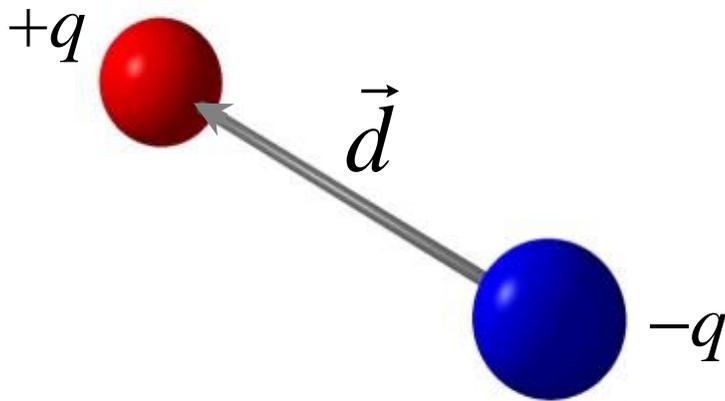




Der elektrische Dipol

Sind zwei unterschiedliche Ladungen in einem Abstand d angeordnet, dann liegt ein „elektrischer Dipol“ vor.



Man definiert das Dipolmoment:

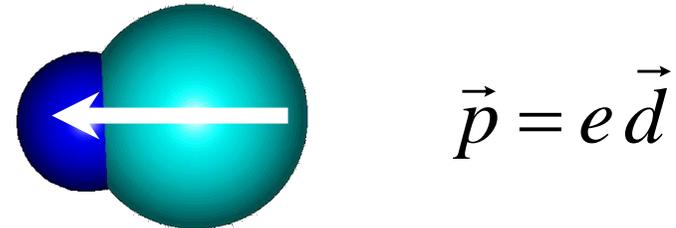
$$\vec{p} = q \vec{d}$$

Das Dipolmoment ist ein Vektor, der entlang der Verbindungslinie der beiden Ladungen zeigt.

Beispiele :

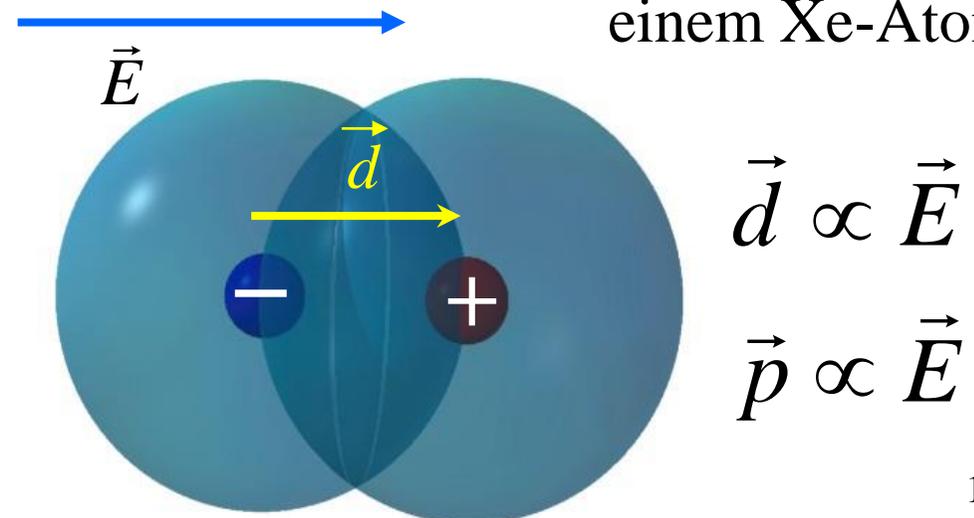
(i) Das HCl Molekül:

H⁺ und Cl⁻ Ion im Abstand d



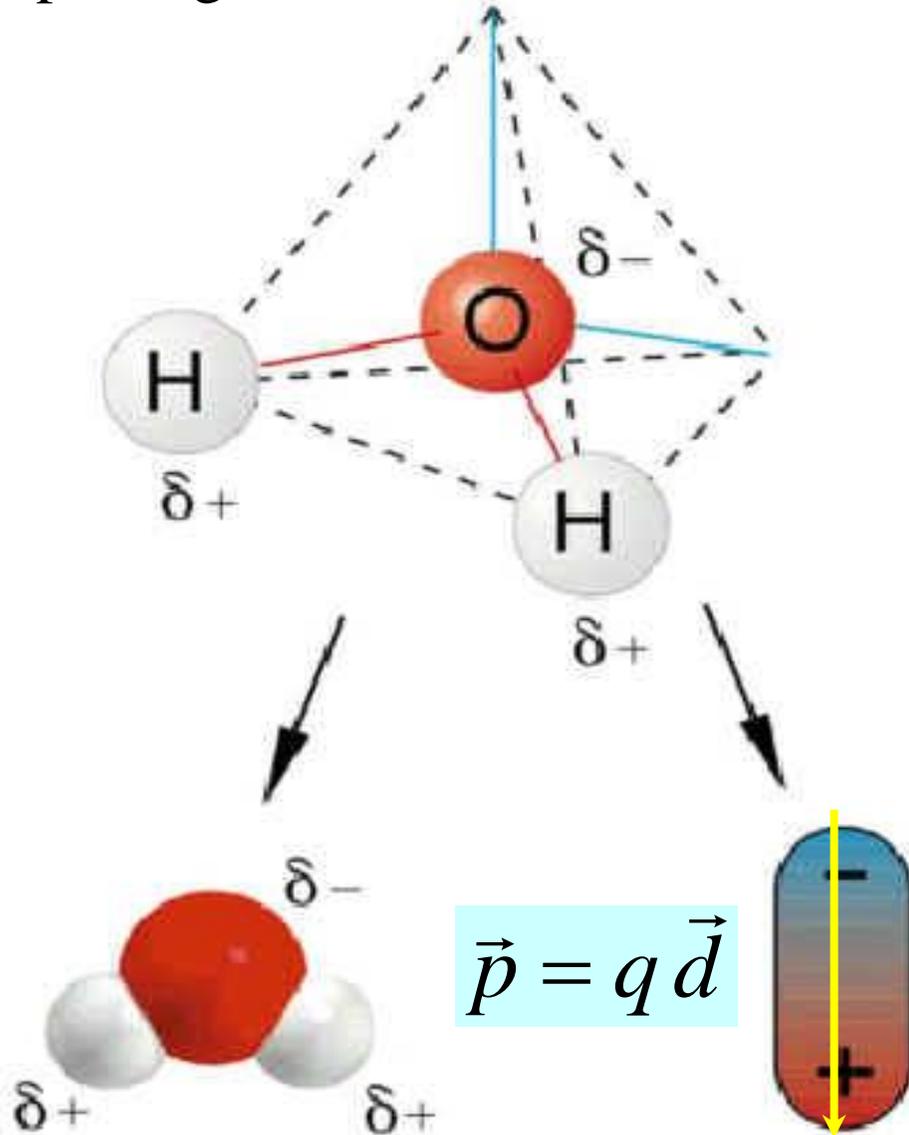
(ii) Induziertes Dipolmoment:

Ein äußeres Feld verschiebt den pos. und neg. Ladungsschwerpunkt, z.B. in einem Xe-Atom.



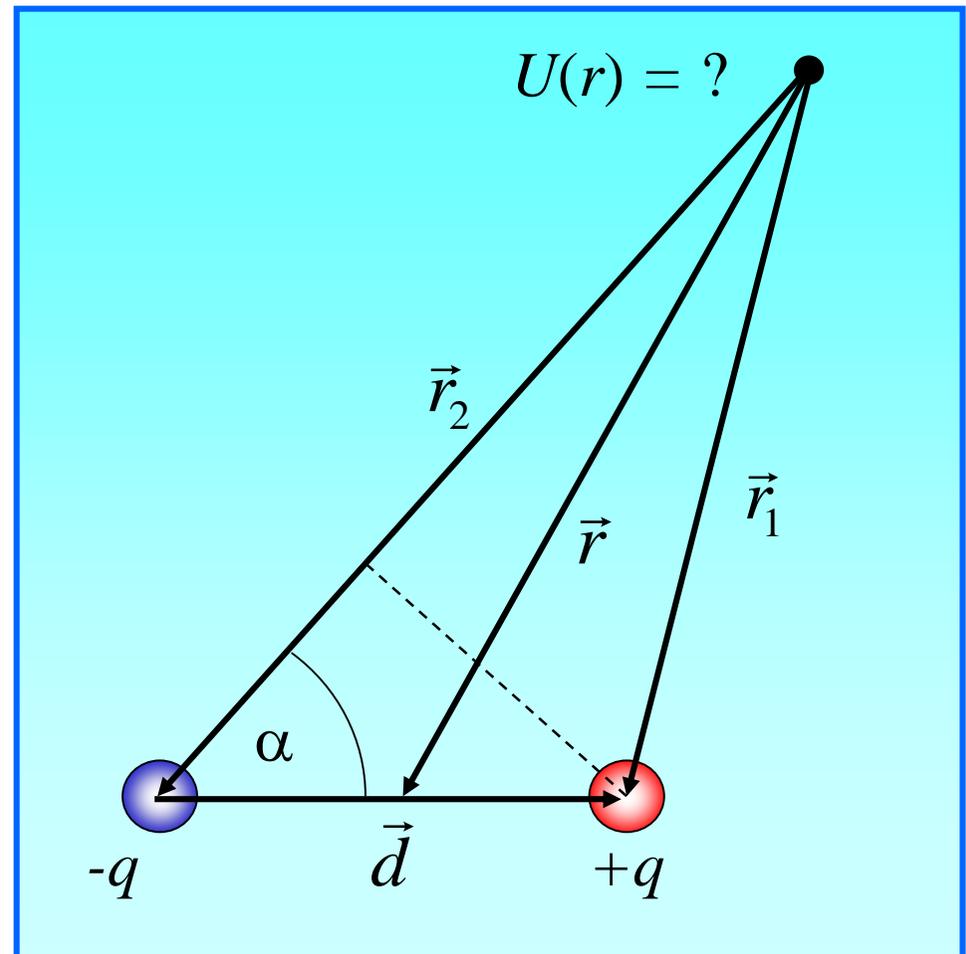


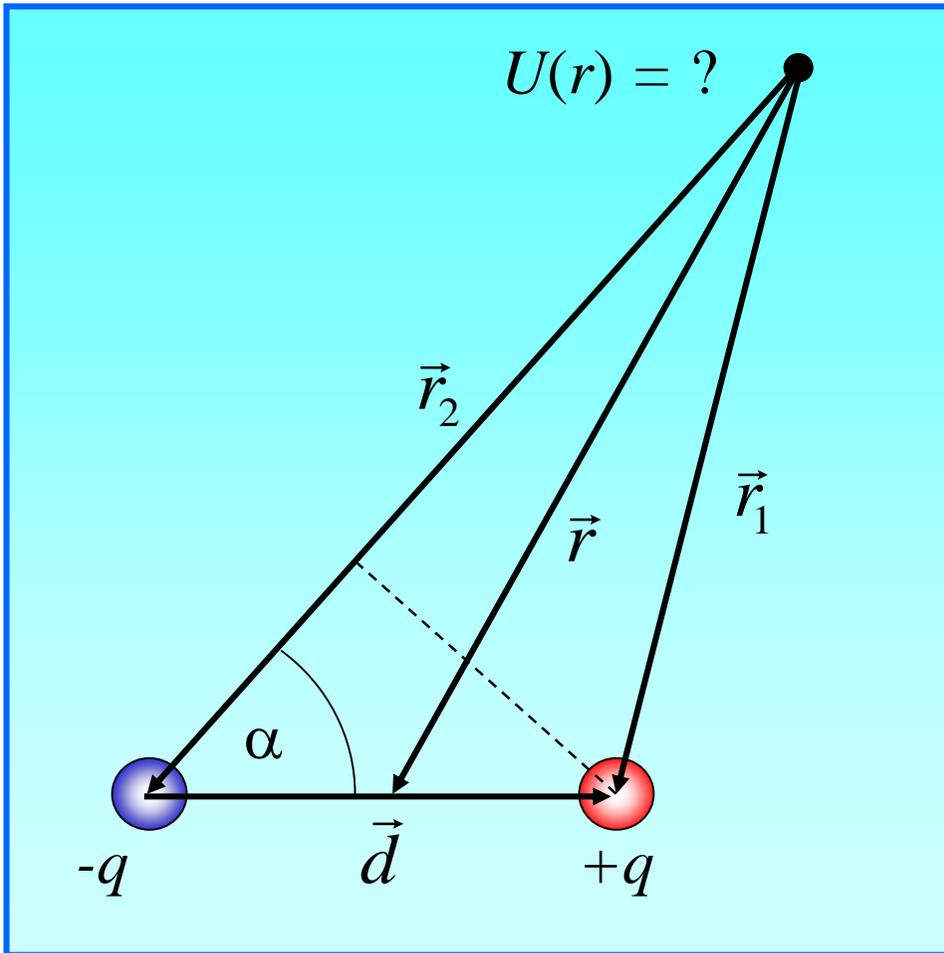
(iii) Kompliziertere Ladungsverteilungen können in erster Näherung als Dipol angesehen werden:



Das Potential des elektrischen Dipols folgt einfach aus dem Potential der Einzelladungen. Für *eine* Punktladung q war:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$





$$\Rightarrow U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Das Potential soll nun für einen sehr großem Abstand r von dem Dipol bestimmt werden, d.h. es gilt:

$$r_1, r_2 \gg d$$

Dann gilt in guter Näherung (siehe Zeichnung)

$$r_2 - r_1 = d \cos \alpha$$

und

$$r_1 \cdot r_2 \approx r^2$$

Also wird:

$$U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \alpha}{r^2}$$

Mit dem dem Superpositionsprinzip ergibt sich das Potential des Dipols zu:

$$U(r) = U_{+q} + U_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right)$$



$$\Rightarrow U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p r \cos \alpha}{r^3}$$

Da

$$p r \cos \alpha = \vec{p} \cdot \vec{r}$$

folgt für das Potential eines Dipols in großem Abstand („Fernfeld“) von den beiden Ladungen:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Das Potential eines Dipols nimmt mit der Entfernung wesentlich schneller ab als das einer Punktladung. Für große Entfernungen von den Ladungen gilt:

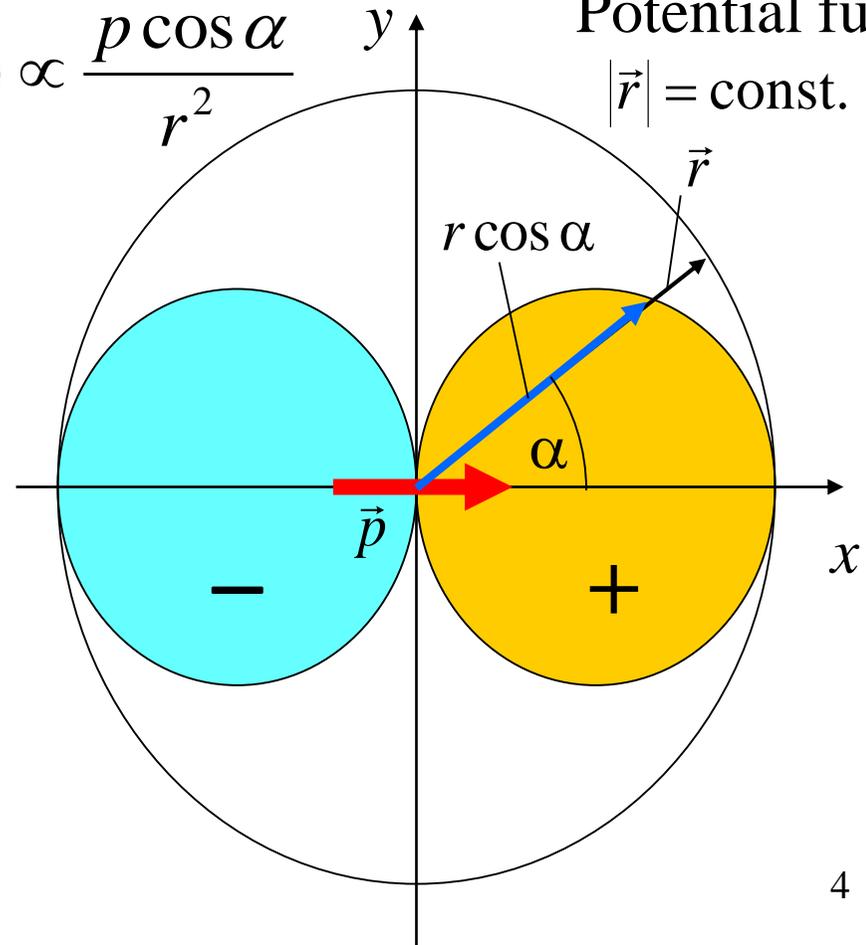
$$\text{Punktladung: } U(r) \propto \frac{1}{r}$$

$$\text{Dipol: } U(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Winkelabhängigkeit:

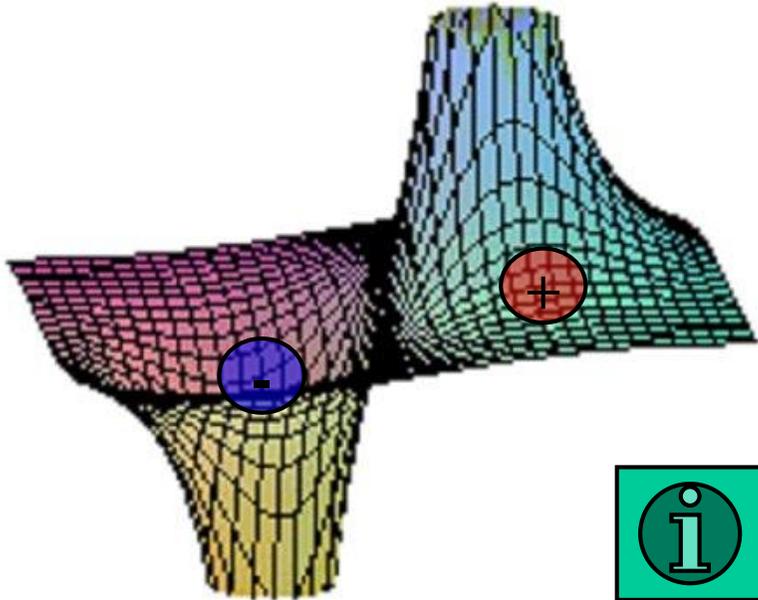
$$U(r) \propto \frac{p \cos \alpha}{r^2}$$

Potential für $|\vec{r}| = \text{const.}$





Das Potential eines Dipols im 3D Raum sieht dann so aus:



Das elektrische Feld des Dipols kann jetzt mit

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

berechnet werden. Für das „Fernfeld“ ergibt sich dann (nach einer recht mühsamen Rechnung):

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\left(\frac{\partial U(r)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r)}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2d \cos \alpha}{r^3} \vec{e}_r - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-d \sin \alpha}{r^3} \vec{e}_\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

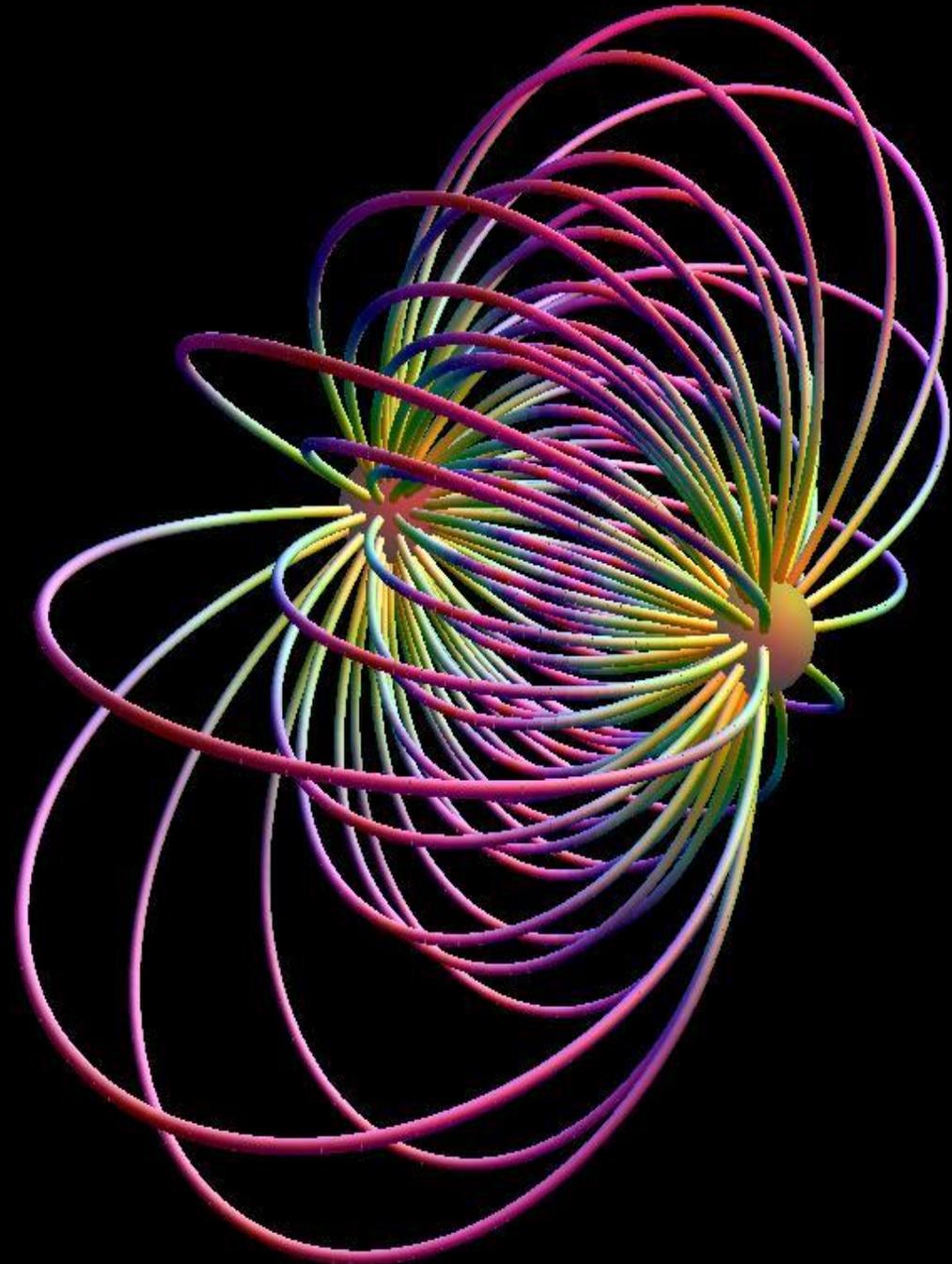
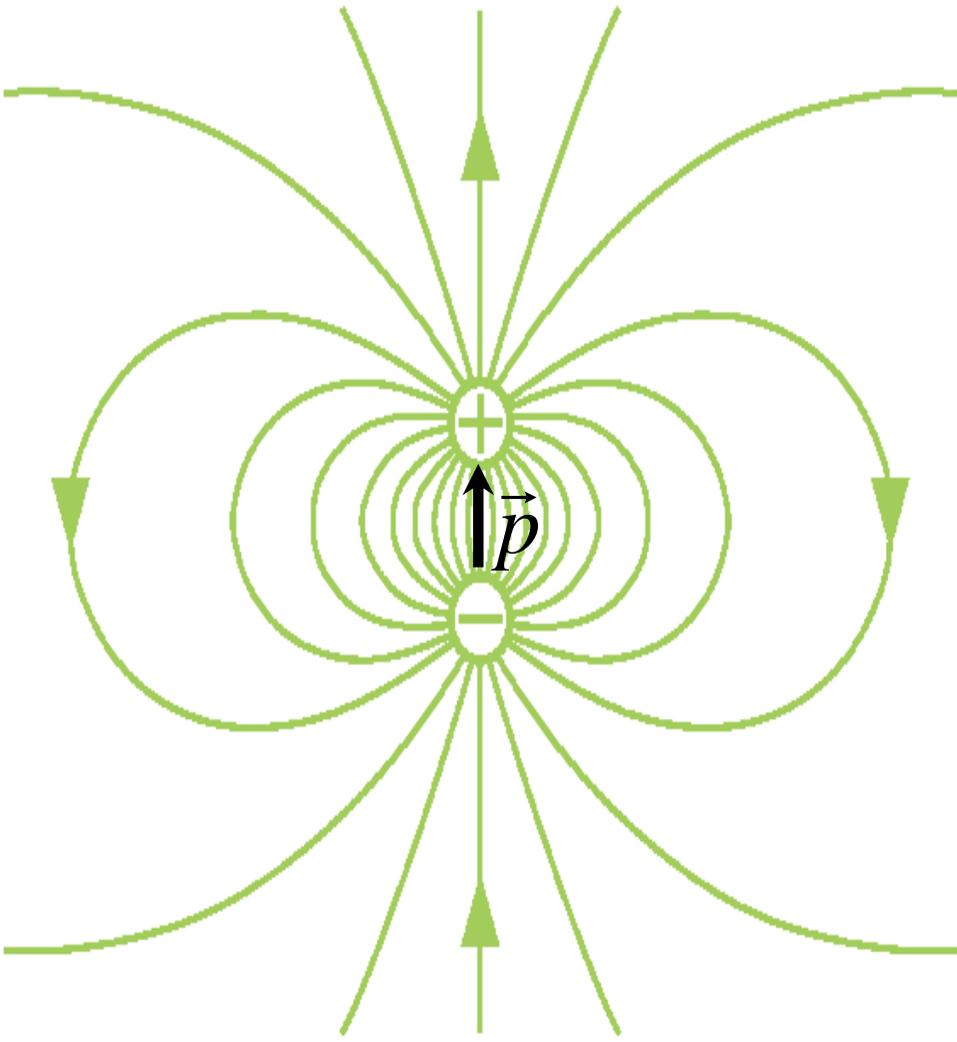
Das Dipolfeld ist *kein* radiales Feld!
Für große Abstände r vom Dipol gilt im Vergleich zur Punktladung:

$$\text{Punktladung:} \quad |\vec{E}(\vec{r})| \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\text{Dipol:} \quad |\vec{E}(\vec{r})| \propto \frac{1}{r^3}$$

Das Dipolfeld fällt also schneller mit dem Abstand ab als das Feld einer Punktladung.

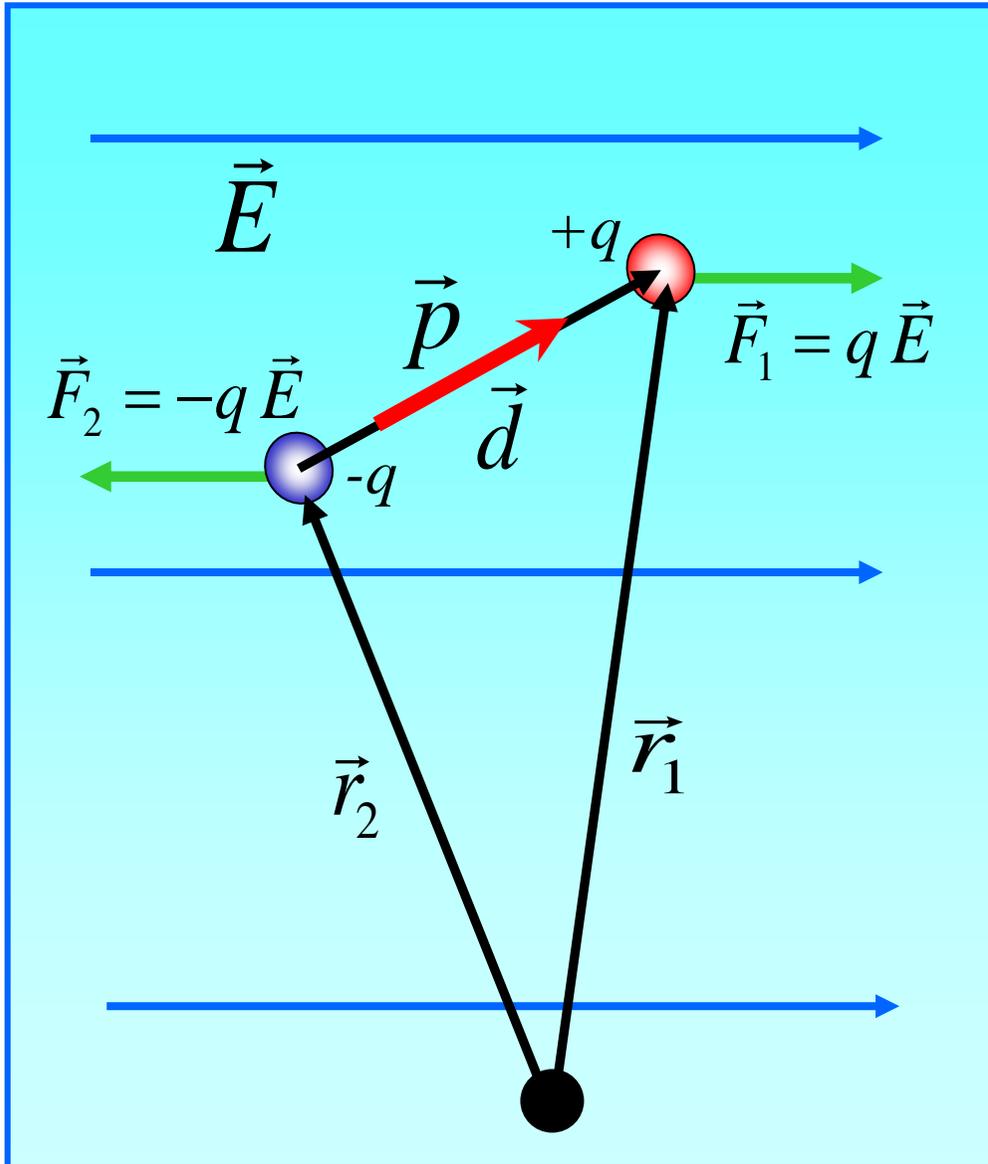
Das elektrische Feld eines Dipols
in zwei und drei Dimensionen:





Der Dipol im elektrischen Feld

Beschränkung auf: *Homogenes Feld*



Die resultierende Kraft auf den Dipol ist:

$$\vec{F}_{\text{Dipol}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{E} - q\vec{E} = \vec{0}$$

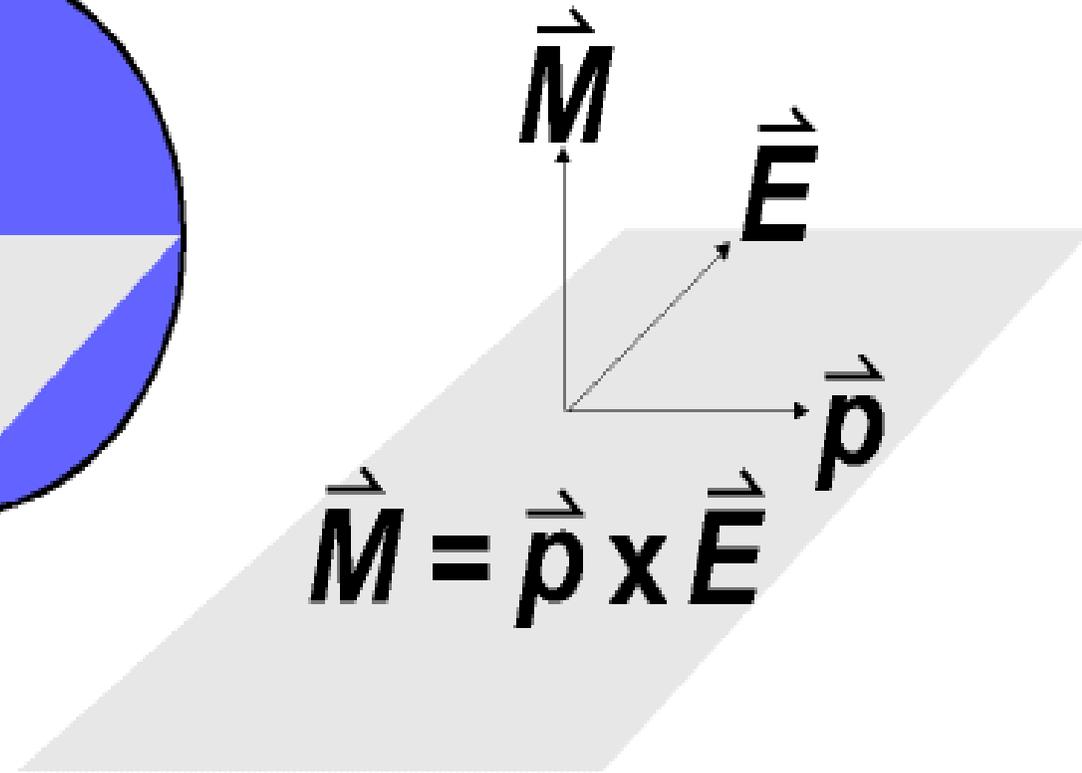
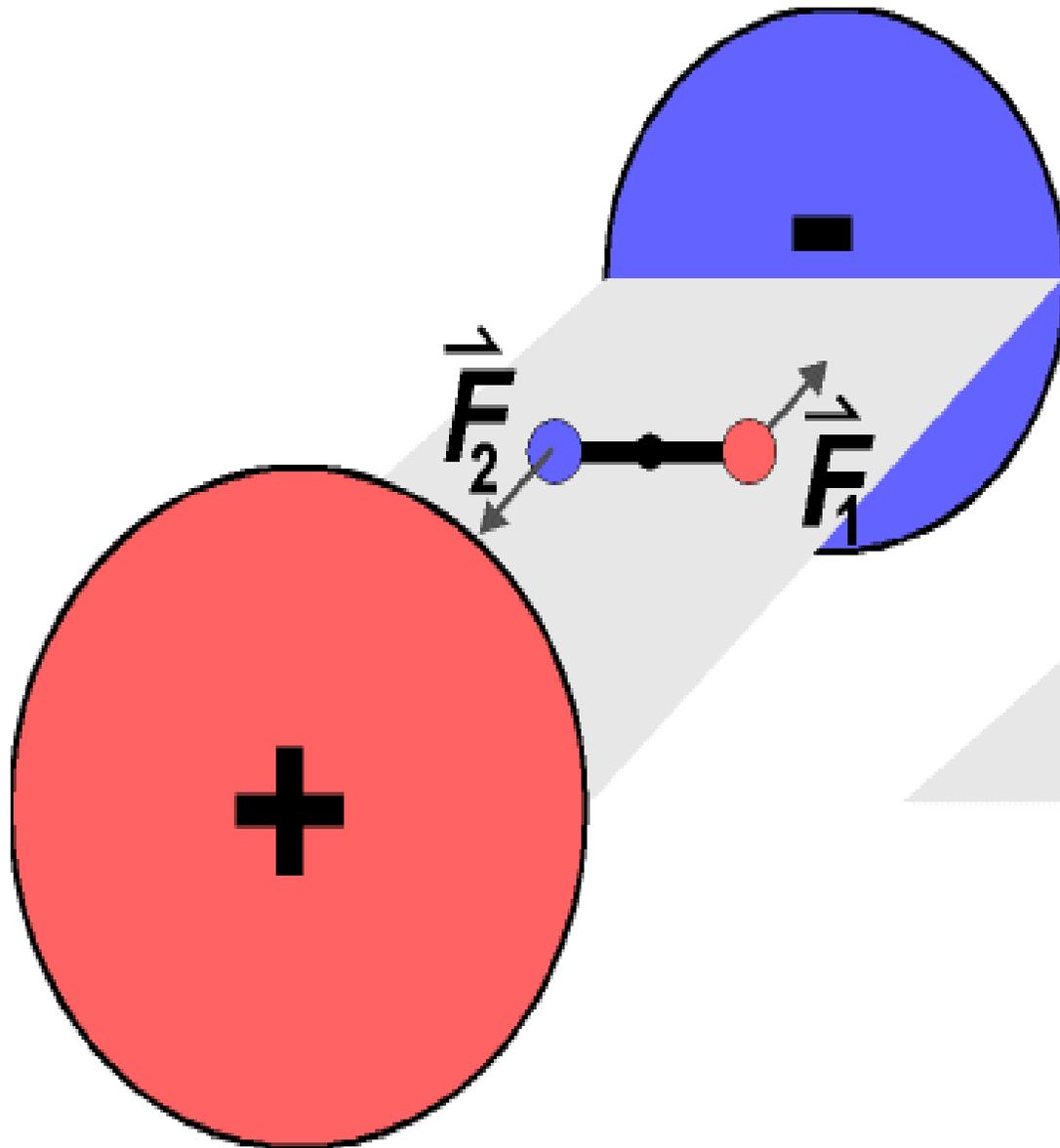
Der Dipol ist aber nicht in Ruhe, denn es wirkt ein Drehmoment:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\text{Dipol}} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= q\vec{r}_1 \times \vec{E} - q\vec{r}_2 \times \vec{E} \\ &= q \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{=\vec{d}} \times \vec{E} \end{aligned}$$

Mit der Definition des Dipolmoments $\vec{p} = q\vec{d}$

folgt für das Drehmoment:

$$\vec{M}_{\text{Dipol}} = \vec{p} \times \vec{E}$$





Maxwell-Gleichungen für das elektrostatische Feld

Wir hatten bisher die folgenden zwei wichtigen Eigenschaften des elektrostatischen Feldes kennengelernt:

$$(i) \quad \oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{ges}}}{\epsilon_0}$$

$$(ii) \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

Zunächst wollen wir die zweite Eigenschaft auch in Integralform schreiben. Wir wissen bereits, dass die Existenz eines Potentials bedeutet, dass das Linienintegral über das Vektorfeld nicht vom Weg zwischen dem Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Insbesondere gilt für geschlossene Wege, d.h. für Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt:

$$\oint_{\text{geschl. Weg}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Dies ist bereits die **3. Maxwell'sche Gleichung** für das *elektrostatische* Feld in integraler Schreibweise.

ACHTUNG: Die 3. Maxwell-Gleichung ist erst in der *Elektrodynamik* vollständig !

Jetzt soll die differentielle Schreibweise der Maxwell-Gleichungen eingeführt werden. Dies erfordert ein wenig Mathematik



Dafür werden zwei sog. „Integralsätze“ verwendet, die in der Zusatzstunde ausführlicher erläutert werden. Es gilt für ein beliebiges Vektorfeld \vec{E} und für eine geschlossene Oberfläche O , die ein Volumen V umschließt, sowie eine Fläche A mit der Randkurve ∂A :

Satz von Gauß (Oberflächenintegral \Leftrightarrow Volumenintegral):

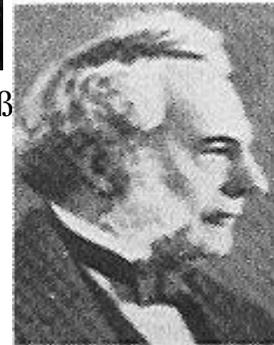
$$\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(O)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$



Carl-Friedrich Gauß
(1777-1855)

Satz von Stokes (Wegintegral \Leftrightarrow Flächenintegral):

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$



George Gabriel Stokes
(1819-1903)

DIVERGENZ

$$\vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Definitionen:

ROTATION

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}_{10}$$



Die 1. Maxwell-Gleichung lautet:

$$\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{ges}}}{\epsilon_0}$$

Nun kann die im von der Oberfläche O umschlossenen Volumen V enthaltene Gesamtladung q_{ges} durch die Ladungsdichte ρ ausgedrückt werden:

$$q_{\text{ges}} = \iiint_{V(O)} \rho dV$$

Mit dem Gauß'schen Satz folgt für die linke Seite der 1. Maxwell-Gleichung:

$$\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(O)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

Wenn nun die rechte Seite durch die Ladungsdichte ausgedrückt wird ergibt sich:

$$\iiint_{V(O)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(O)} \rho dV$$

Da dies für *jede* Oberfläche, die die Gesamtladung q_{ges} umschließt, gelten soll, müssen die Integranden links und rechts übereinstimmen, also:

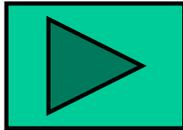
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dies ist die **1. Maxwell'sche Gleichung** in differentieller Form.



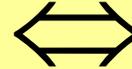
Wir hatten schon in der Mechanik gesehen, dass die Existenz eines Potentials gleichbedeutend ist mit der Wirbelfreiheit des Vektorfeldes. Es gilt daher für das *elektrostatische* Feld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$



Dies ist die **3. Maxwell'sche Gleichung** in differentieller Form. Für das *elektrostatische* Feld gilt daher zusammengefaßt:

$$(i) \quad \oiint_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



$$(iii) \quad \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$





Inhalt der Vorlesung B1

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Einleitung

Ladungen & Elektrostatische Felder

Elektrischer Strom

Magnetostatik

Zeitlich veränderliche Felder - Elektrodynamik

Wechselstromnetzwerke

Die Maxwell'schen Gleichungen

Elektromagnetische Wellen & Strahlung

Relativität der Felder

5. Optik

Licht als elektromagnetische Welle

Geometrische Optik

Optische Abbildungen

Wellenoptik



Der elektrische Strom

Bewegte Ladungen in Feldern

Ein Teilchen mit der Ladung q erfährt im elektrischen Feld die Kraft:

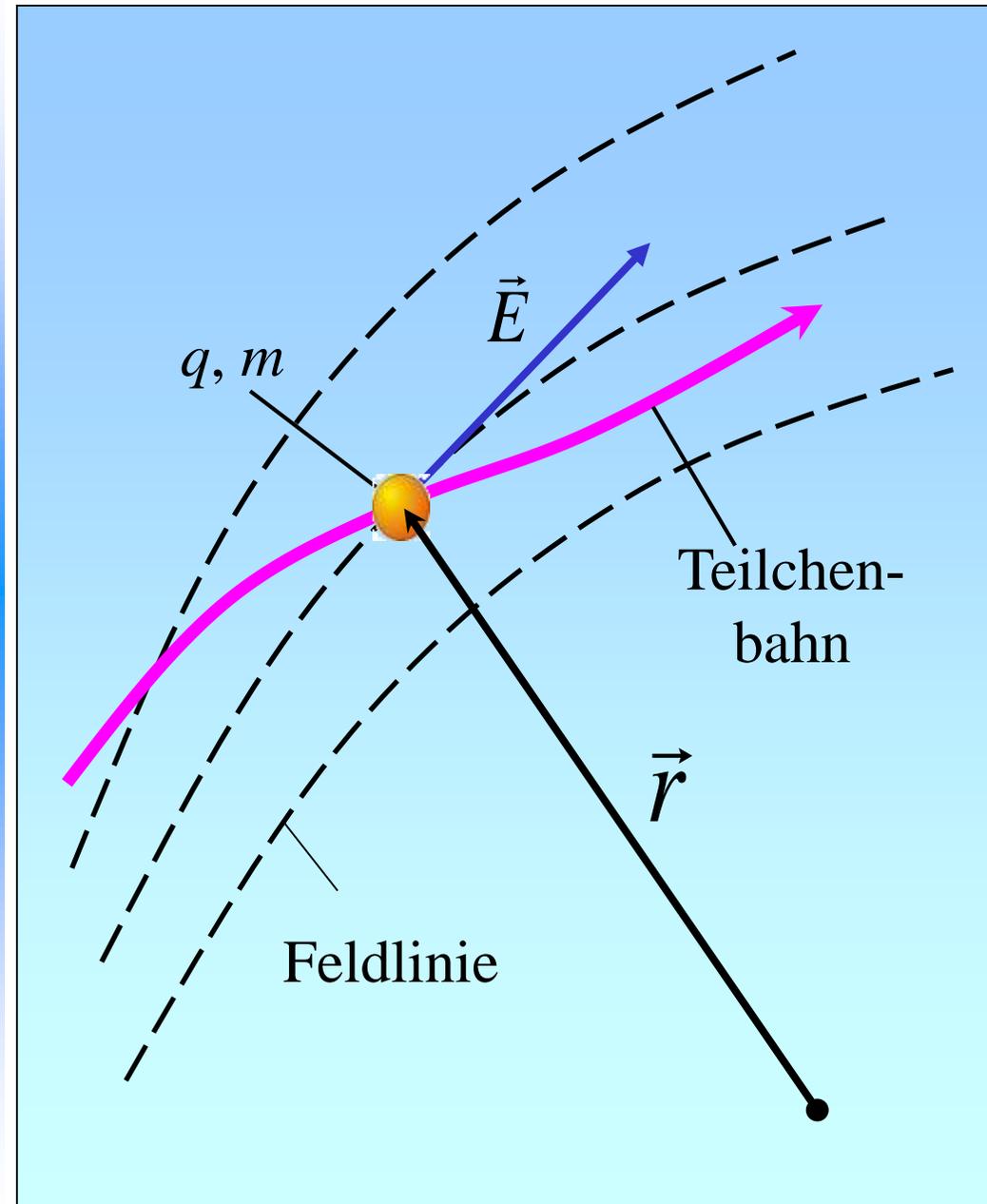
$$\vec{F}_E = q \vec{E}$$

Dadurch wird das Teilchen beschleunigt. Nach dem 2. Newton'schen Gesetz gilt dann:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$$

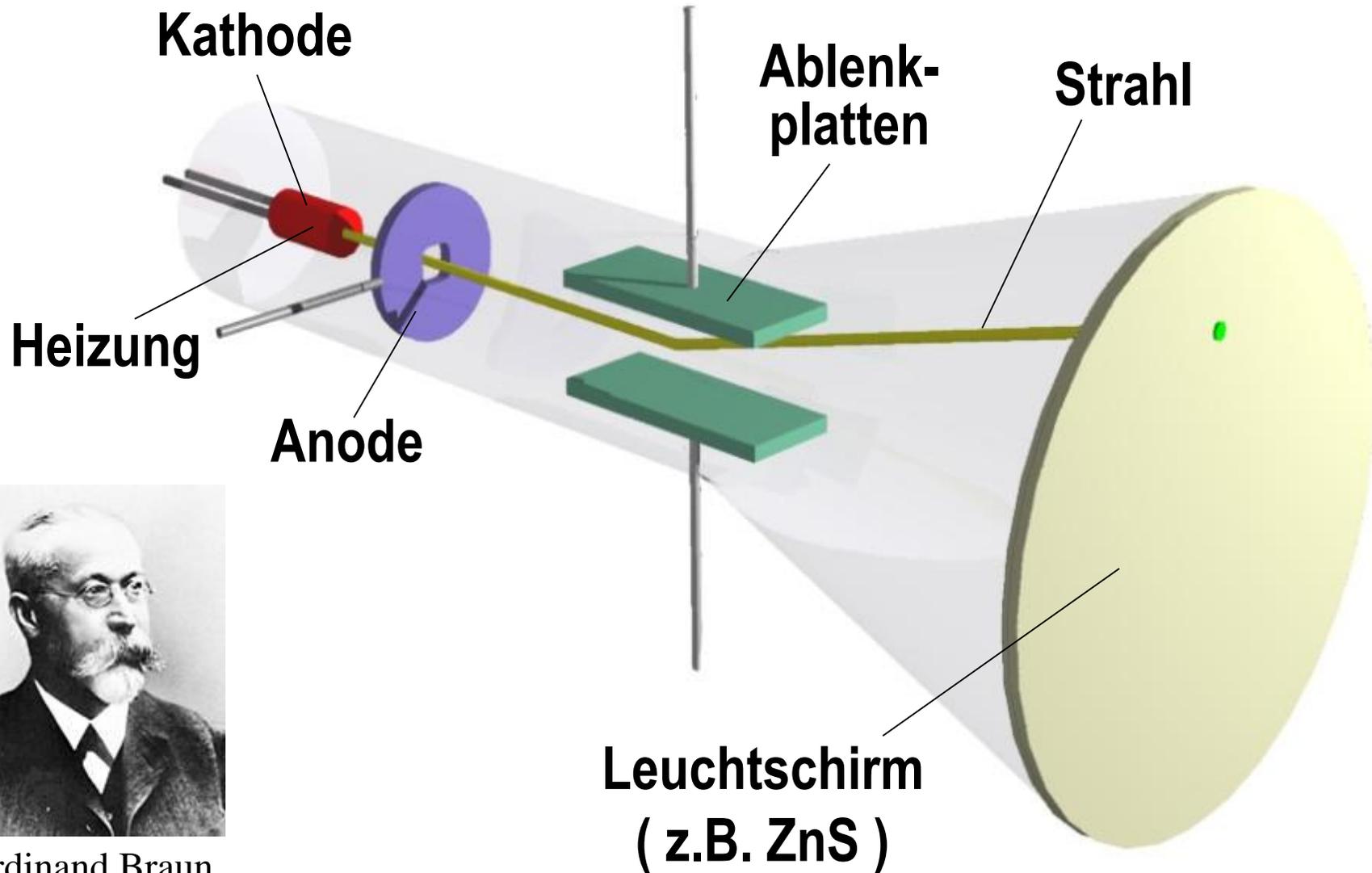
Die Beschleunigung erfolgt in die Richtung der Feldlinien. Als Bewegungsgleichung ergibt sich dann:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{m} \vec{E}$$





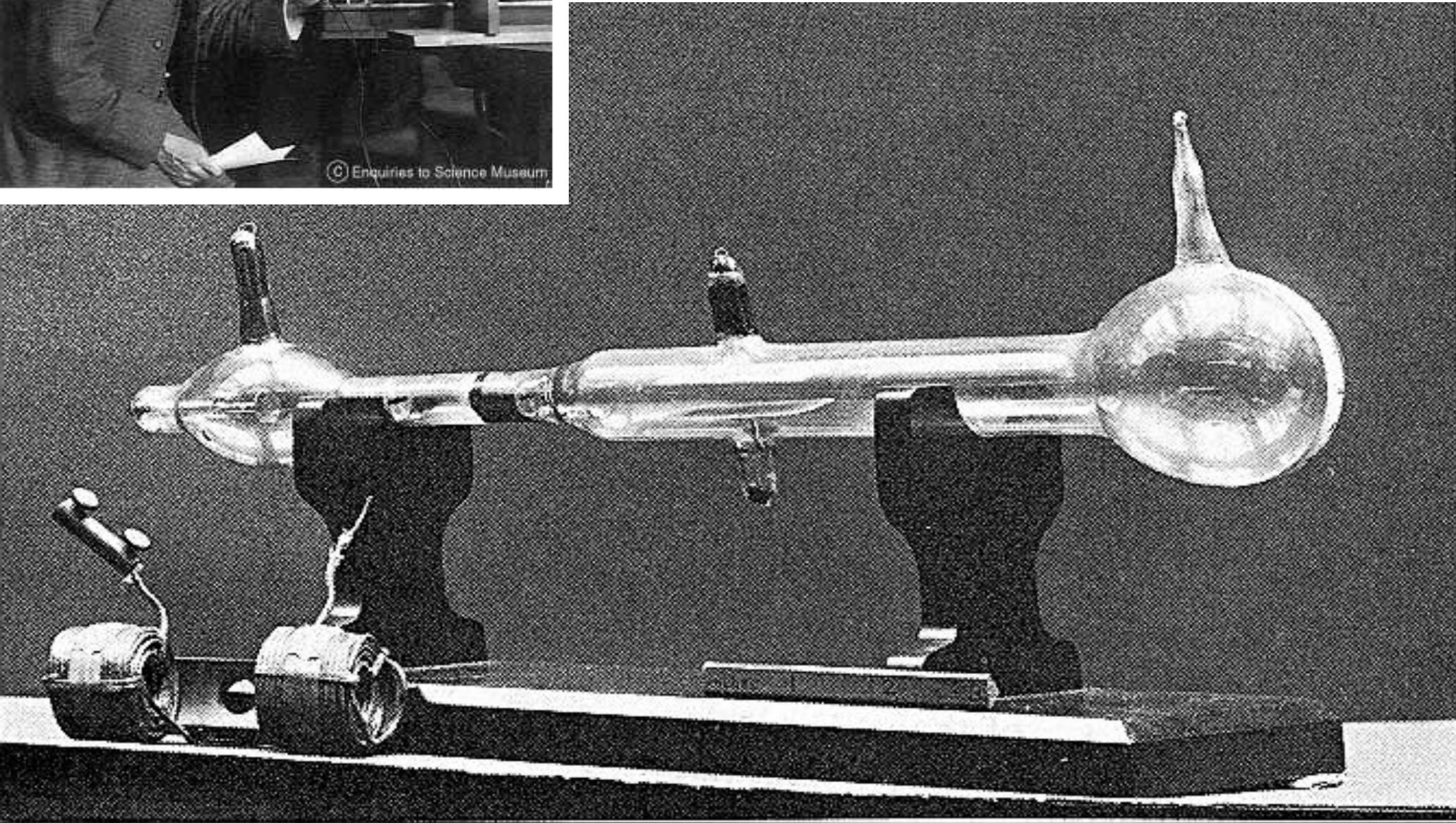
Beispiel: Die Oszillographenröhre („Braun’sche Röhre“ 1897)



Ferdinand Braun
(1850-1918)

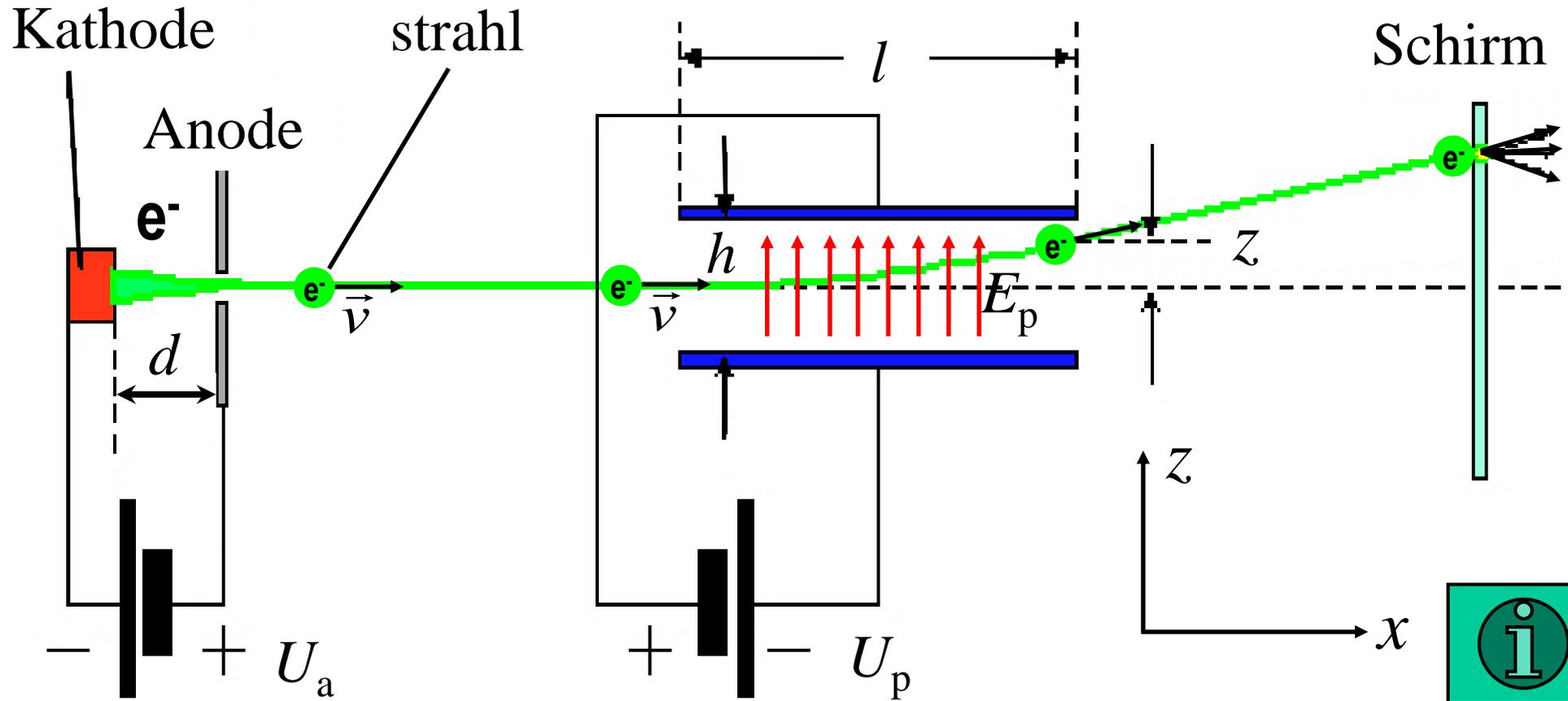


Elektronenstrahlröhre von J. J. Thomson (1897)





Elektronen-



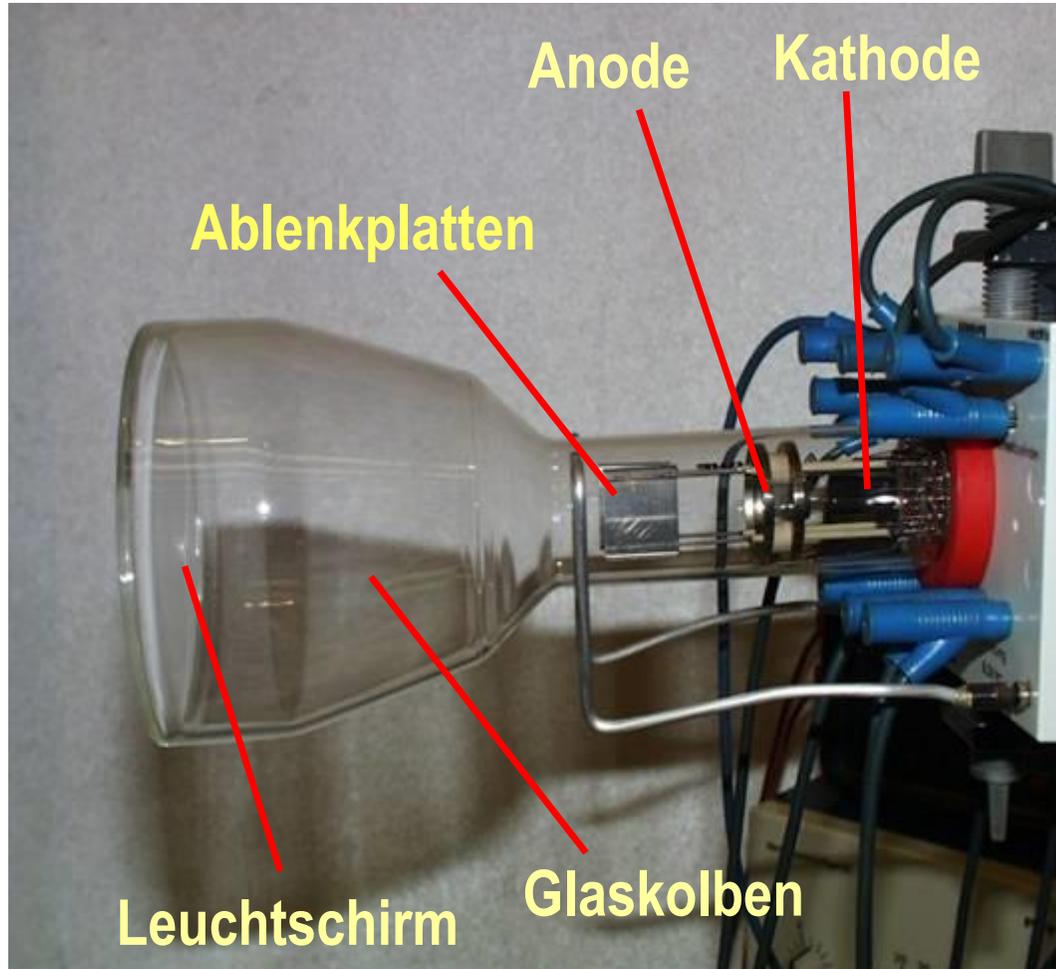
Die Ladung des Elektrons ist $Q_e = -e$ und seine Masse $m = m_e$.

Als Bewegungsgleichung der Elektronen zwischen Kathode und Anode ergibt sich:

$$F = m_e a_e = m_e \dot{v} = e E_a \quad \text{mit} \quad E_a = \frac{U_a}{d}$$



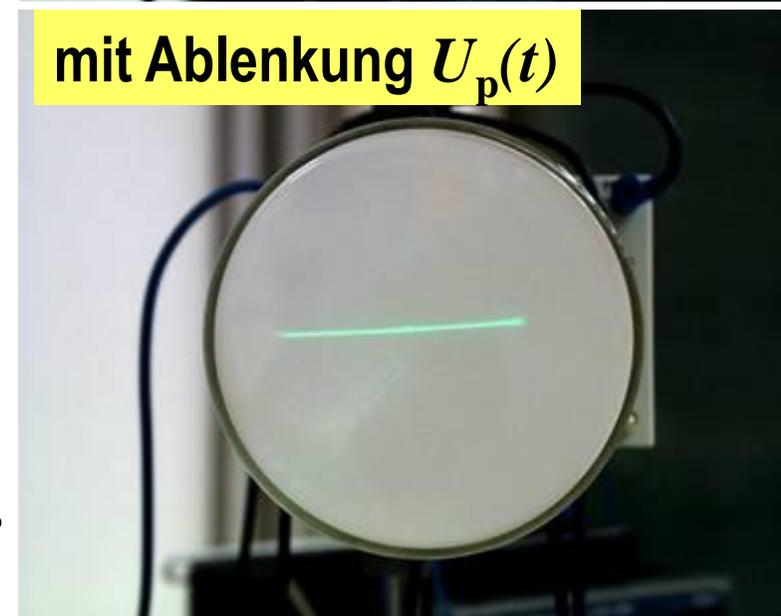
Versuch 1: Braun'sche Röhre



ohne Ablenkung



mit Ablenkung $U_p(t)$



Zahlenwerte: $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$U_a = 100 \text{ V}$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \Rightarrow v = 5.9 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

$U_p = 5 \text{ V}$, $l = 5 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm} \Rightarrow z = 3.1 \text{ mm}$



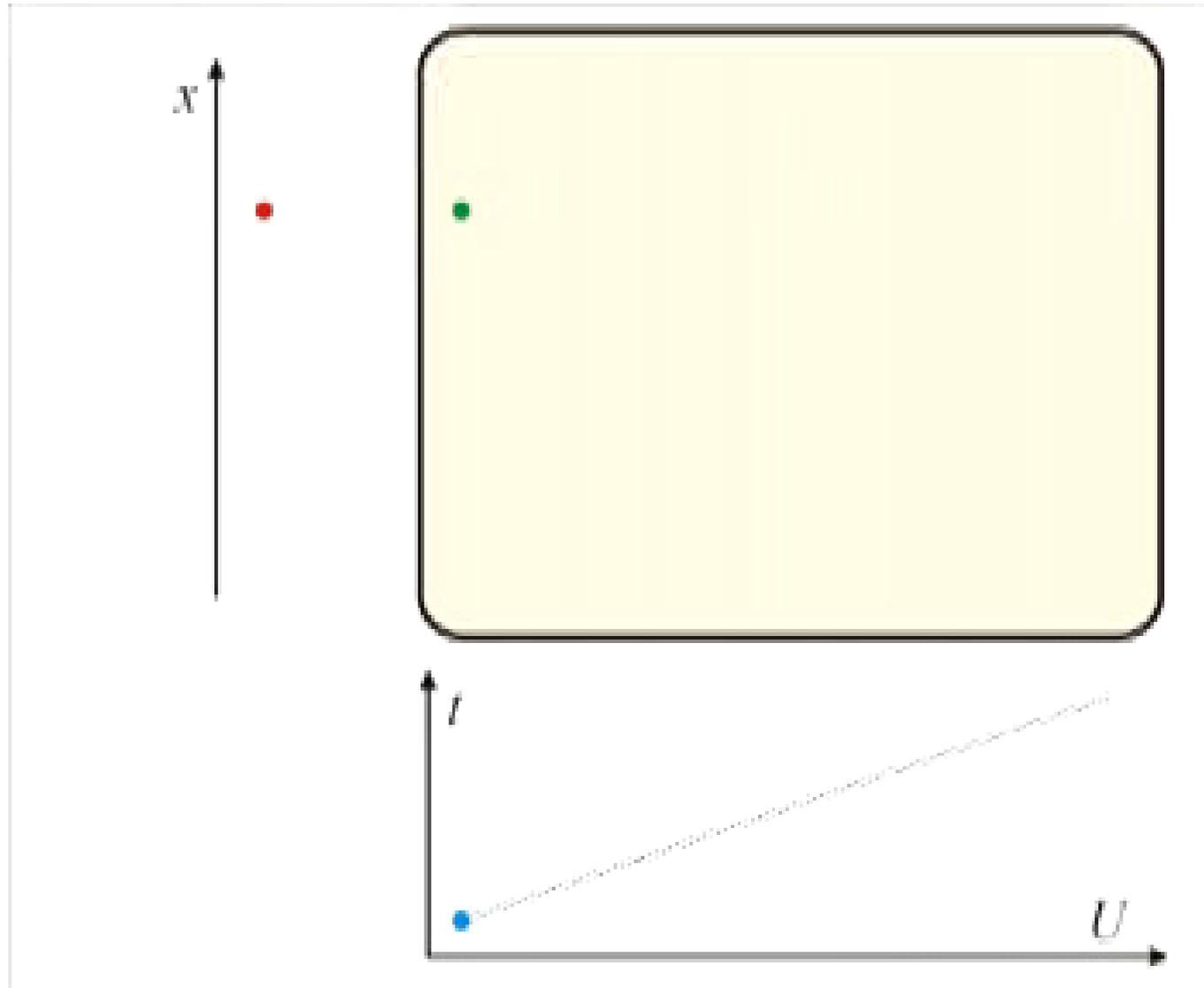
Prinzip des Oszillographen:

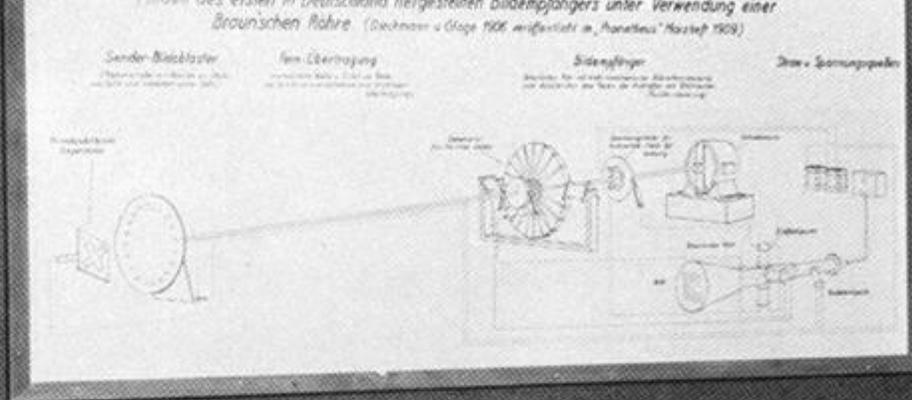
Vertikalablenkung:

Es wird eine Ablenkspannung $U_x(t)$ angelegt, die proportional zur Größe $x(t)$ ist.

Horizontalablenkung:

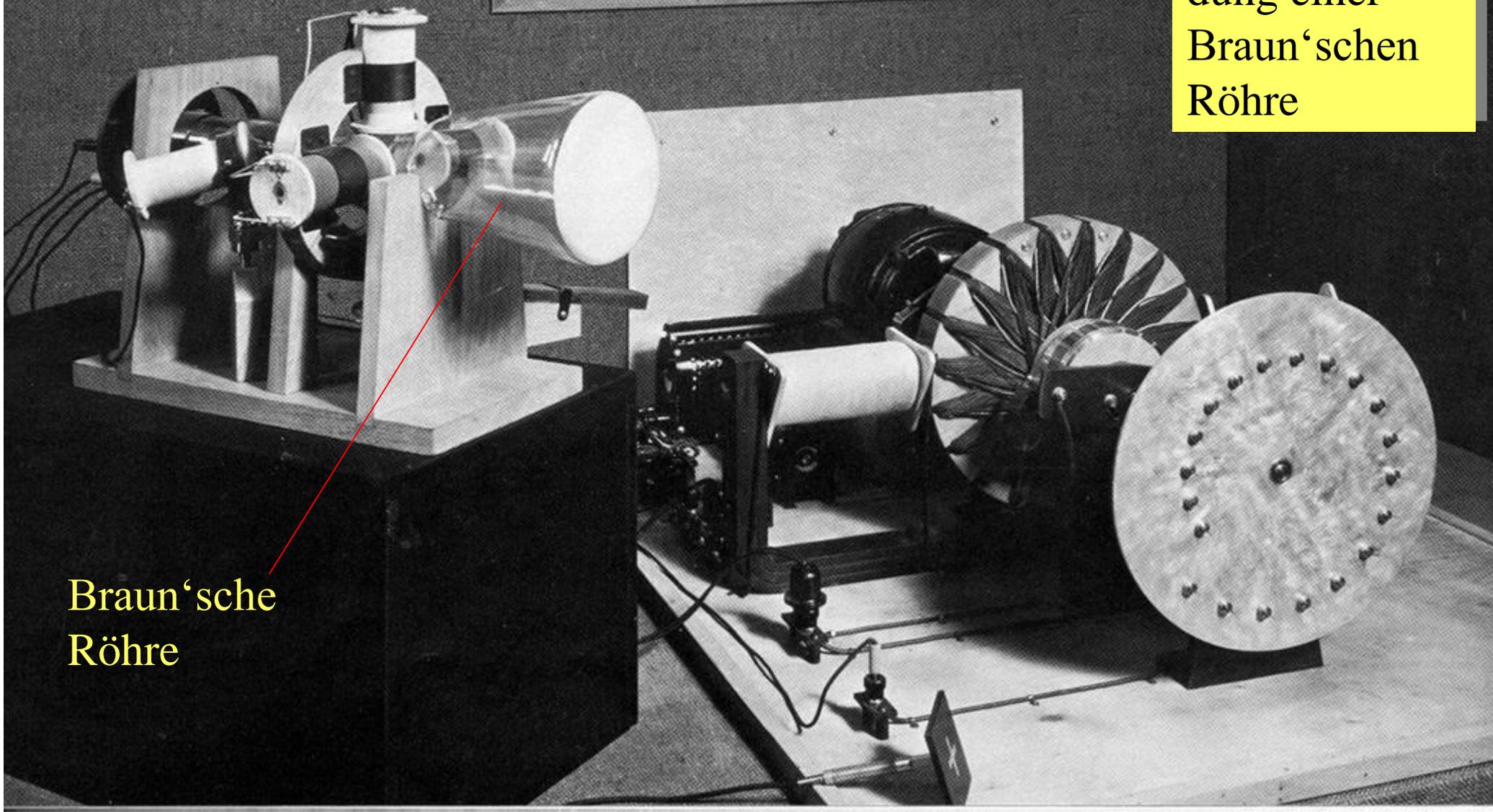
Es wird eine periodische Ablenkspannung $U(t)$ angelegt, die linear mit der Zeit ansteigt („Sägezahnspannung“).



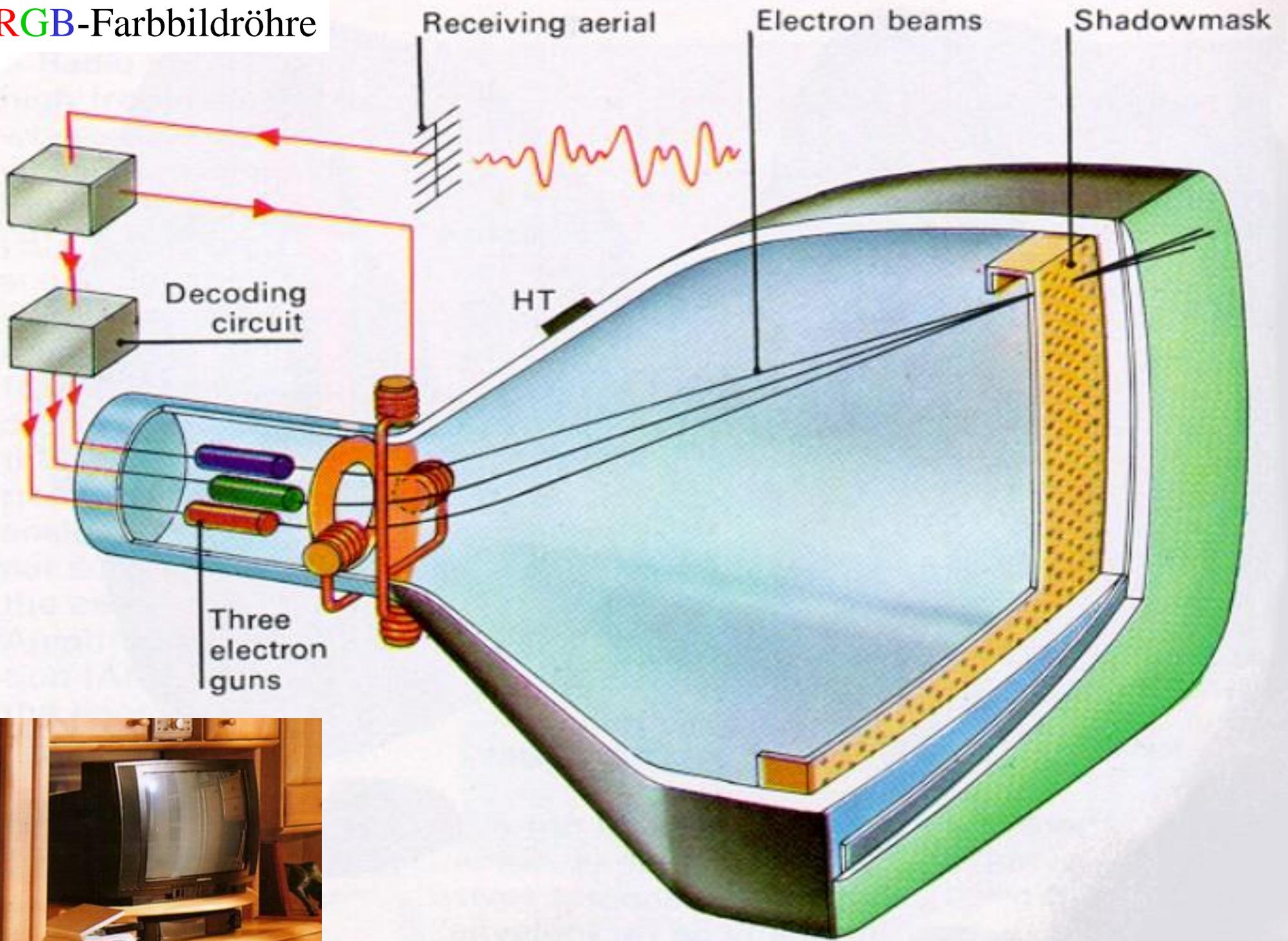


Modell einer der ersten Bildempfänger unter Verwendung einer Braun'schen Röhre

Braun'sche Röhre



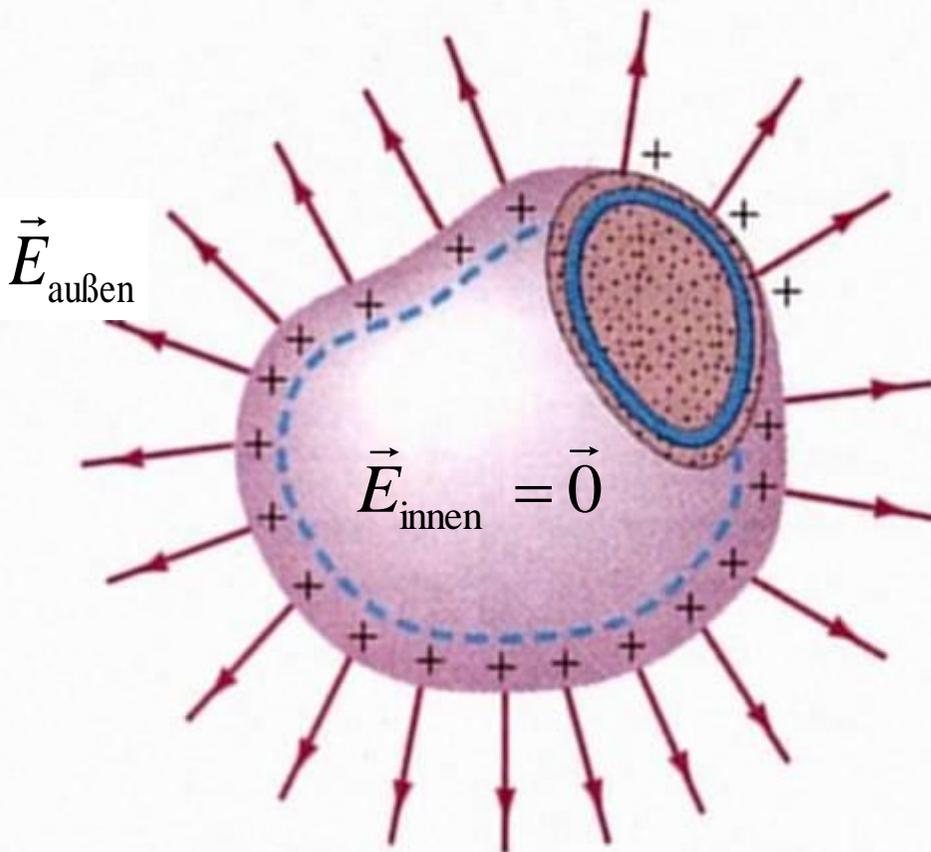
RGB-Farbbildröhre





Elektrische Felder um Leiter

In einem idealen Leiter können sich Ladungen frei bewegen. Da sich gleichnamige Ladungen abstoßen, befinden sich bei einem Leiter alle Ladungen an seiner Oberfläche:



Im Inneren eines Leiters gilt daher

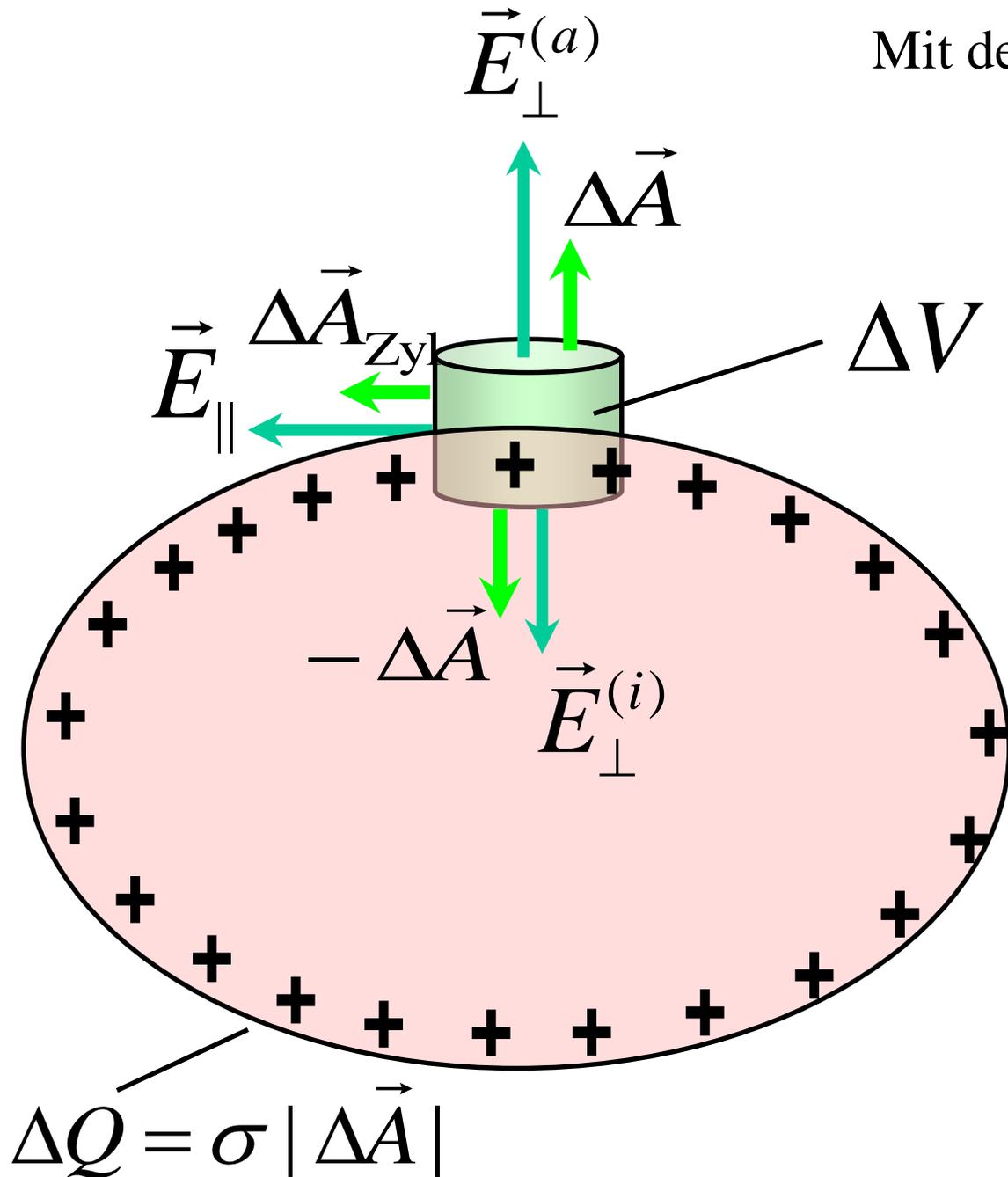
$$\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

für jede geschlossene Oberfläche O .

Dies ist nur erfüllt wenn:

$$\vec{E} = \vec{0}$$

An der Grenzfläche selbst muss das elektrische Feld bestimmte Bedingungen erfüllen. Um sie zu bestimmen, teilen wir den Feldvektor in eine Komponente senkrecht \vec{E}_\perp und eine Komponente parallel \vec{E}_\parallel zur Oberfläche auf. Es wird die folgende Leiteroberfläche betrachtet:

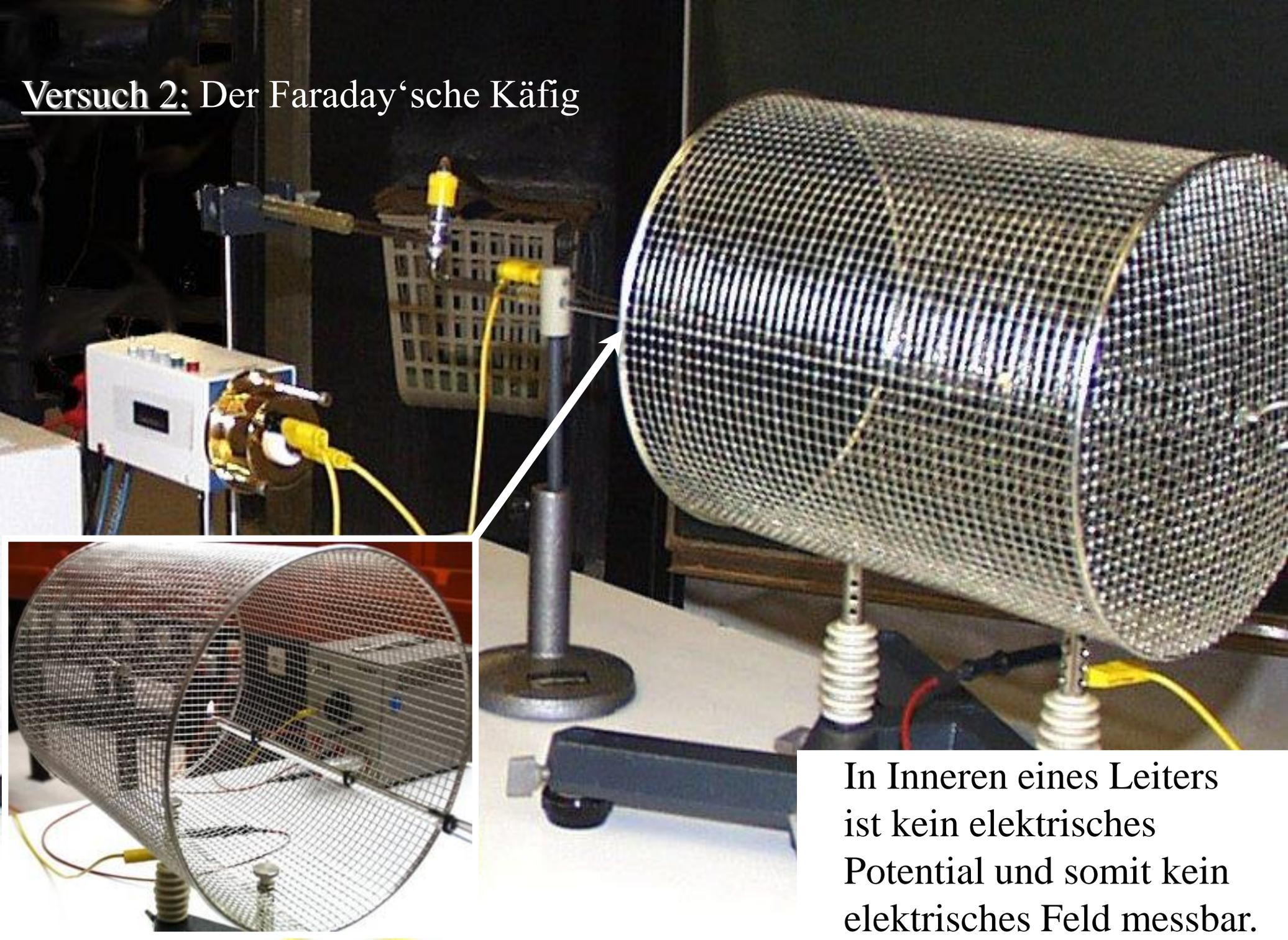


Mit der 1. Maxwell-Gleichung folgt:

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\partial \Delta V} \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \vec{E}_{\perp}^{(a)} \cdot \Delta \vec{A} \\
 &+ \underbrace{\vec{E}_{\perp}^{(i)} \cdot (-\Delta \vec{A})}_{=0 \text{ wegen } \vec{E}_{\perp}^{(i)} = \vec{0}} + \underbrace{\vec{E}_{\parallel} \cdot \Delta \vec{A}_{\text{Zyl}}}_{=0, \text{ Symmetrie!}} \\
 &= E_{\perp}^{(a)} \Delta A = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0} \\
 \Rightarrow E_{\perp}^{(a)} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

An der Grenzfläche macht die senkrechte Komponente des elektrischen Feldes also einen Sprung um σ/ϵ_0 mit der Flächenladungsdichte σ . Die parallele Komponente verschwindet.

Versuch 2: Der Faraday'sche Käfig



In Inneren eines Leiters
ist kein elektrisches
Potential und somit kein
elektrisches Feld messbar.

Im Inneren des Faraday'schen Käfigs ist ein feldfreier Raum. Die leitenden Kugeln stoßen sich hier nicht ab.



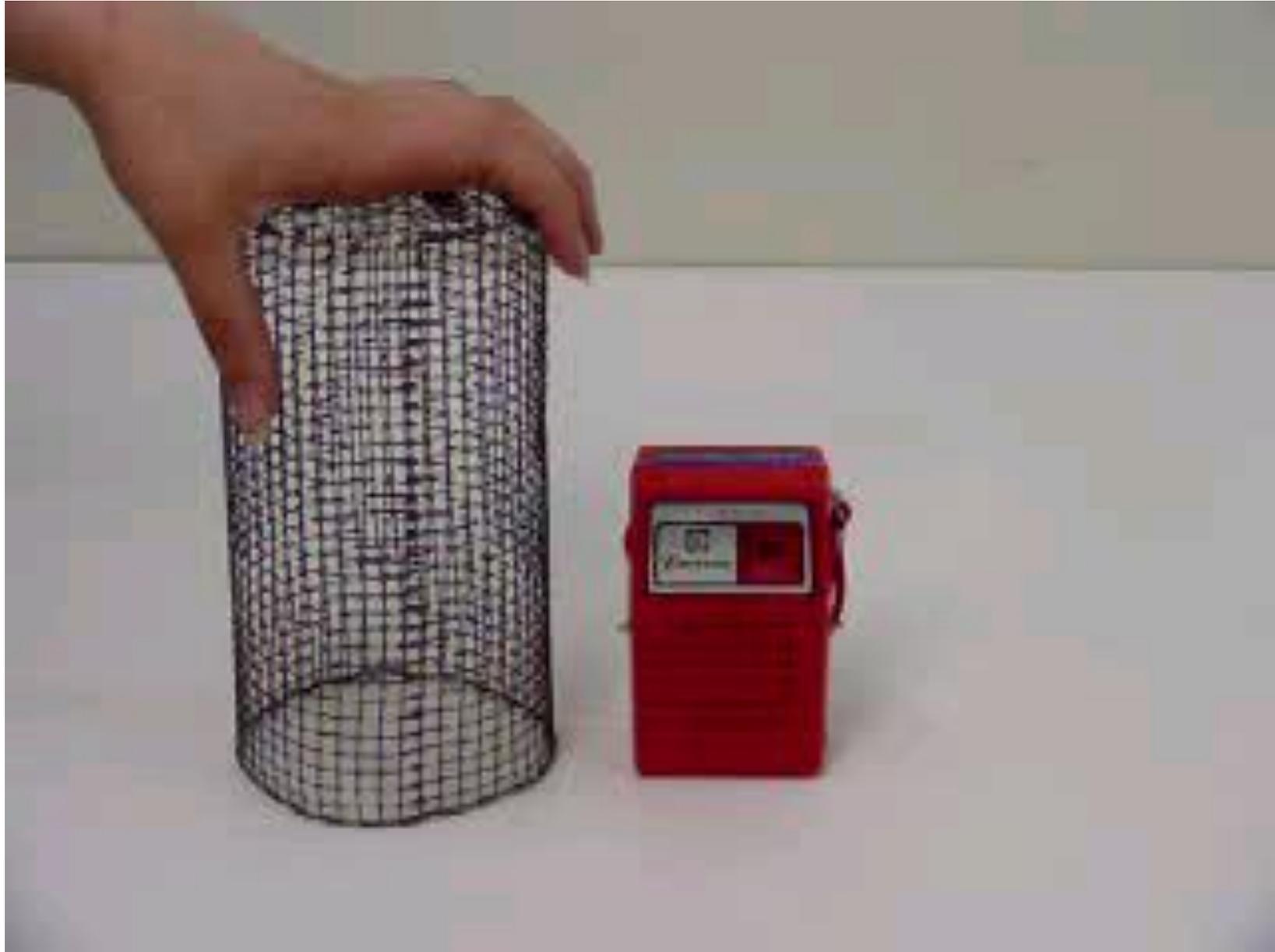


Beispiel 1: Verhalten bei Blitzschlag





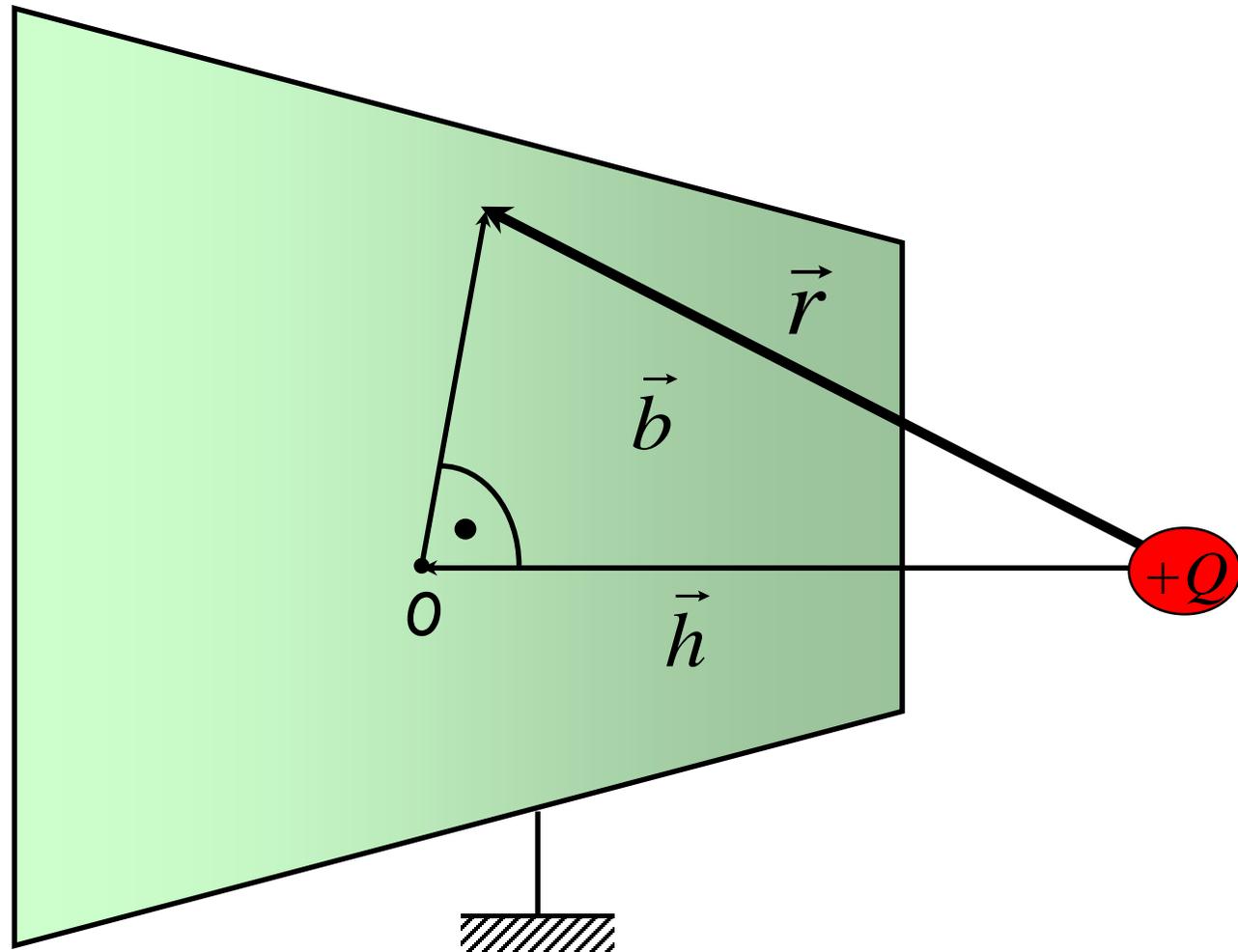
Beispiel 2: Radioempfang im Käfig





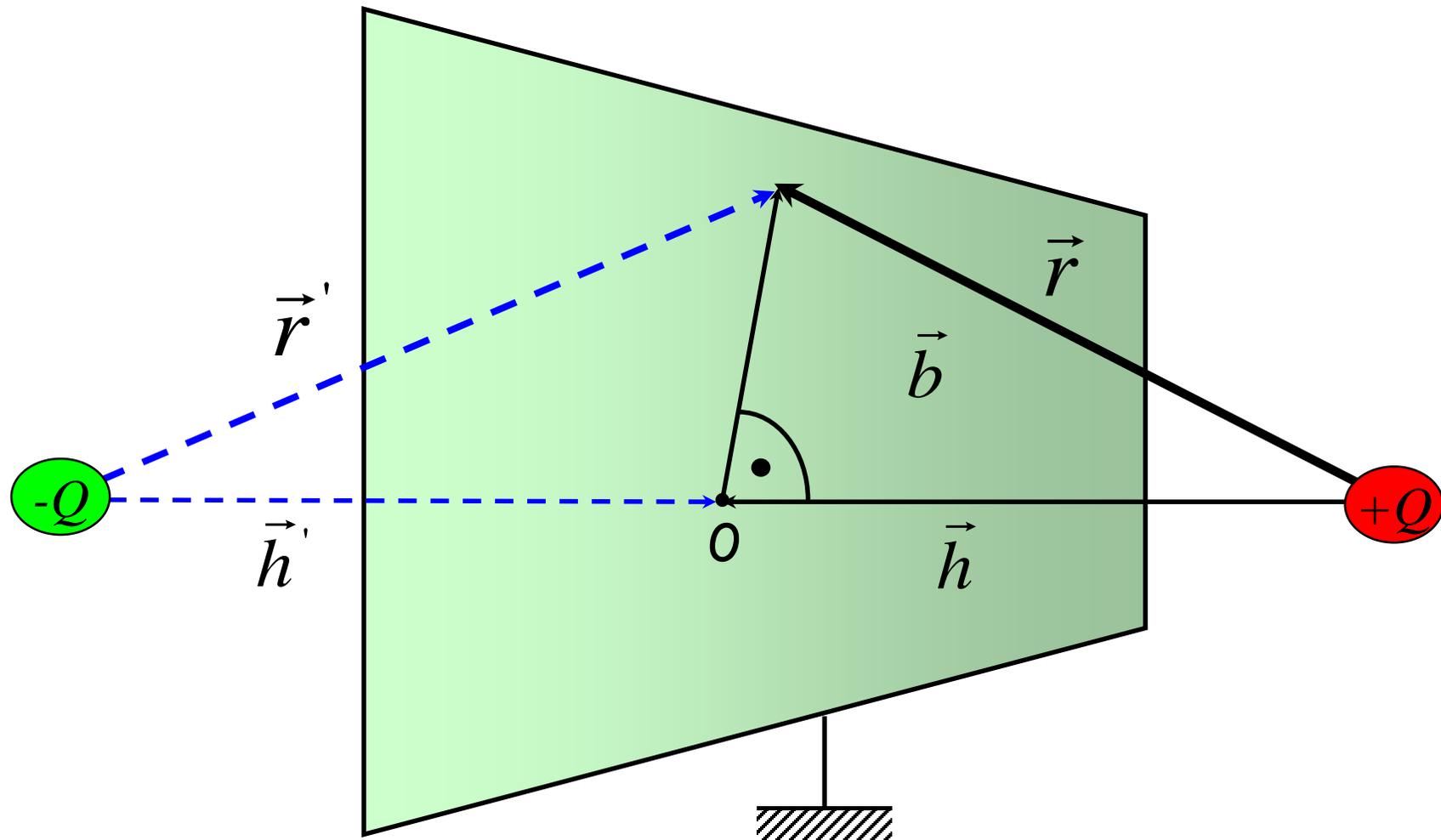
Berechnung von Feldern in der Nähe von Leitern

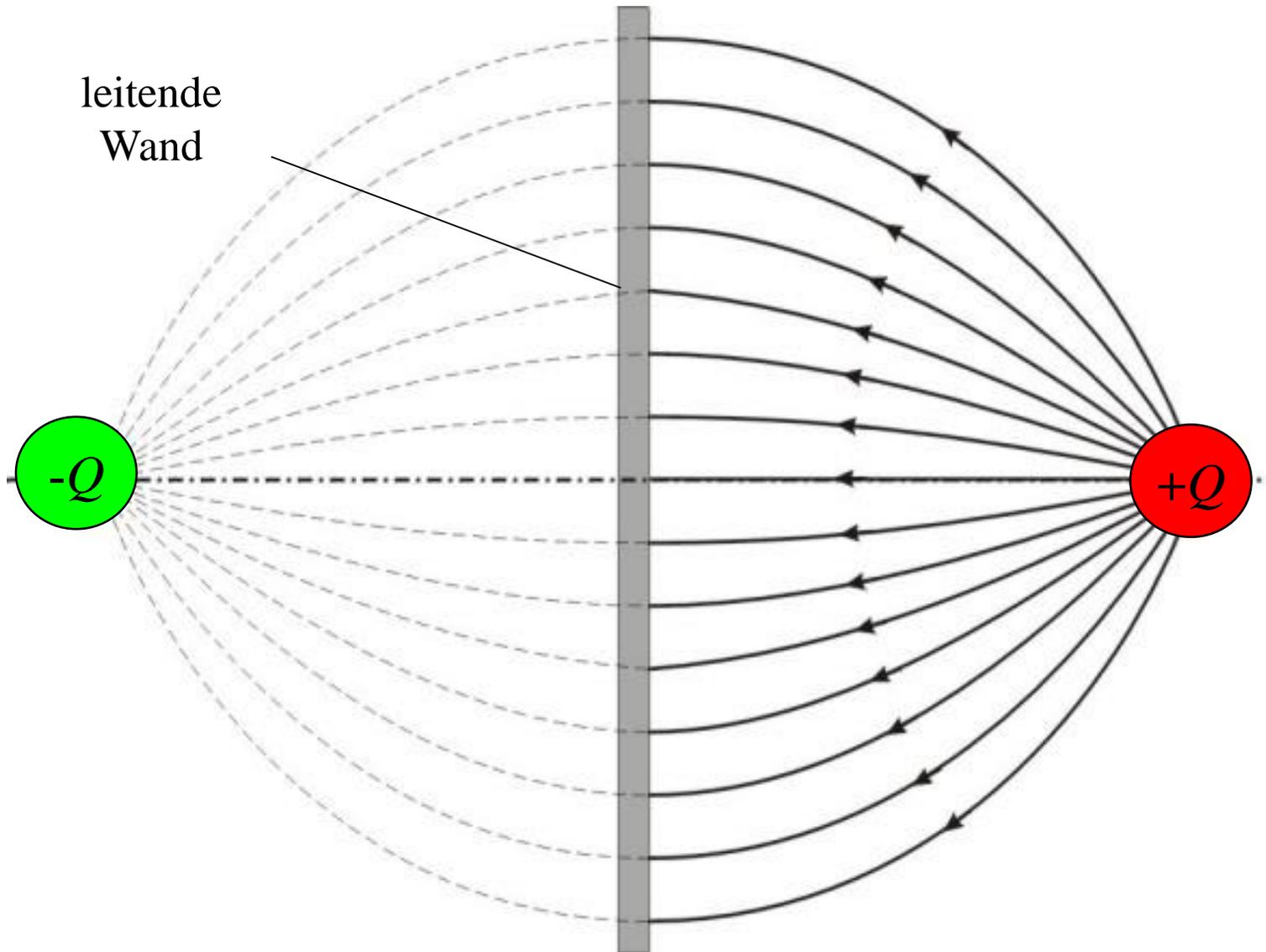
Als Beispiel soll das elektrische Feld einer Punktladung $+Q$, die sich vor einer ideal leitenden, unendlich großen Wand befindet, berechnet werden. Dies ist schwierig, da die Feldlinien senkrecht auf der Wand stehen müssen. Das Feld ist also nicht einfach durch das elektrische Feld einer Punktladung gegeben.



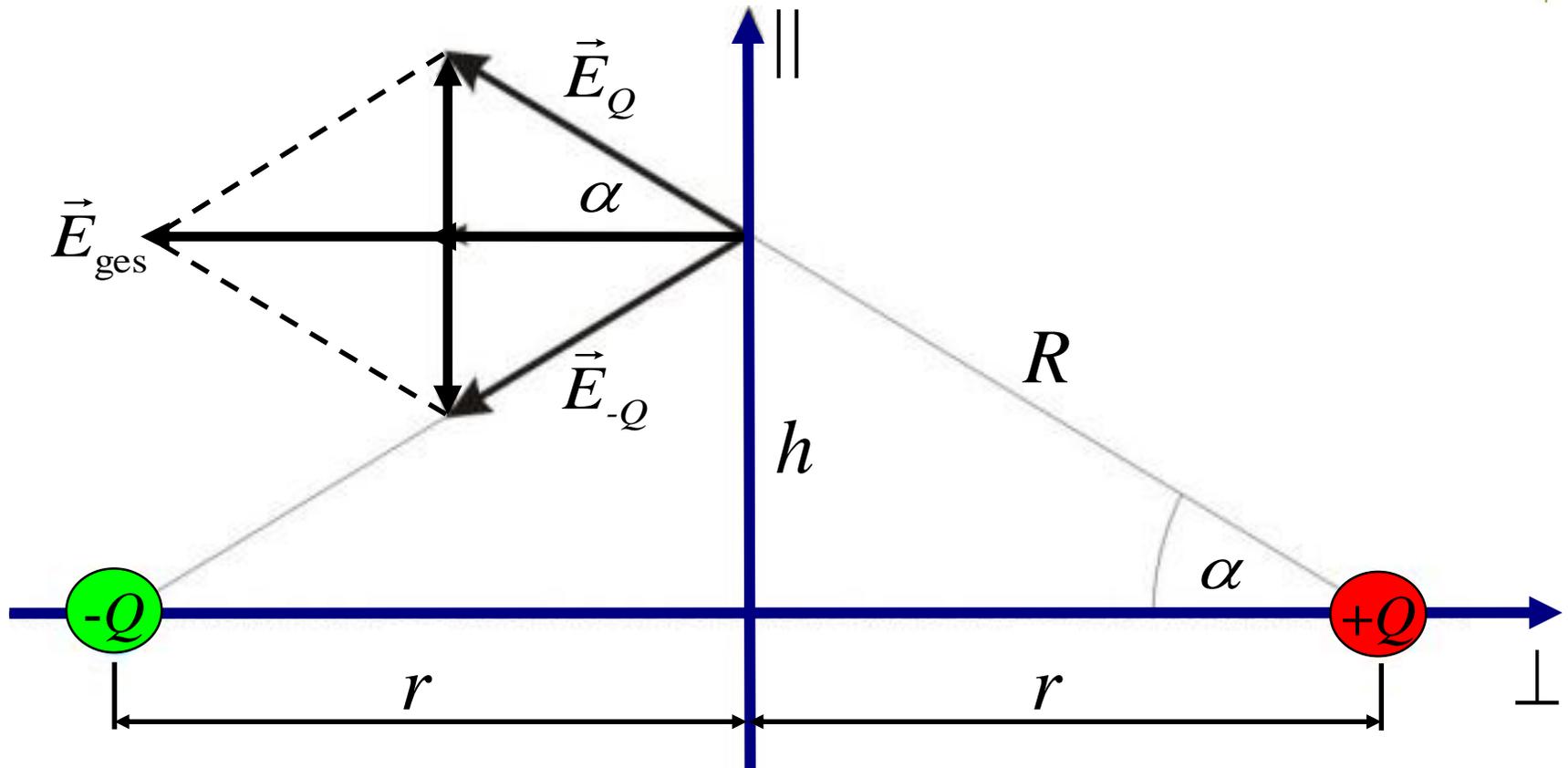


Auf der leitenden Wand müssen sich die Ladungen also genau so verschieben, dass die Feldlinien immer senkrecht aus der Wand austreten. Dies kann durch Einführen der sog. „Spiegelladung $-Q$ hinter der Wand erreicht werden. Diese Spiegelladung ersetzt die Nebenbedingungen, die durch die leitende Ebene eingeführt worden sind.





Das Problem ist jetzt also äquivalent zur Berechnung des elektrischen Feldes zweier Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen (\Rightarrow Dipol).

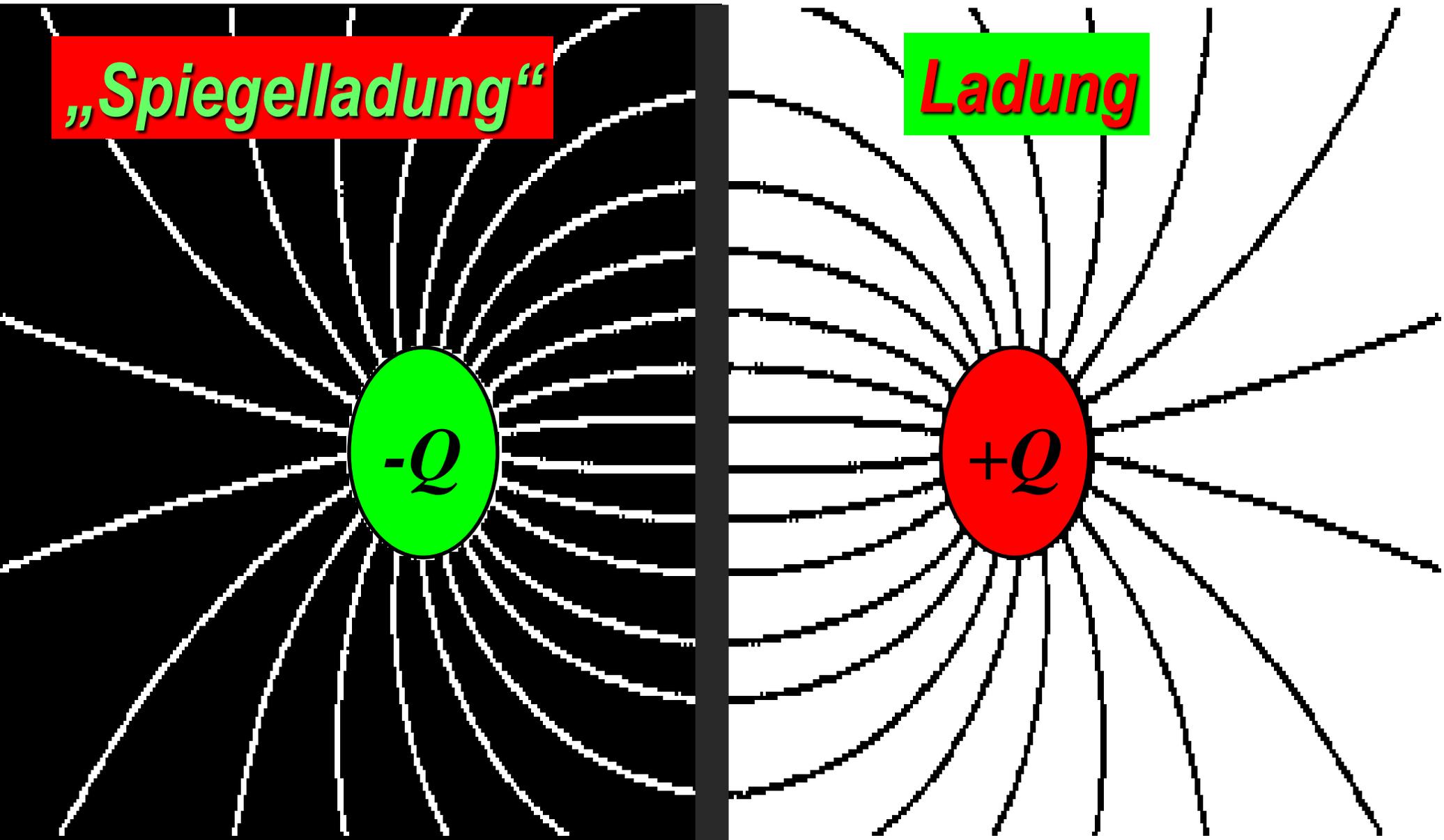


Die senkrechten Komponenten der von der Ladung $+Q$ und der gespiegelten Ladung $-Q$ an der Wand erzeugten elektrischen Felder sind:

$$E_{\perp}^{+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2 + r^2} (-\cos \alpha) \quad E_{\perp}^{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{h^2 + r^2} \cos \alpha$$



Feldlinien: Punktladung vor einer leitenden, geerdeten Wand





Das elektrische Feld einer Punktladung $+Q$ vor einer leitenden, geerdeten Kugel lässt sich analog berechnen, wobei die Lage der Spiegelladung etwas schwieriger zu bestimmen ist.

Analog zum Fall der leitenden Ebene werden auf der Kugel auch wieder Ladungen verschoben. Man kann zeigen, dass die Kugel insgesamt die Ladung $-QR/L$ erhält. Diese Ladung erhält sie aus dem „Reservoir“ der Erde.

Das Phänomen, dass eine Ladung vor einem Leiter die Ladungen in diesem Leiter verschiebt, heißt *Influenz*.

Elektrisches Feld einer Punktladung vor einer leitenden, geerdeten Kugel:

