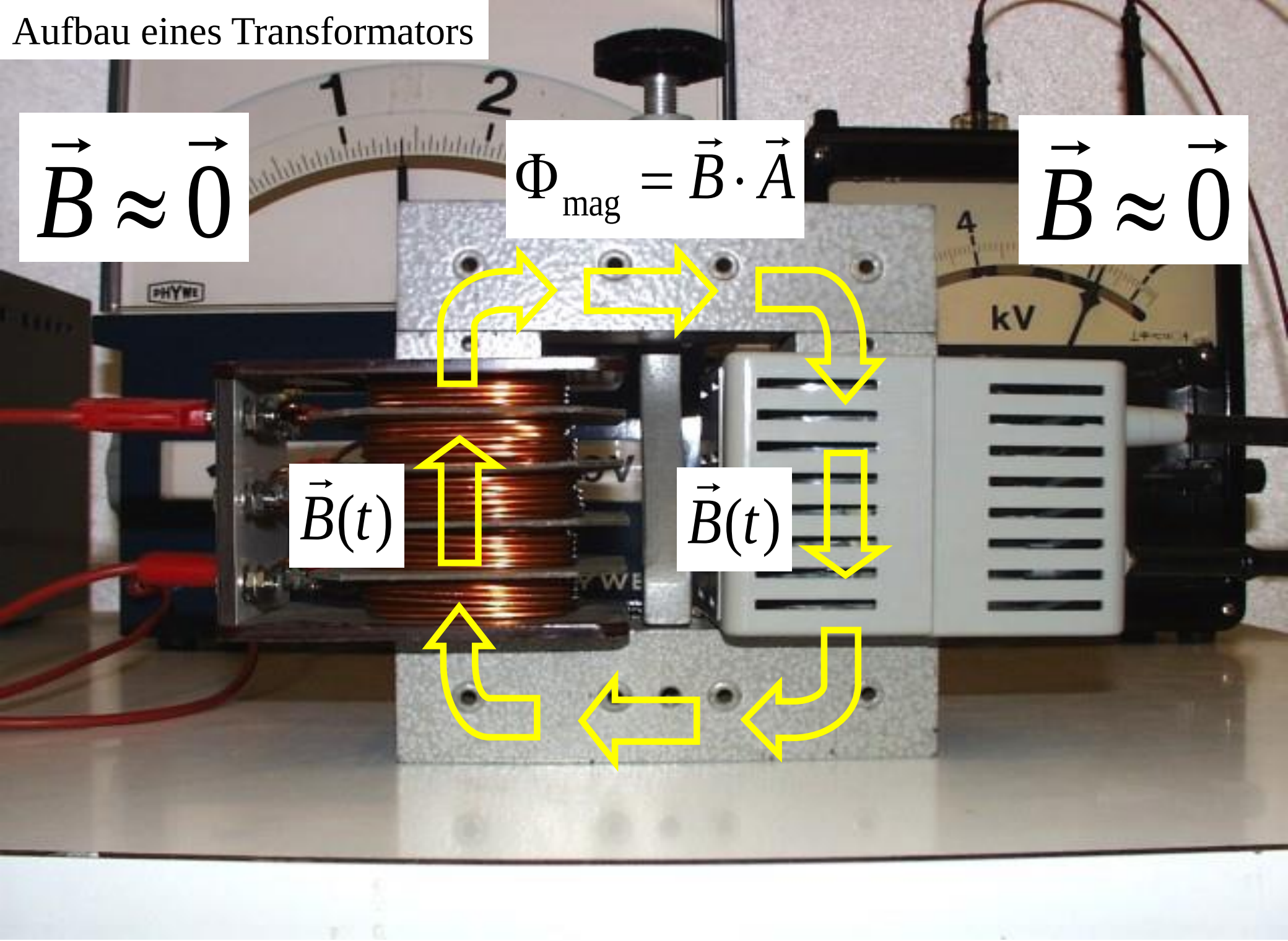
$$\vec{B} \approx \vec{0}$$

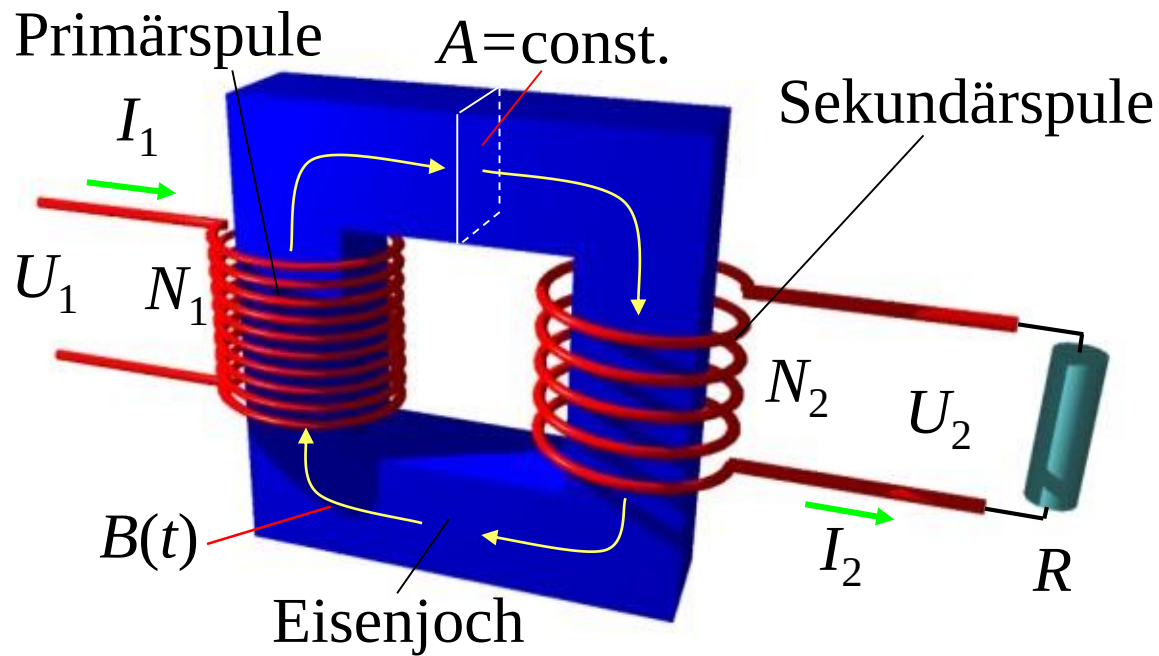
$$\Phi_{\text{mag}} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{B} \approx \vec{0}$$

$$\vec{B}(t)$$

$$\vec{B}(t)$$





$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_r \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

2. Das Eisenjoch

Magnetische Feldlinien bevorzugen Bereiche, in denen μ_r sehr groß ist, d.h. Bereiche in ferromagnetischen Materialien (Fe, Co, Ni). Der Grund dafür ist die im Feld gespeicherte Energie (Abschnitt 4.7.6).

3. Die Sekundärspule

Das zeitlich veränderliche Magnetfeld im Eisenjoch induziert in der Sekundärspule die Spannung $U_2(t)$ nach der 3. Maxwell'schen Gleichung:

Die Funktionsweise des Transformators kann qualitativ durch die folgenden drei Prozesse beschrieben werden:

1. Die Primärspule

Wird eine zeitlich variable Spannung $U_1(t)$ an die Primärspule gelegt, fließt ein Strom $I_1(t)$. Dieser erzeugt das Magnetfeld $B(t)$ nach dem Ampère'schen-Gesetz (4. Maxwell'sche Gleichung):

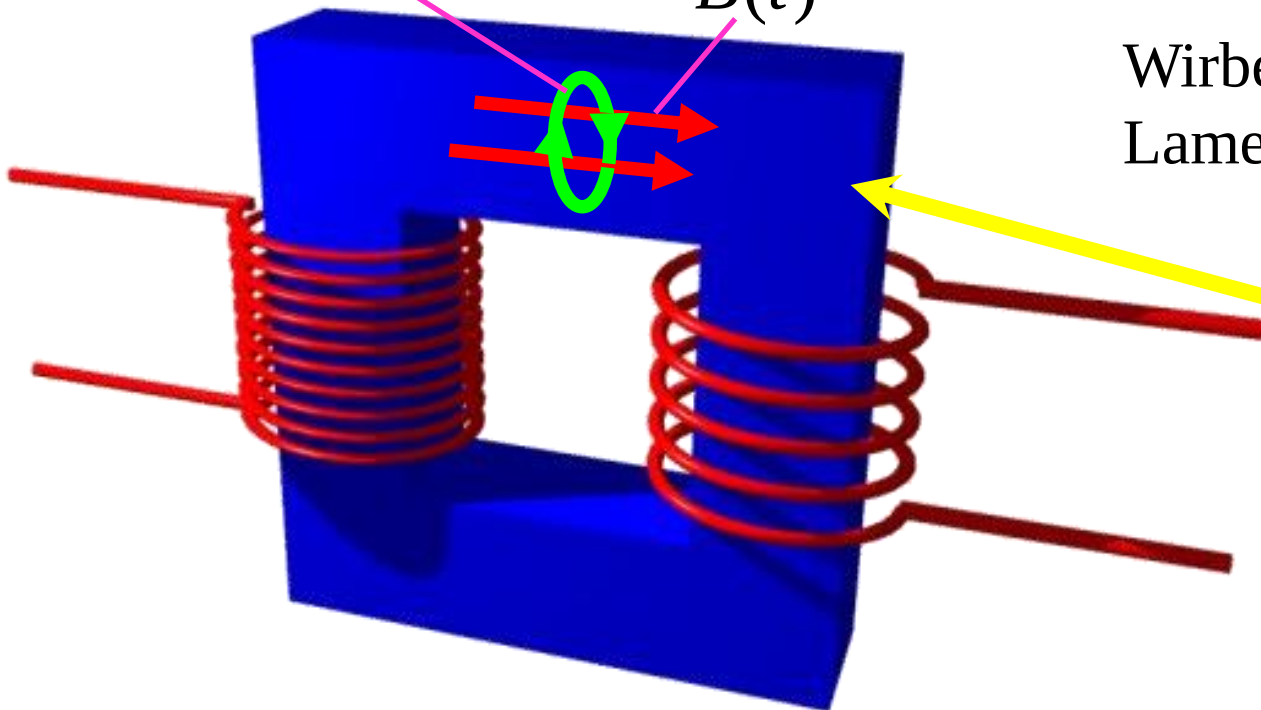


$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow U_2(t)$$

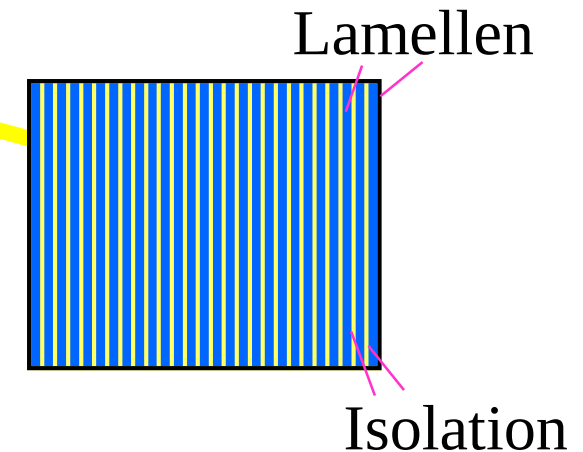
Bei der folgenden quantitativen Berechnung wird der „ideale Transformator“ angenommen, d.h.:

- (i) Es gibt keine Streuverluste des magnetischen Flusses. Das Magnetfeld $B(t)$ ist im Eisenjoch überall gleich groß und im Außenraum vernachlässigbar.
- (ii) Es gibt weder Ohm'sche Verluste noch Streukapazitäten in den Leitungen.
- (iii) Es gibt keine Wirbelströme im Eisenjoch.

Wirbelstrom $I_{\text{Wirb}}(t)$ $\dot{B}(t)$



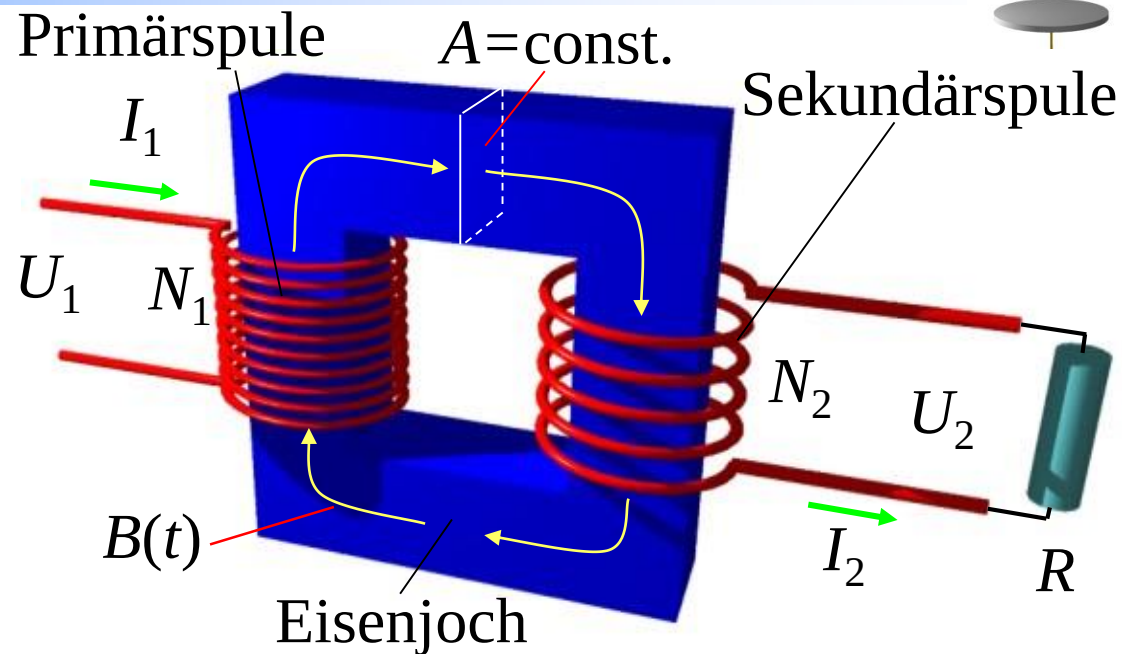
Wirbelstromverluste können durch Lamellen minimiert werden.





Damit ergibt sich für das Verhältnis der Sekundärspannung zu der Primärspannung:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-R \frac{i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} I_1}{\frac{i\omega L_{11} R}{R + i\omega L_{22}} I_1} = -\frac{L_{21}}{L_{11}}$$



Die Induktivitäten waren definiert durch:

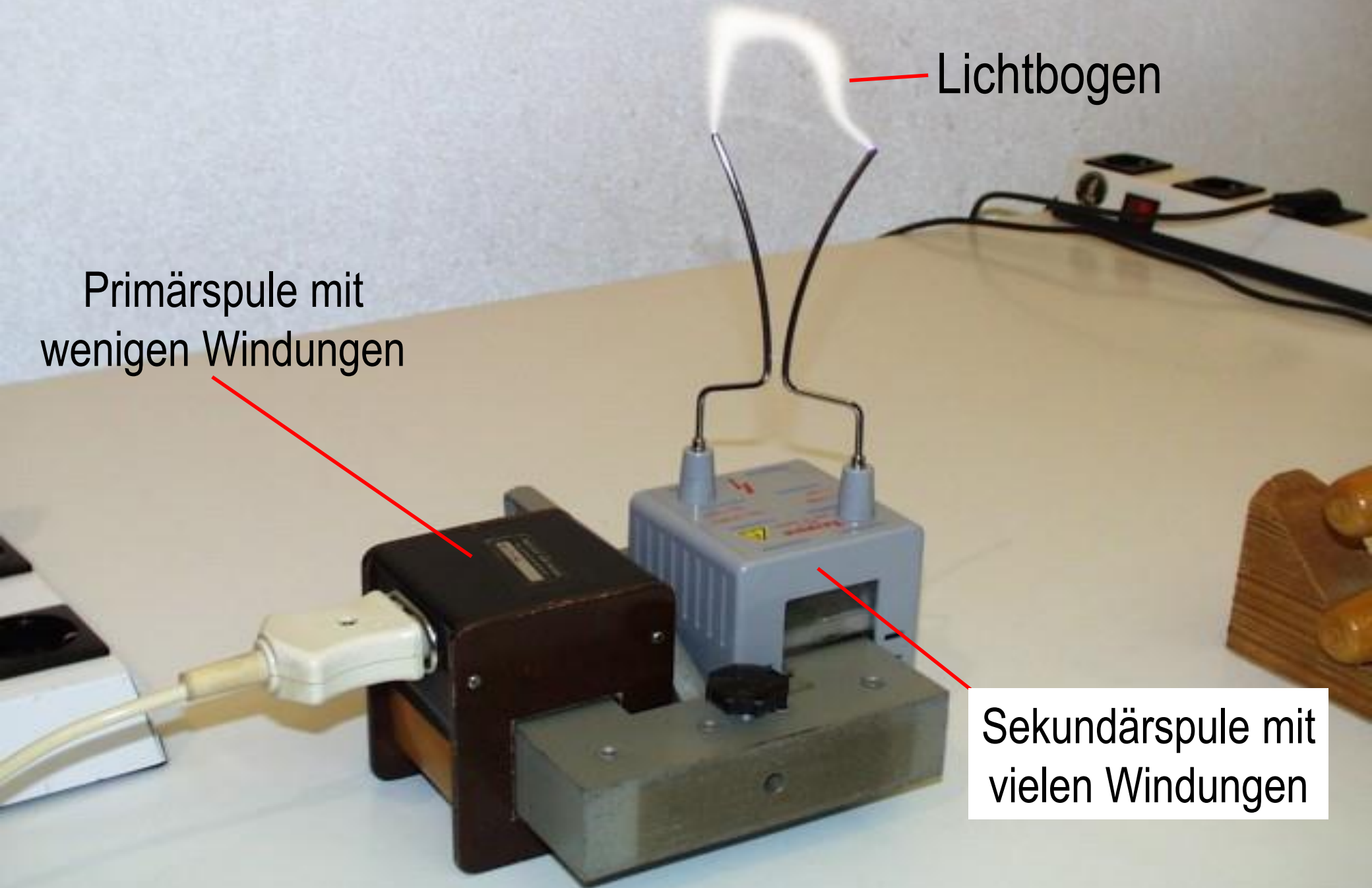
$$L_{21} = \mu_r \mu_0 \frac{N_2 N_1 A}{l} \quad L_{11} = \mu_r \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l}$$

Damit transformieren sich die Spannungen wie folgt:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

⇒ Die Spannungen transformieren sich also im Verhältnis der Windungszahlen. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Primär- und Sekundärspannung um $\pi = 180^\circ$ phasenverschoben sind.

Versuch 9: Erzeugung von Hochspannungen durch Transformation



Das Verhältnis der Ströme auf der Primär- und Sekundärseite lässt sich sofort mit der Gleichung

$$I_2 = - \frac{i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} I_1$$

angeben.

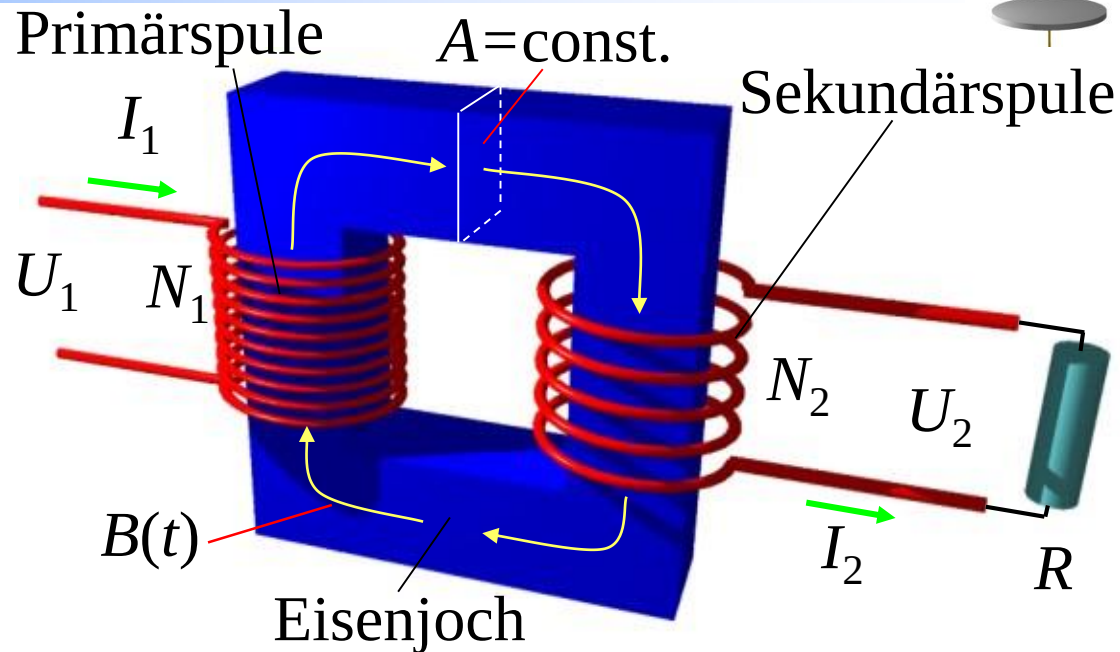
Es ergibt sich:

$$\frac{I_2}{I_1} = - \frac{i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} = - \frac{L_{21}}{L_{22}} \frac{1}{1 + R/(i\omega L_{22})}$$

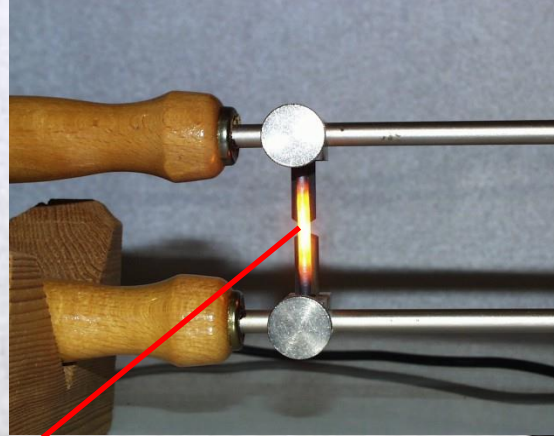
Für große Frequenzen $\omega L_{22} \gg R$ gilt nun also (kein „Leerlaufstrom“):

$$\frac{I_2}{I_1} = - \frac{L_{21}}{L_{22}} = - \frac{N_1}{N_2}$$

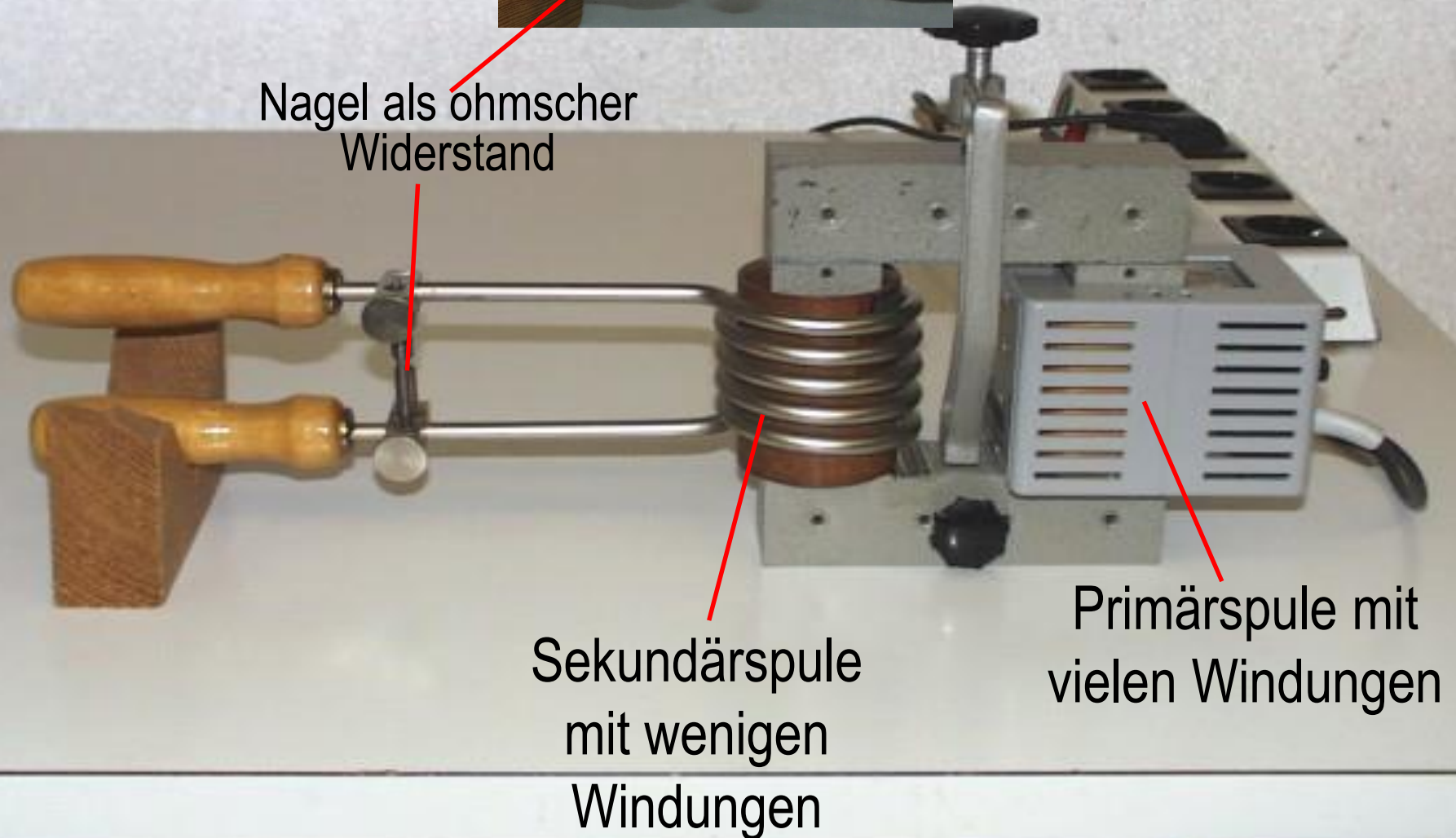
⇒ Die Ströme transformieren sich daher im umgekehrten Verhältnis der Windungszahlen. Das negative Vorzeichen bedeutet, wieder dass der Primär- und Sekundärstrom um $\pi = 180^\circ$ phasenverschoben sind.



Versuch 10: Erzeugung hoher Ströme durch Transformation



Nagel als ohmscher Widerstand





Das Verhältnis der Widerstände auf der Primär- und Sekundärseite ist:

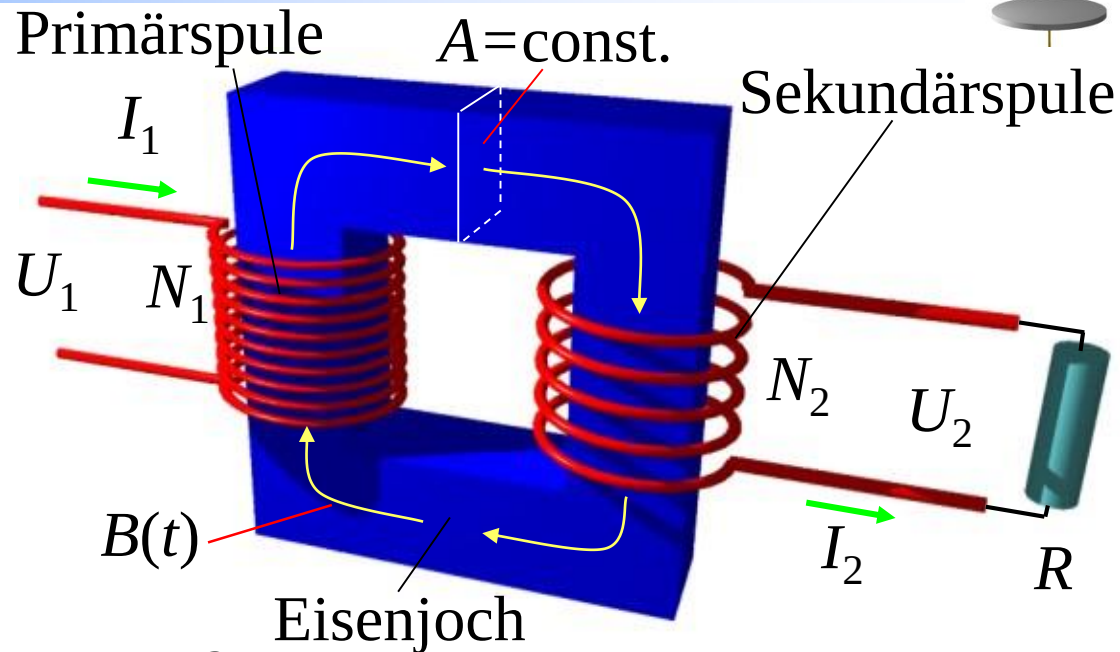
$$\frac{R}{Z_{\text{Primär}}} = \frac{R}{\frac{i\omega L_{11}R}{R + i\omega L_{22}}}$$

Also ergibt sich:

$$\frac{R}{Z_{\text{Primär}}} = \frac{R + i\omega L_{22}}{i\omega L_{11}} = \frac{L_{22}}{L_{11}} + \frac{R}{i\omega L_{11}} = \frac{N_2^2}{N_1^2} + \frac{R}{i\omega L_{11}}$$

Für große Frequenzen $\omega L_{11} \gg R$ gilt dann:

$$\frac{R}{Z_{\text{Primär}}} = \frac{N_2^2}{N_1^2}$$



Beispiel: Ein Lautsprecher mit einem Widerstand von $R_2 = 4\Omega$ soll mit einem hochohmigen Verstärker mit $R_1 = 2500\Omega$ betrieben werden. Das bedeutet für das Verhältnis der Windungszahlen:

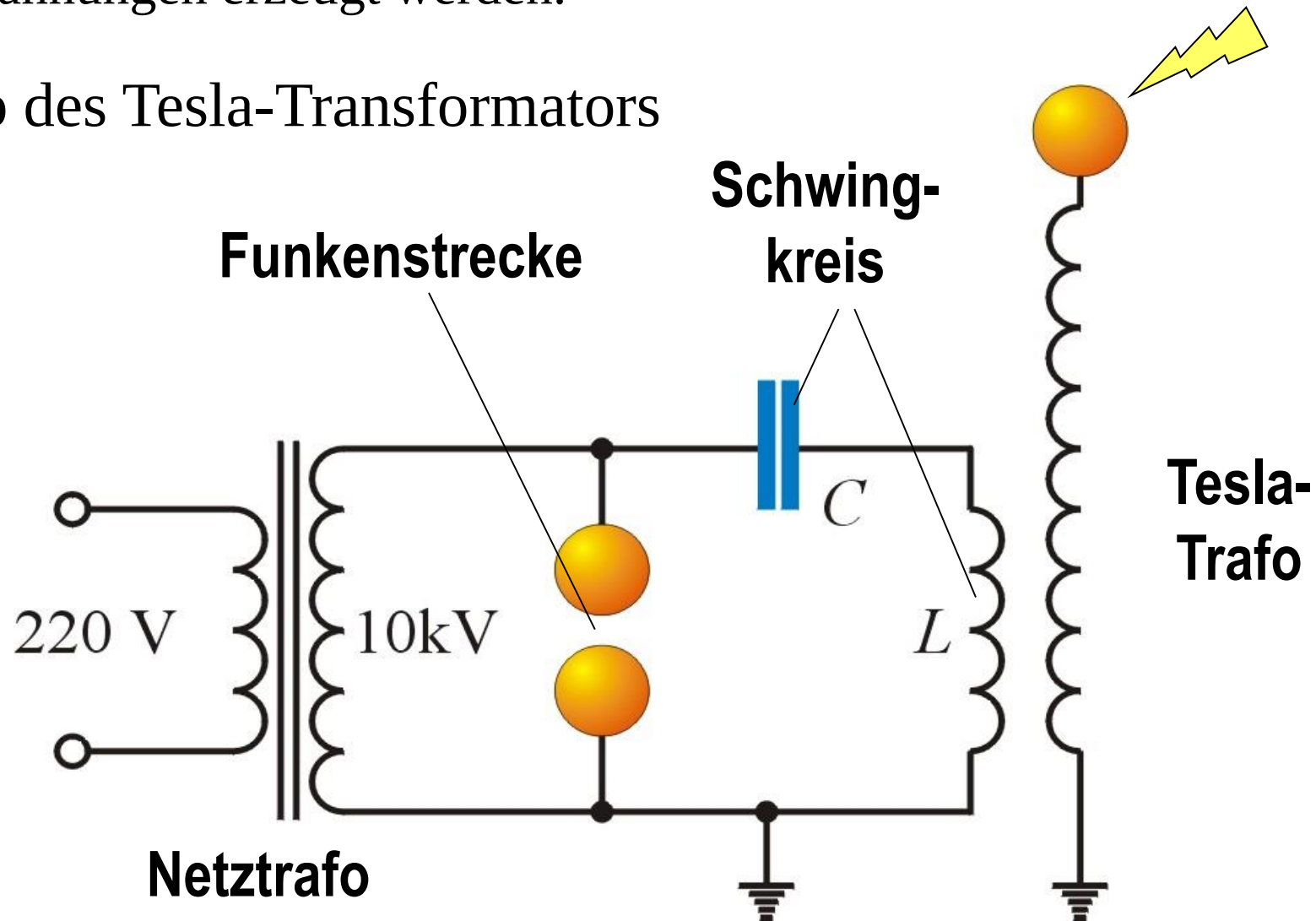
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{4\Omega}{2500\Omega} = \frac{N_2^2}{N_1^2} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

Nicola Tesla
(1856-1943)

Versuch 11: Der Tesla-Transformator

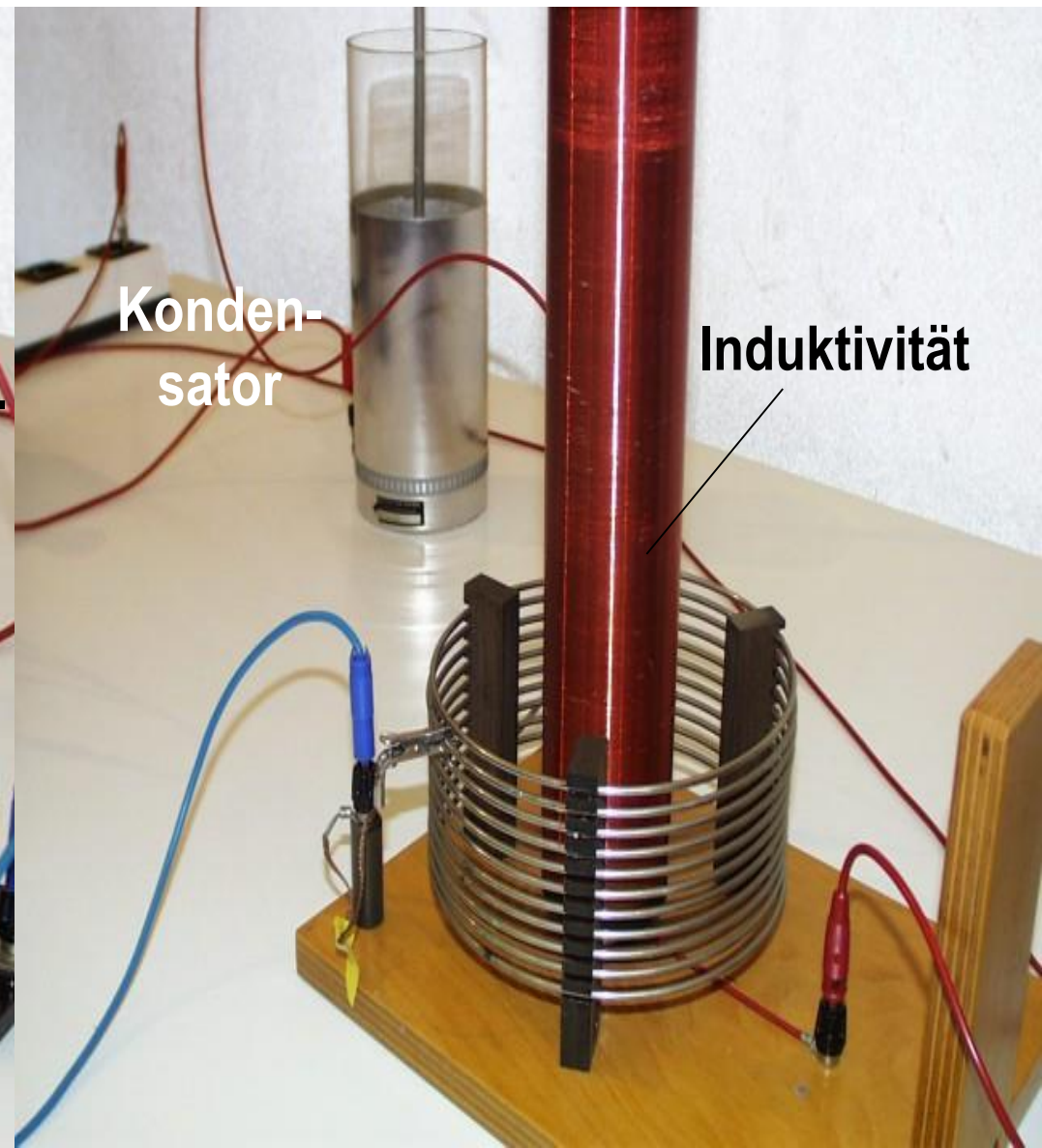
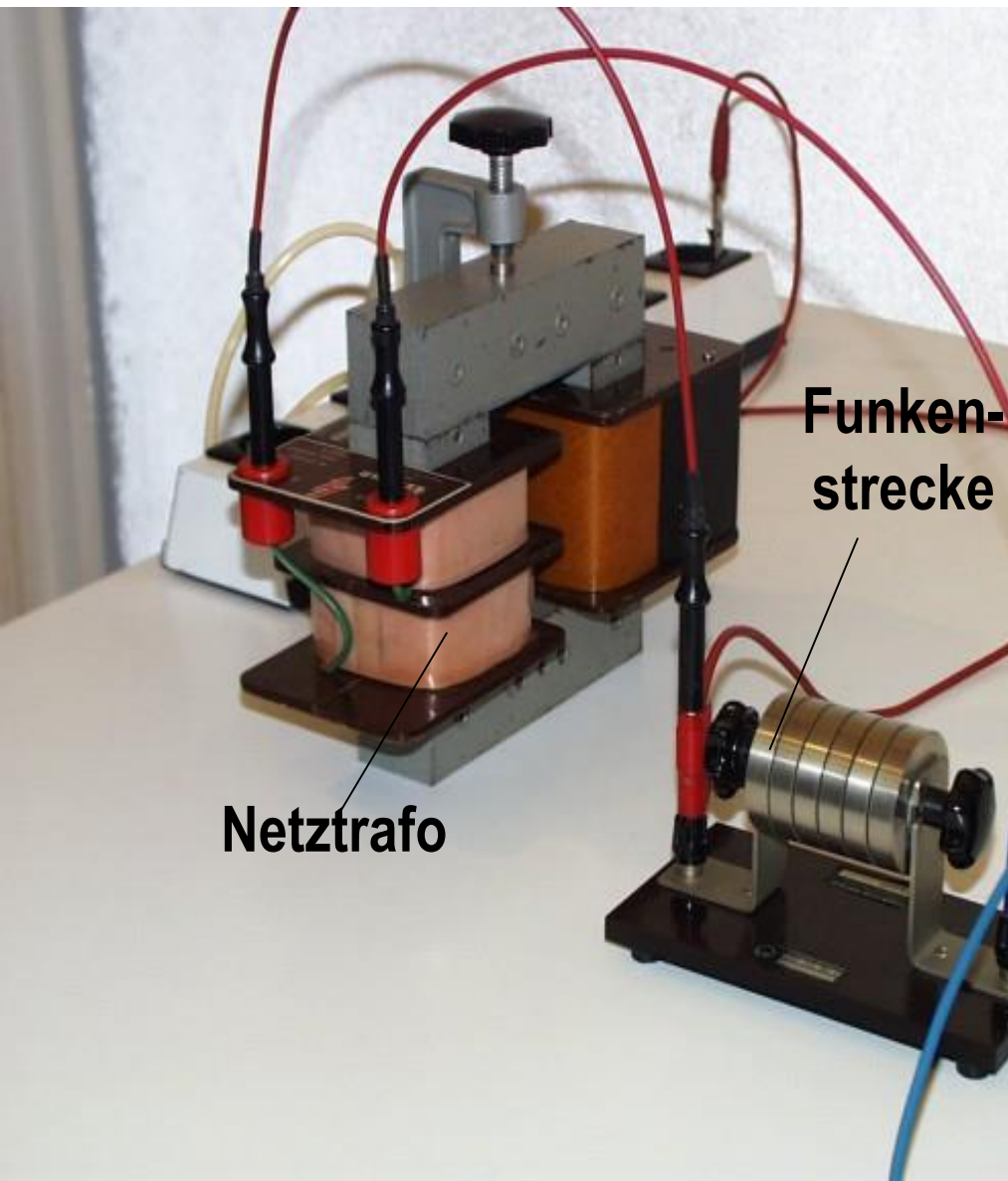
Mit dem Tesla-Transformator können extrem hohe Spannungen erzeugt werden.

Prinzip des Tesla-Transformators



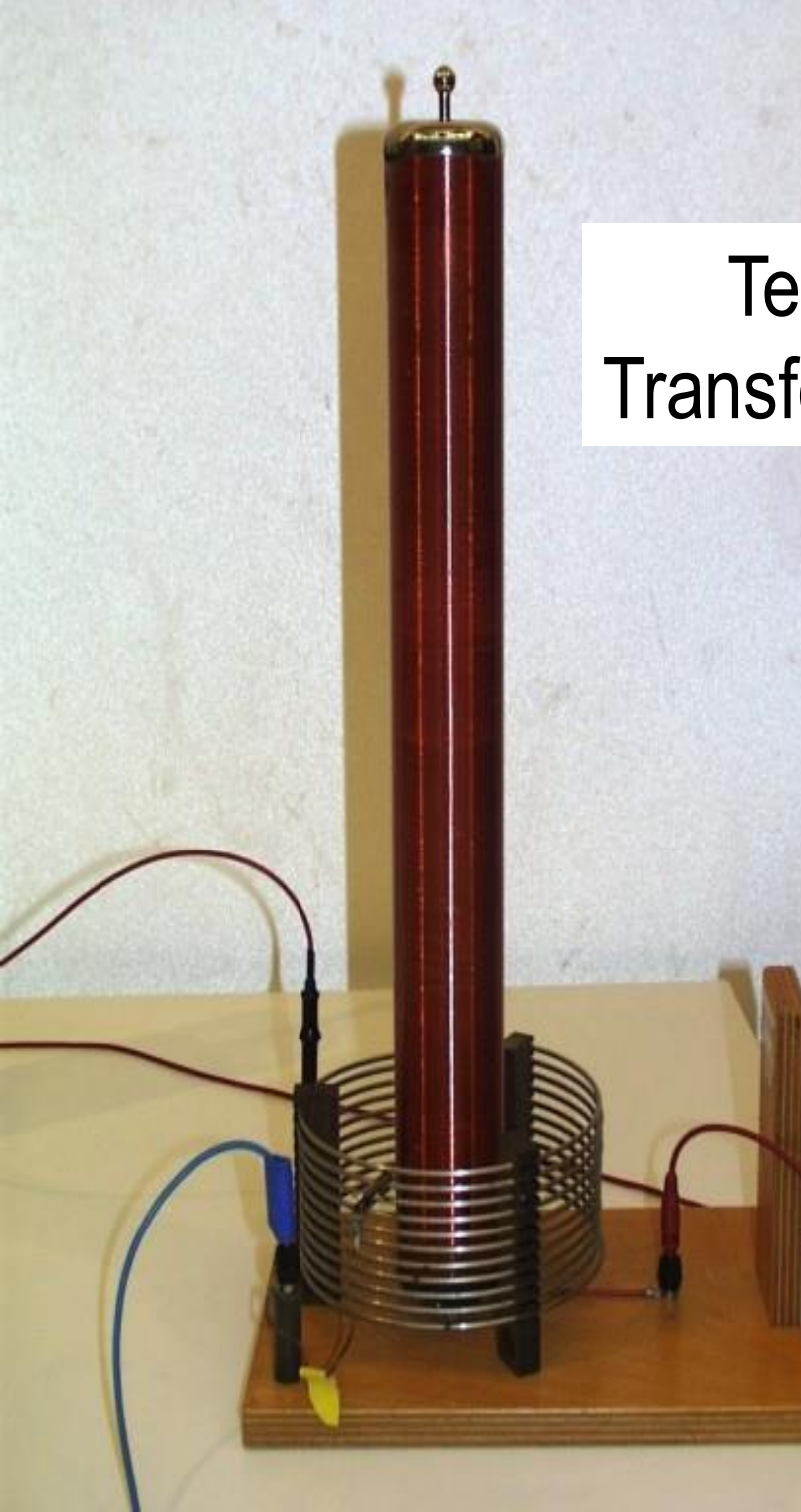


Einzelkomponenten des Tesla-Transformators



Koronabildung

Tesla-
Transformator



Gasentladungs-
röhre



