Inhalt der Vorlesung B1

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

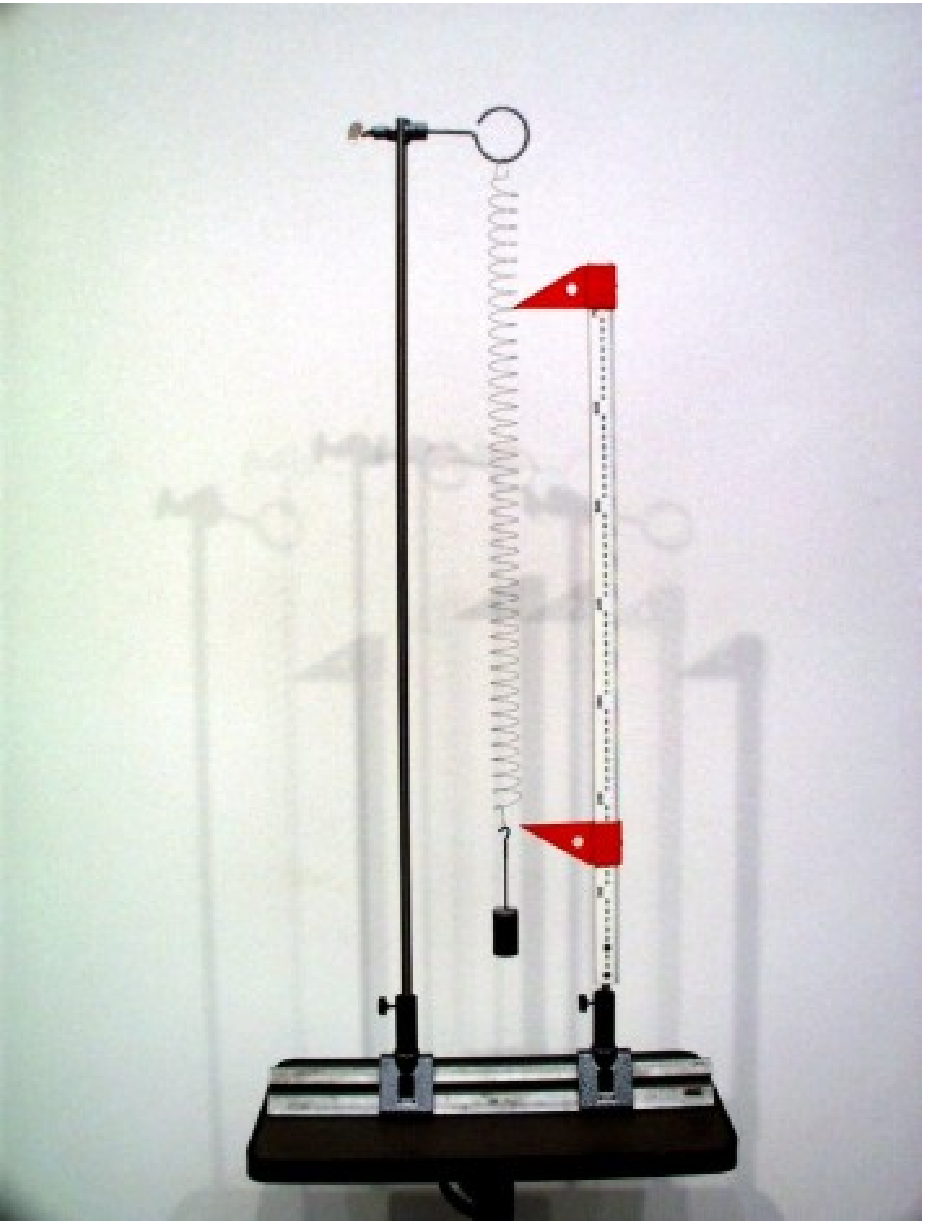
Einleitung
Ladungen & Elektrostatische Felder
Elektrischer Strom
Magnetostatik
Elektrodynamik: Die Maxwell'schen Gleichungen
Wechselstromnetzwerke
Elektromagnetische Wellen & Strahlung

5. Optik

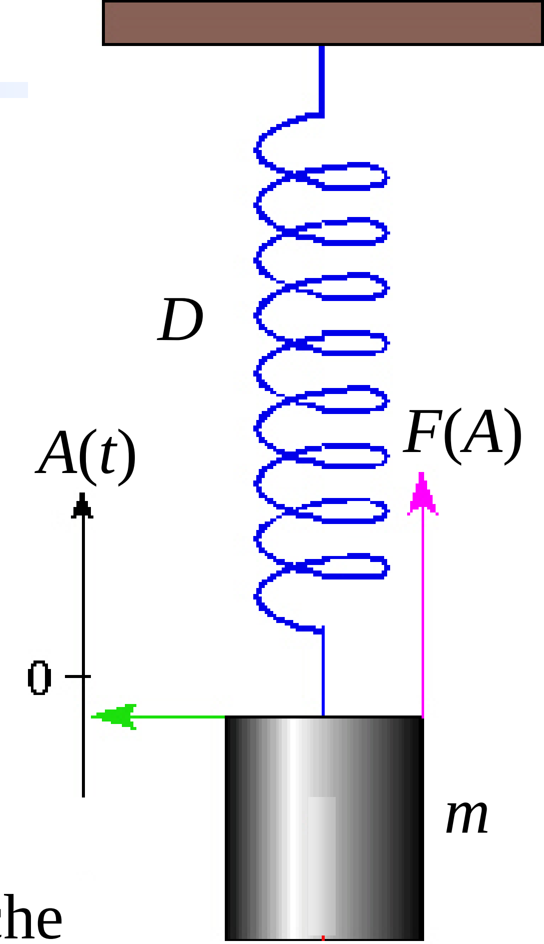
Licht als elektromagnetische Welle
Geometrische Optik
Optische Abbildungen
Wellenoptik

Elektromagnetische Wellen & Strahlung

Wiederholung: Mechanische Schwingungen



Der harmonische Oszillator war die einfachste Form einer Schwingung. Beim Federpendel ist die rücktreibende Kraft:



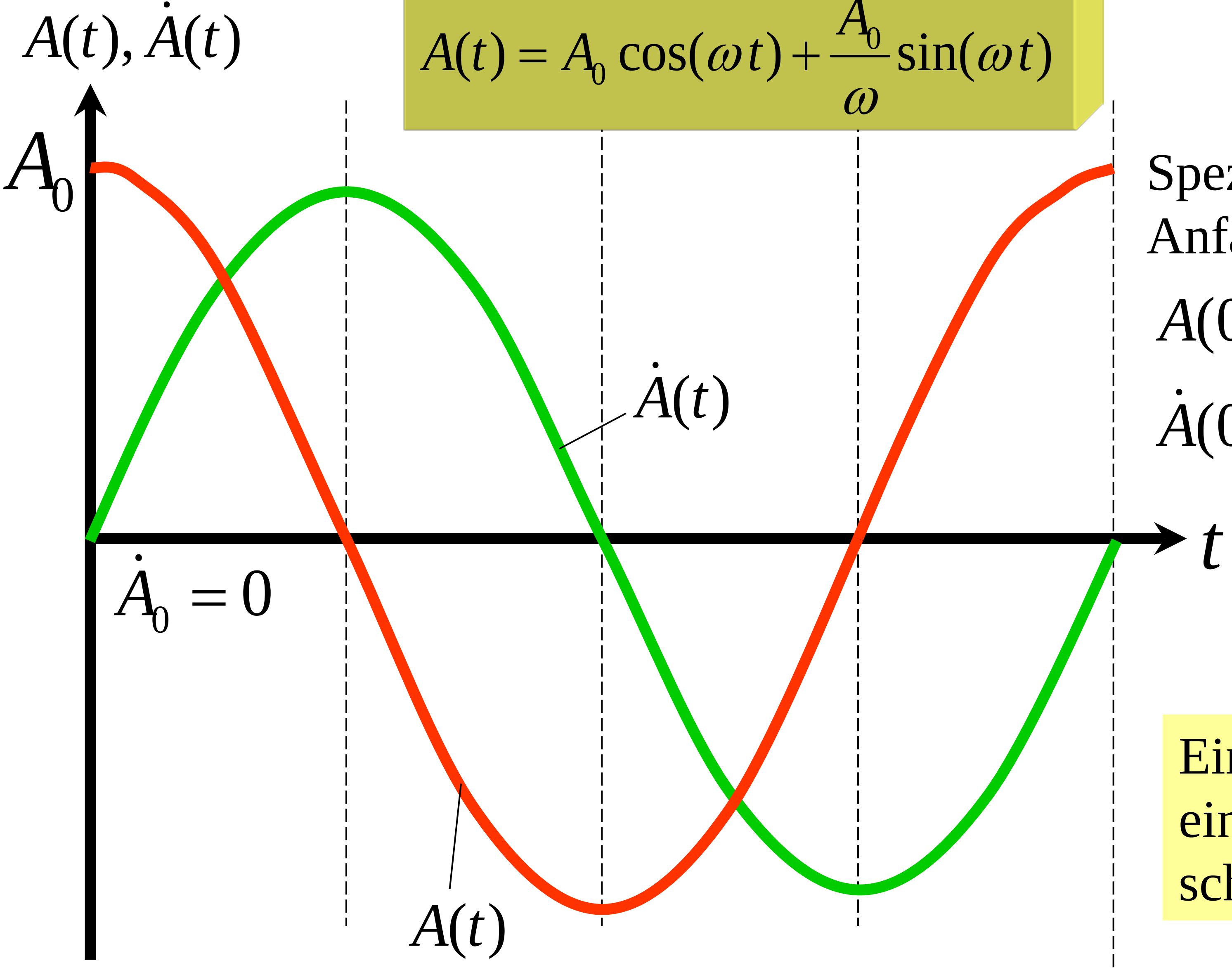
$$F(A) = -DA$$

Das zweite Newton‘sche Gesetz liefert dann die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2A(t)}{dt^2} = -DA(t) \Leftrightarrow \frac{d^2A(t)}{dt^2} + \frac{D}{m}A(t) = 0$$

bzw. kürzer geschrieben: $\ddot{A} + \frac{D}{m}A = 0$

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{A}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

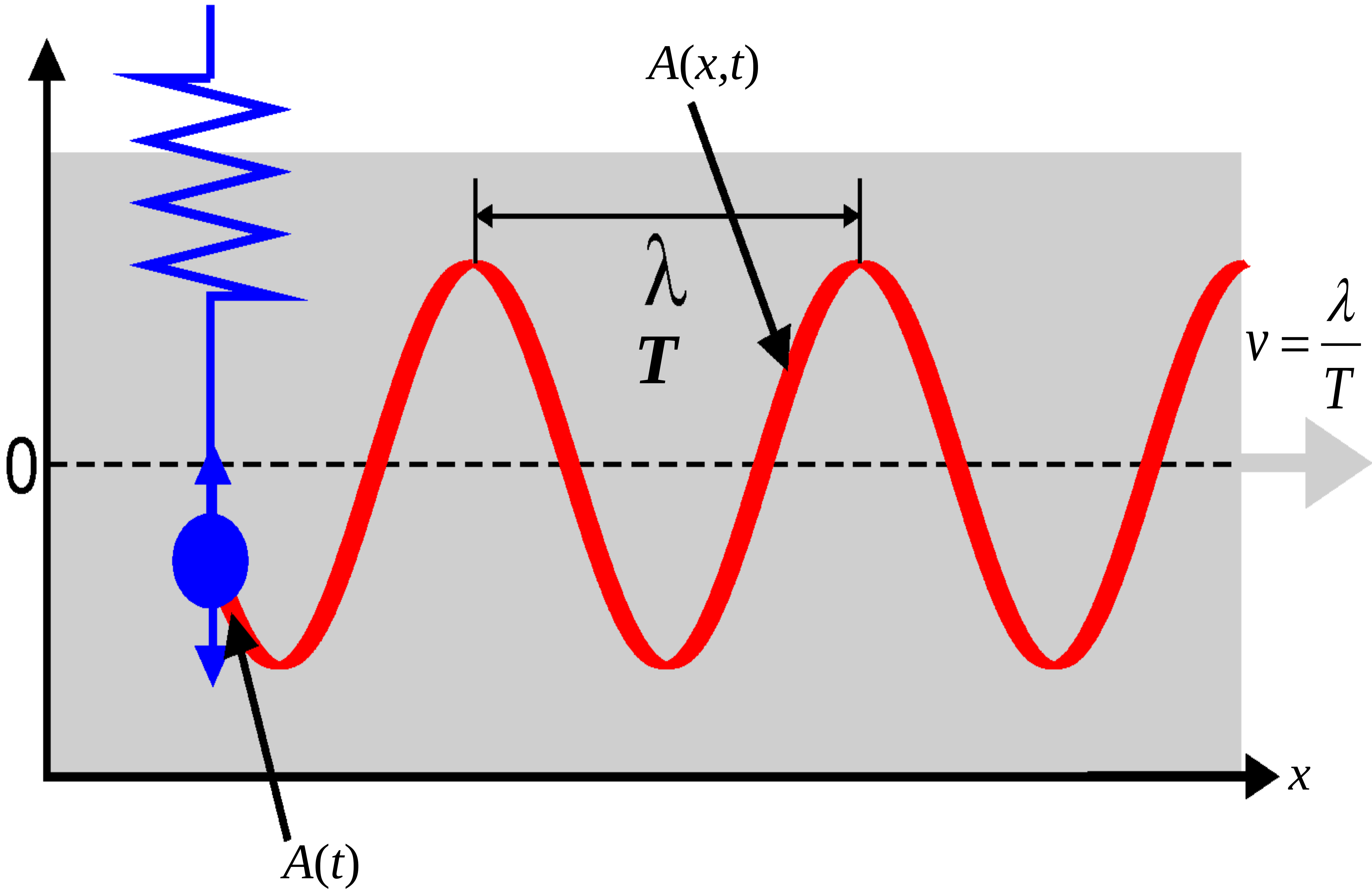


Spezielle Anfangsbedingungen:

$$A(0) = A_0$$

$$\dot{A}(0) = \dot{A}_0 = 0$$

Eine Schwingung ist ein *zeitlich* periodischer Vorgang.


A(x,t)
λ
T
0
v = λ/T
x
A(t)

Wellen - 1D Betrachtung

Eine *Welle* beschreibt einen zeitlich und räumlich periodischen Vorgang. Die „Auslenkung“ A einer Welle hängt also von zwei Variablen ab:

$$A = A(x,t)$$

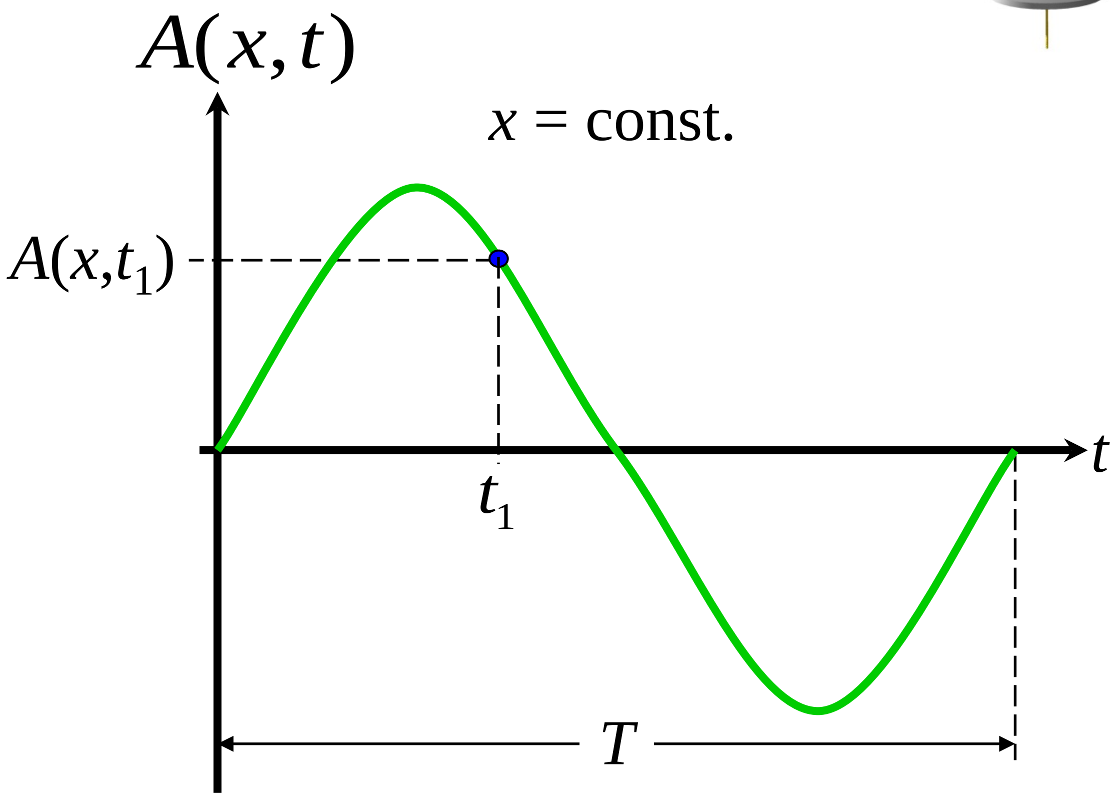
Für einen festen Ort x soll A eine Schwingungs-DGL erfüllen, also:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \omega^2 A = 0$$

Dabei ist

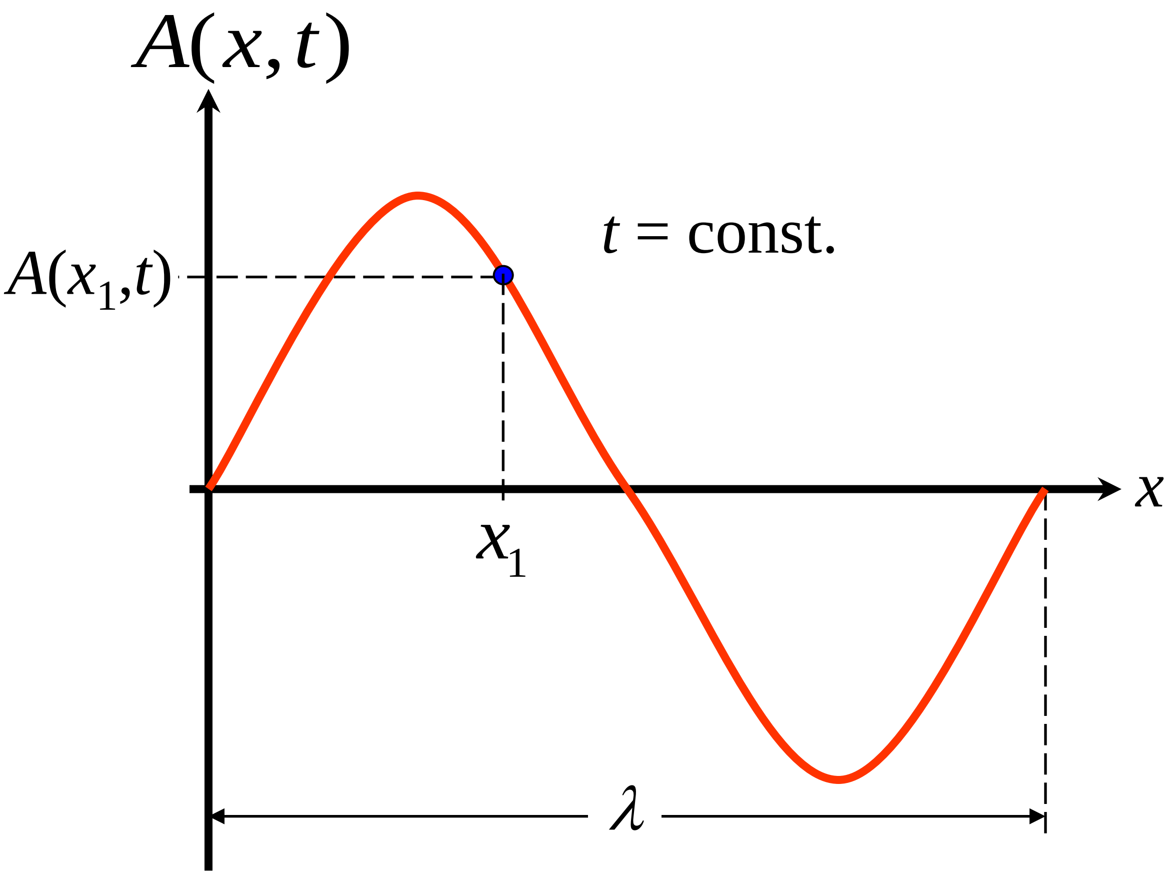
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

die (Kreis)Frequenz und T die Schwingungsdauer.



Für eine feste Zeit t soll A einen räumlich periodischen Vorgang beschreiben. Für die Variable x muß also die folgende DGL gelten:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k^2 A = 0$$



Dabei ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

die Wellenzahl mit der Wellenlänge λ, die die räumliche Periodenlänge beschreibt.

Die beiden DGLs für $A(x,t)$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k^2 A = 0$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \omega^2 A = 0$$

lassen sich zusammenfassen:

$$A = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

Wir werden später sehen, dass der Quotient $v = \omega/k$ die (Phasen) Geschwindigkeit der Welle beschreibt. Damit ergibt sich für die Auslenkung *A* die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Bemerkungen:

- Dies ist die eindimensionale Wellengleichung.
- *Jede* Lösung $A(x,t)$ der obigen DGL wird als Welle bezeichnet.
- Die Wellengleichung ist eine lineare, *partielle* DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
- Die Größe v ist hierbei die sog. „*Phasengeschwindigkeit*“ der Welle. Anschaulich gibt sie an, mit welcher Geschwindigkeit sich eine Auslenkung bewegt. Dies ist zu unterscheiden von der sog. „*Gruppengeschwindigkeit*“ einer Welle, die die Geschwindigkeit der räumlichen Ausbreitung beschreibt.
- In einer Welle findet kein Materie- sondern Energietransport statt.

Wellen - 3D Betrachtung

Die „Auslenkung“ A einer Welle hängt jetzt von den drei räumlichen Koordinaten und der Zeit ab: $A = A(x, y, z, t) = A(\vec{r}, t)$

Wenn die gleiche Überlegung wie im 1D Fall in allen drei Raumrichtungen durchgeführt wird, dann ergibt sich als Wellengleichung für eine sich zeitlich und räumlich periodisch ausbreitende Auslenkung:

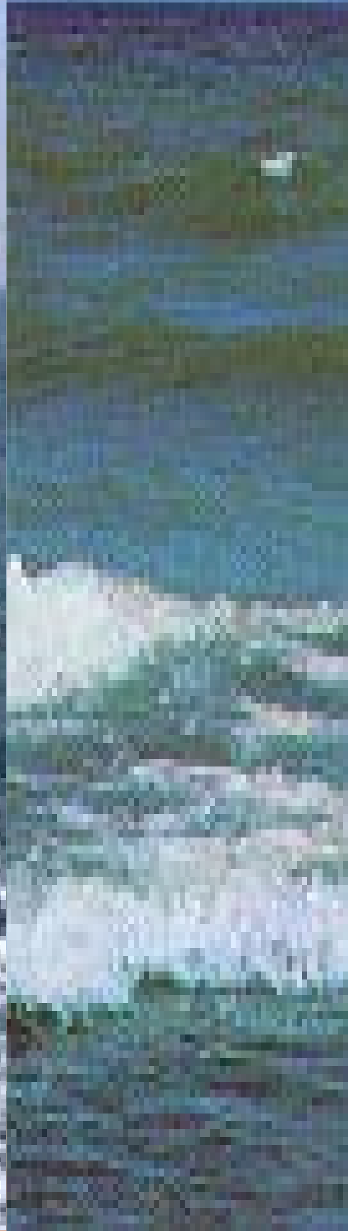
$$\frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

Dies läßt sich mit dem Laplace-Operator zusammenfassen zu:

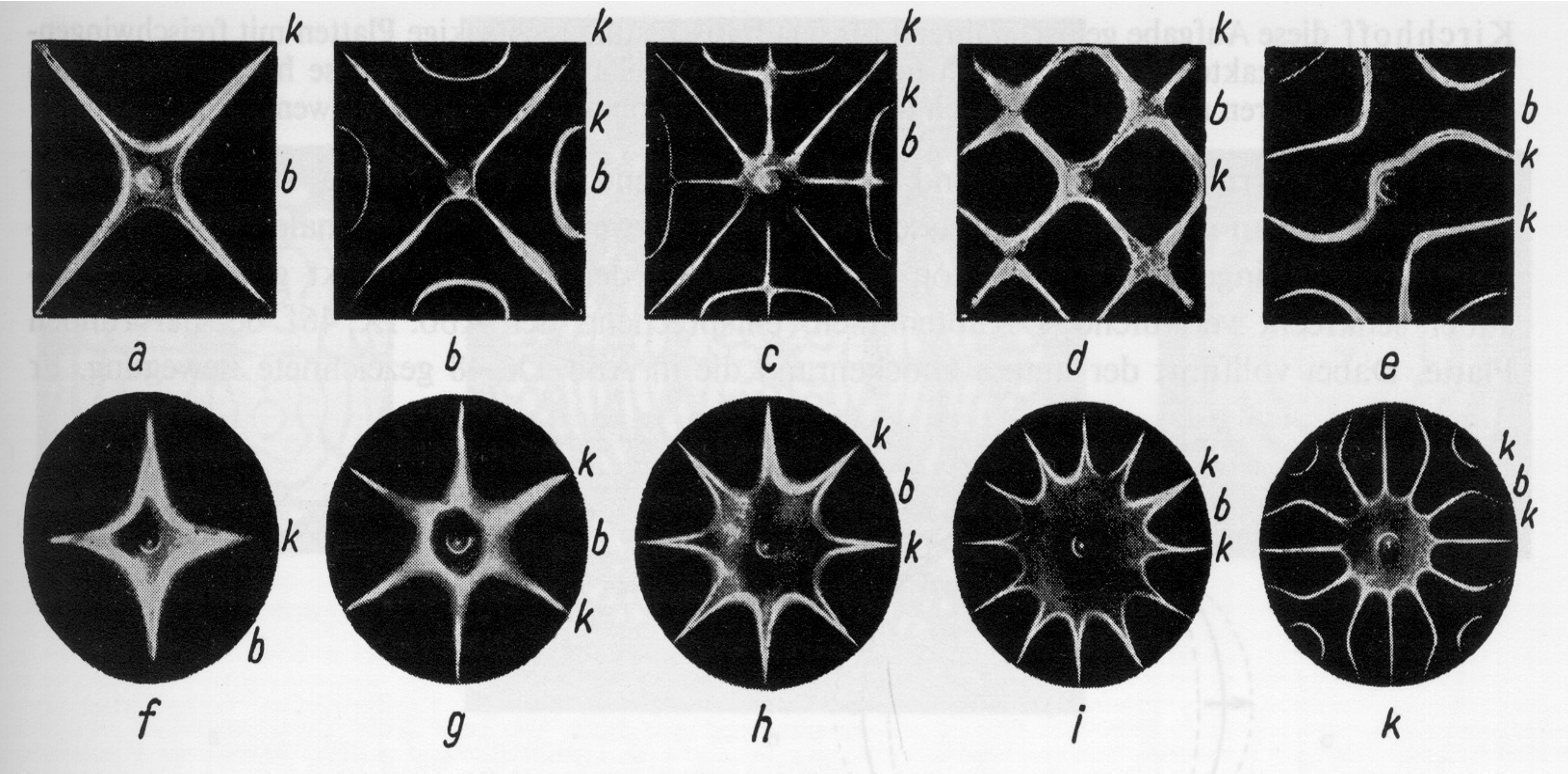
$$\boxed{\Delta A(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0}$$

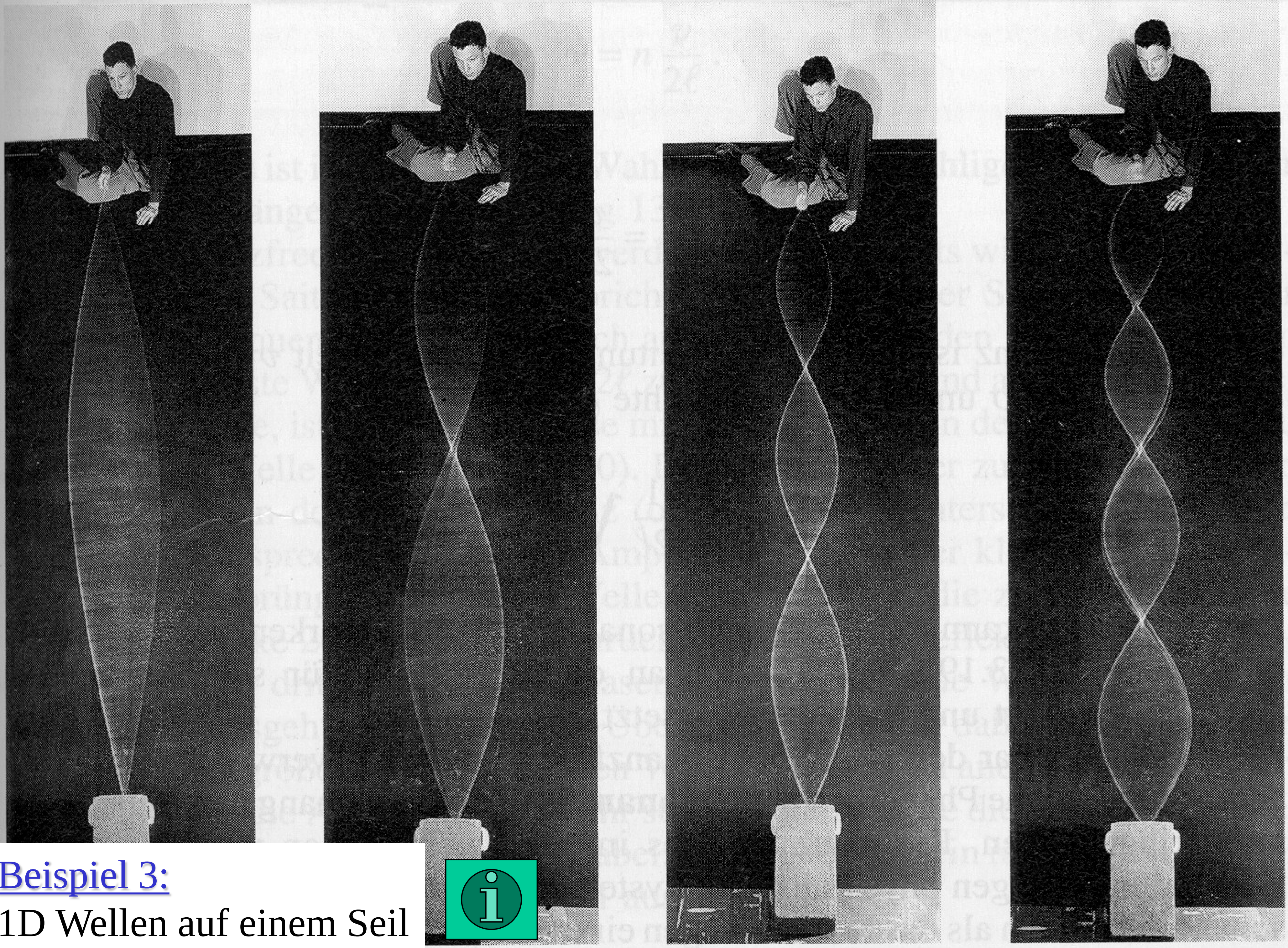
Dabei ist v der Betrag der 3D Phasengeschwindigkeit.

Beispiel 1: Wellen auf Wasseroberflächen



Beispiel 2: 2D Wellen auf Membranen

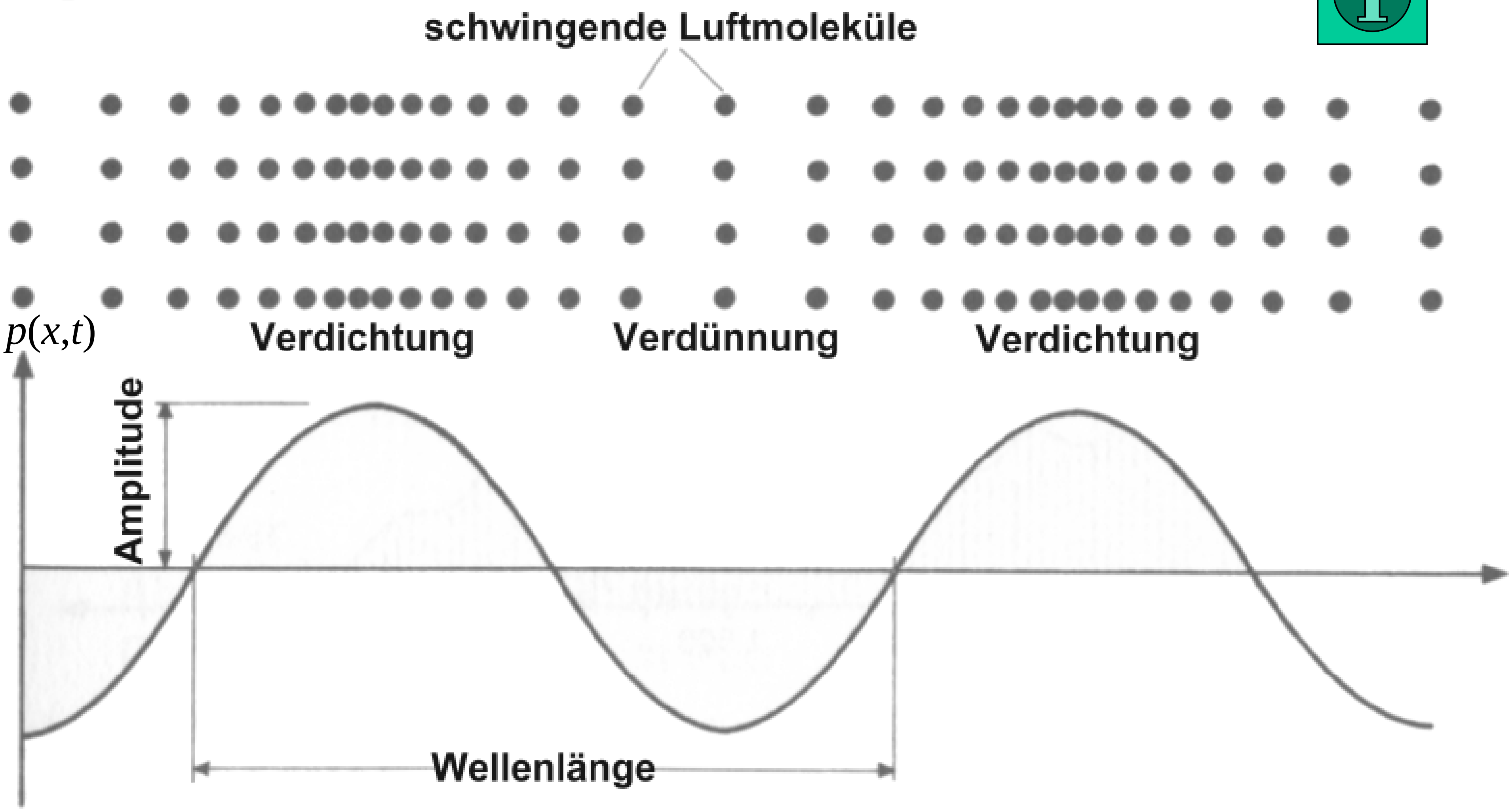




Beispiel 3:

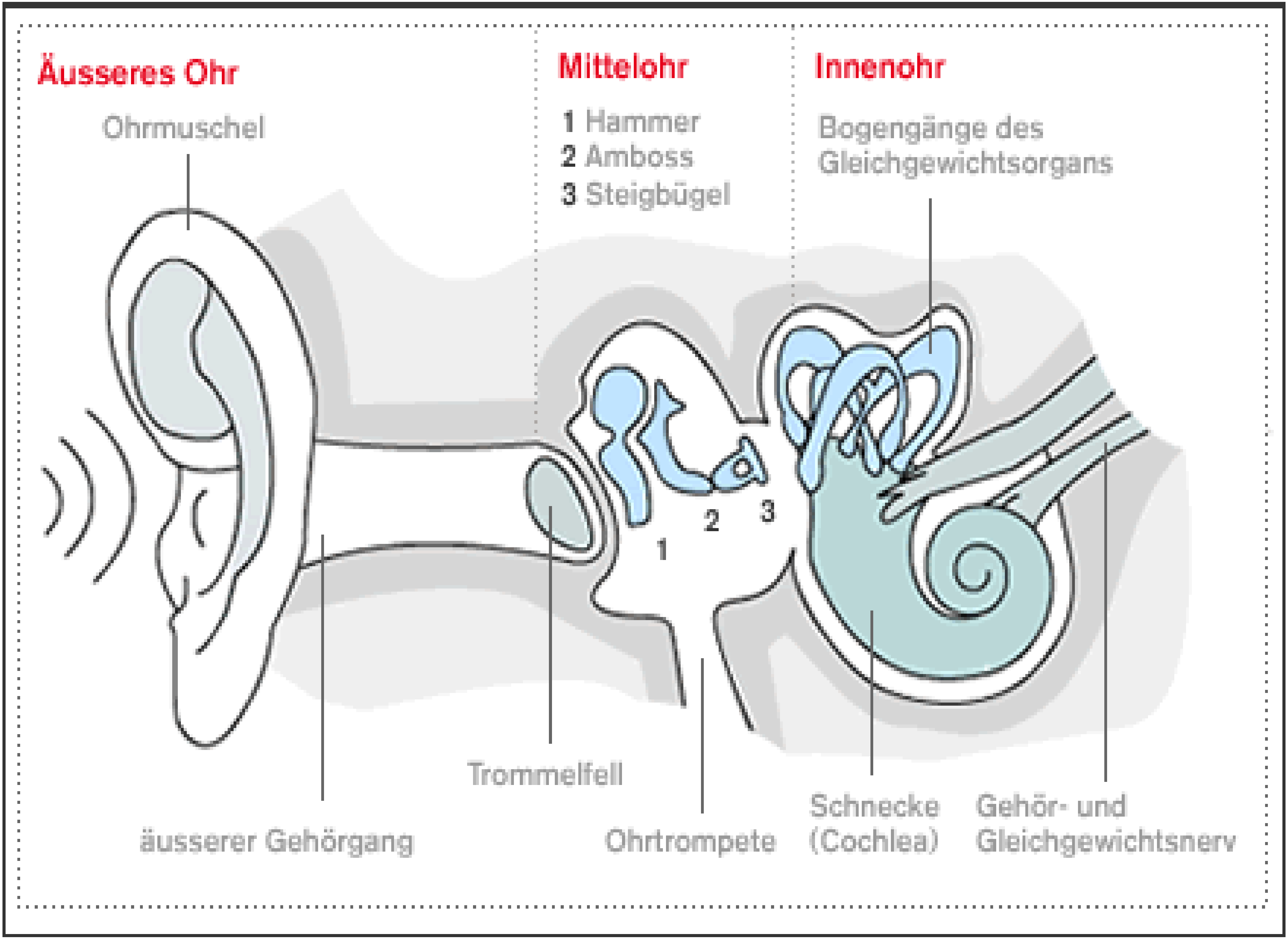
1D Wellen auf einem Seil

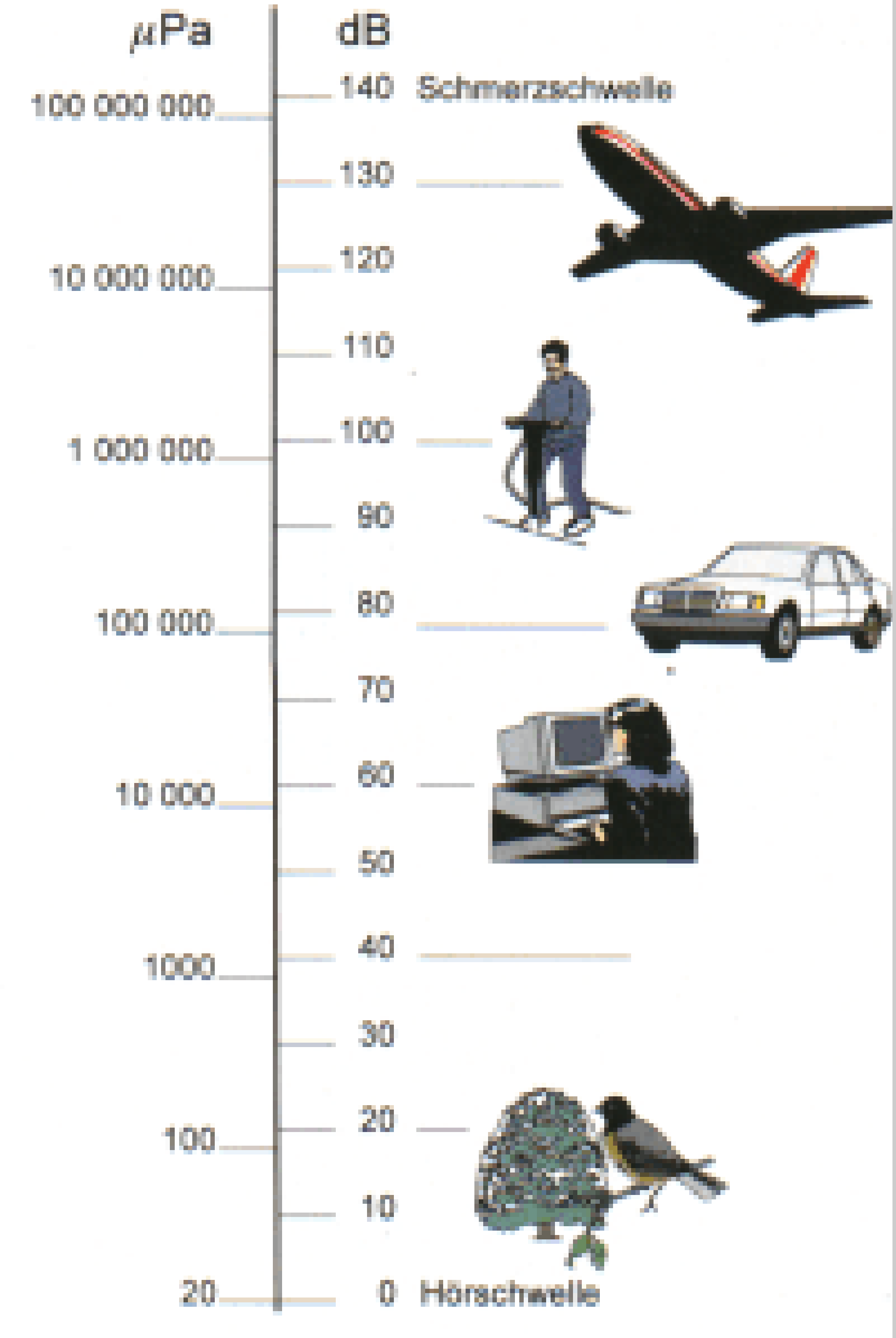
Beispiel 4: Schallwellen



$\Rightarrow$ Schallwellen sind longitudinale Druckschwankungen der Luft:

$$p(x,t) = p_{\text{Luft}} + p_0 \cos(kx - \omega t), \quad c_{\text{Schall}} = \omega / k$$


Äusseres Ohr
Ohrmuschel
Mittelohr
1 Hammer
2 Amboss
3 Steigbügel
Innenohr
Bogengänge des
Gleichgewichtsorgans
1
2
3
Trommelfell
äusserer Gehörgang
Ohrtrompete
Schnecke
(Cochlea)
Gehör- und
Gleichgewichtsnerv



Schallpegel

170 dB	Raketenstart
160 dB	Sturmgewehr (Spitzenwert)
150 dB	Start Überschallflugzeug
140 dB	Start Düsenflugzeug
130 dB	Schmerzschwelle
120 dB	Start Propellerflugzeug
110 dB	Presslufthammer
100 dB	Motorkettensäge
90 dB	Diskothek
80 dB	Fräsmaschine
70 dB	Strassenverkehr
60 dB	Unterhaltung
50 dB	Büro
40 dB	Wohnzimmer
30 dB	Leseraum
20 dB	Schlafzimmer
10 dB	Radiostudio
0 dB	Hörschwelle

Schallgeschwindigkeit in Luft: $c_{\text{Schall}} = 340$ m/s

Lichtgeschwindigkeit: $c_{\text{Licht}} = 300000000$ m/s

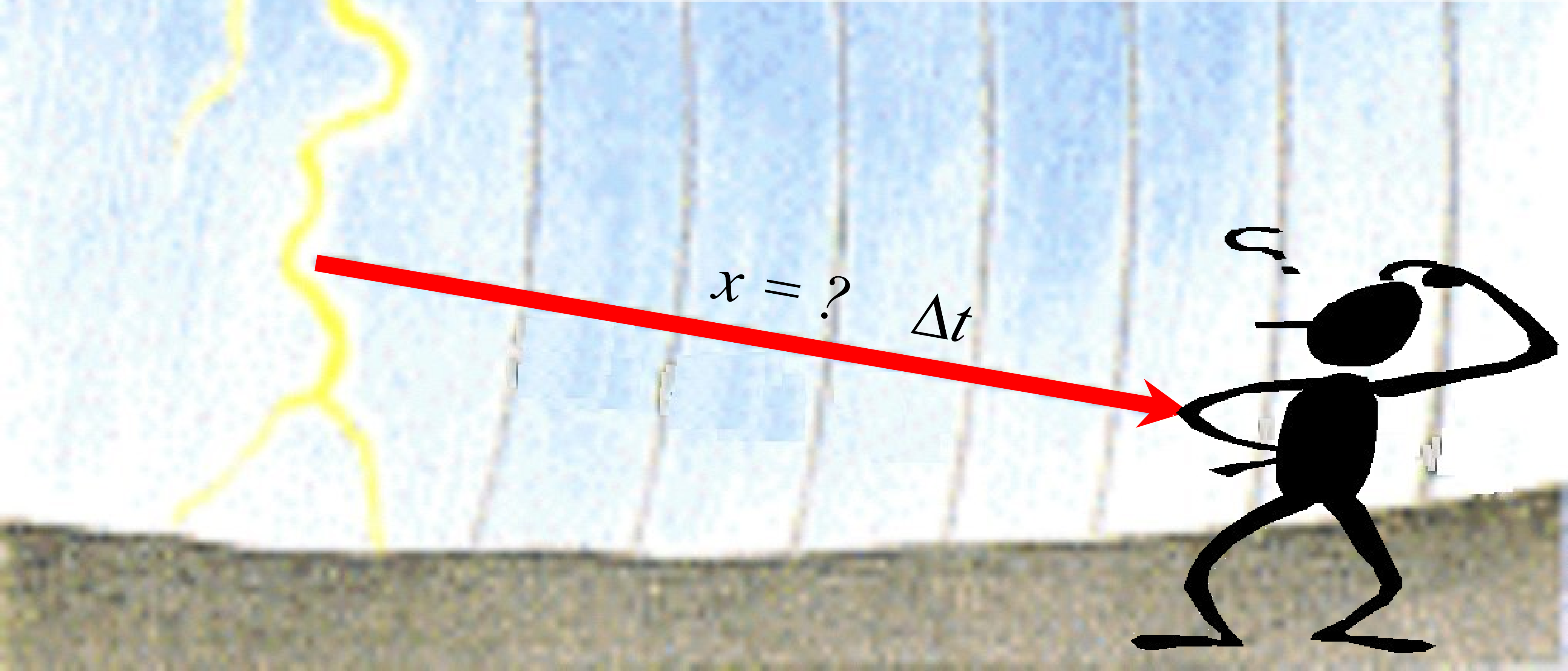
$$\Rightarrow \quad c_{\text{Licht}} >> c_{\text{Schall}}$$

Entfernung x eines Gewitters:

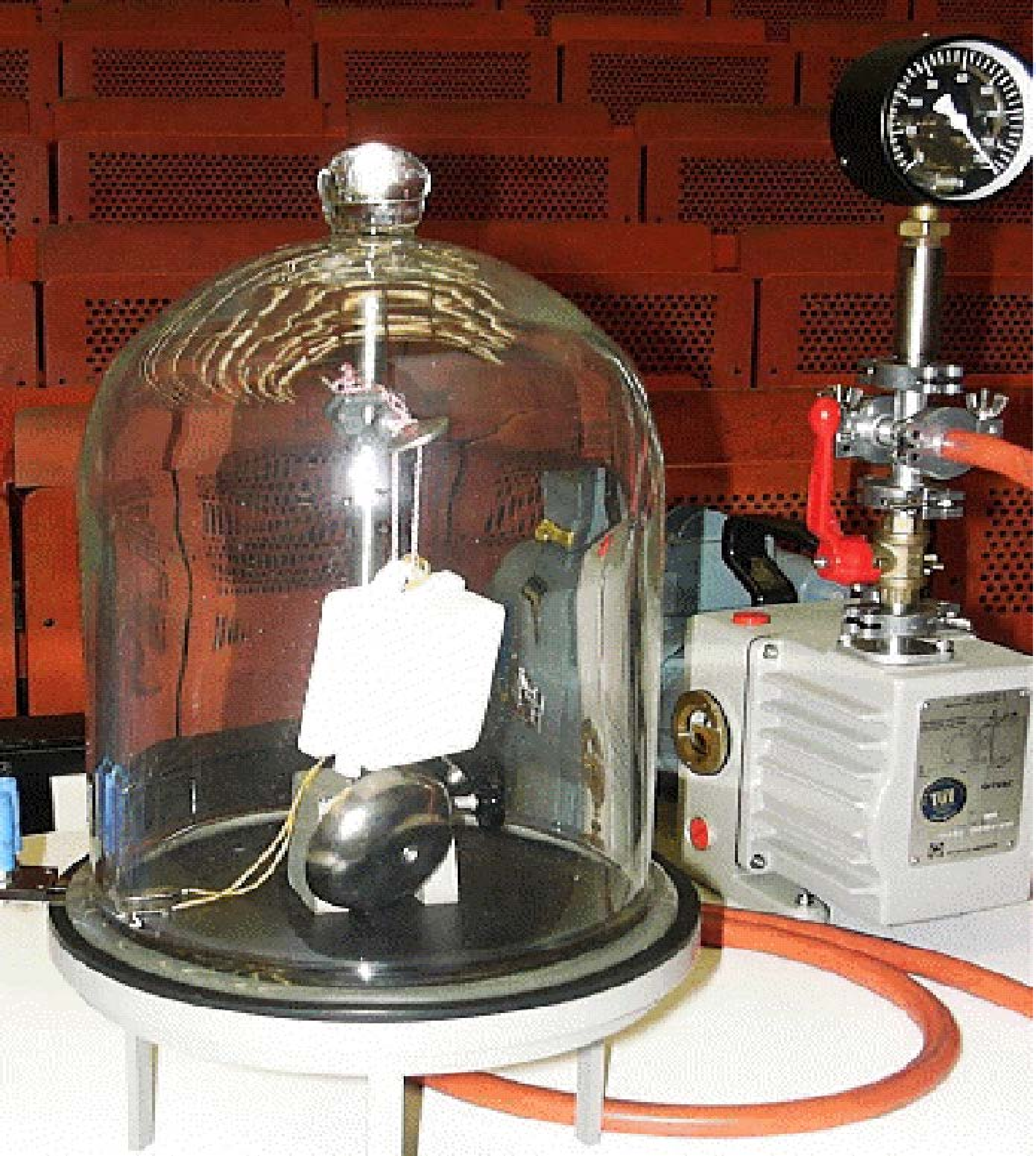
$$x \approx c_{\text{Schall}} \cdot \Delta t \qquad c_{\text{Schall}} \cdot 3 \approx 1 \text{ km/s}$$

$$x\,[\text{km}] \approx \Delta t\,[\text{s}] / 3$$

Dabei ist Δt die Zeit zwischen dem Sehen des Blitzes und dem Hören des Donners.



Schallgeschwindigkeit in unterschiedlichen Medien	Dichte ϱ in $\frac{kg}{m^3}$	Schallgeschwindigkeit c in $\frac{m}{s}$
Luft – 20 °C trocken	1,396	319
Luft 0 °C trocken	1,293	331
Luft 20 °C trocken	1,21	344
Luft 100 °C trocken	0,947	387
Wasserstoff 0 °C	0,090	1260
Wasserdampf 130 °C	0,54	450
Wasser 0 °C	1000	1400
20 °C	998	1480
Glyzerin	1260	1950
Eis	920	3200
Holz	600	4500
Glas	2500	5300
Beton	2100	4000
Stahl	7700	5050

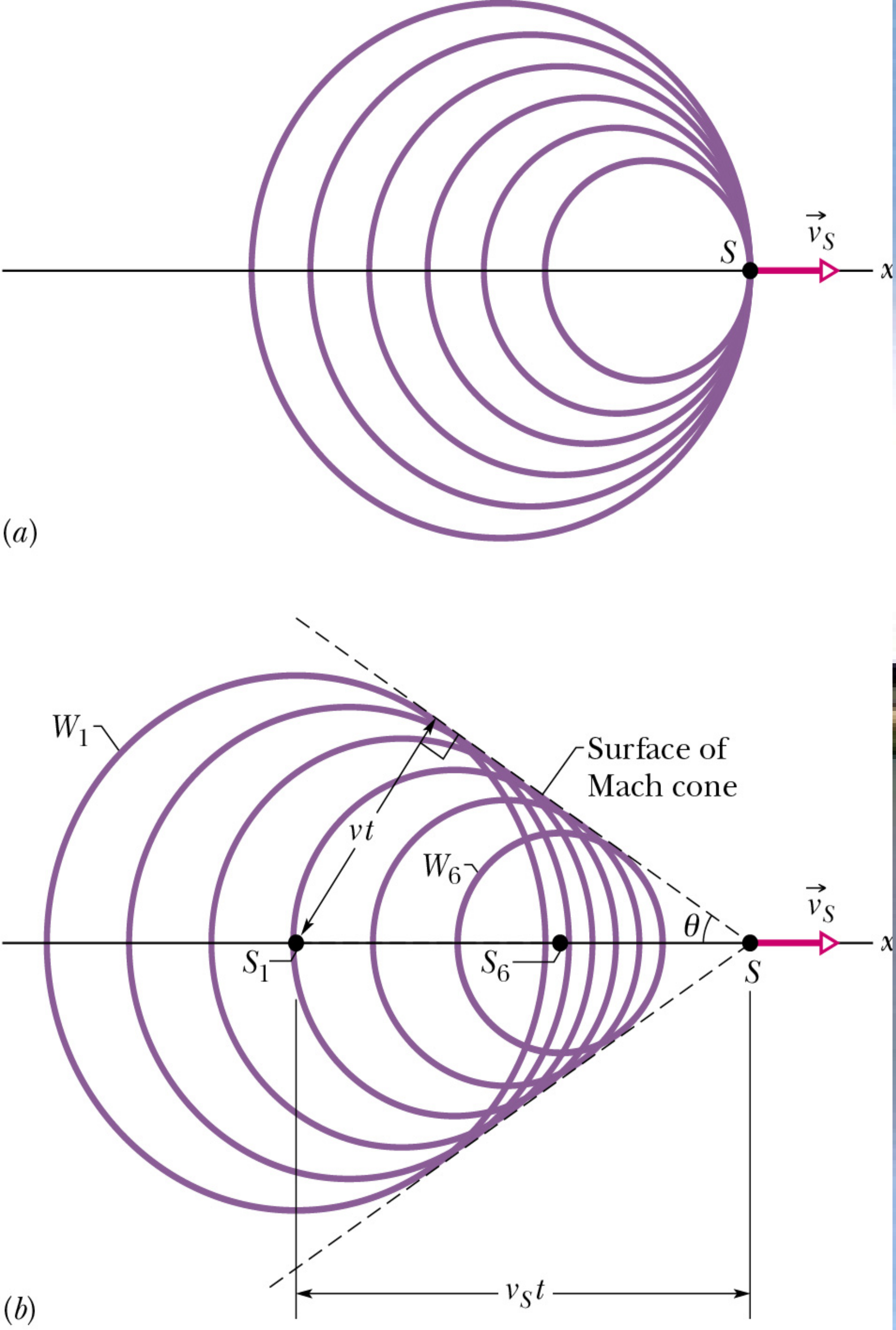


Versuch 1: Klingel unter Vakuum.

Wenn die Luft aus der Glocke gepumpt wird, dann ist die Klingel nicht mehr zu hören.

$\Rightarrow$ Bei einer *mechanischen* Welle wird ein Medium zur Übertragung benötigt.

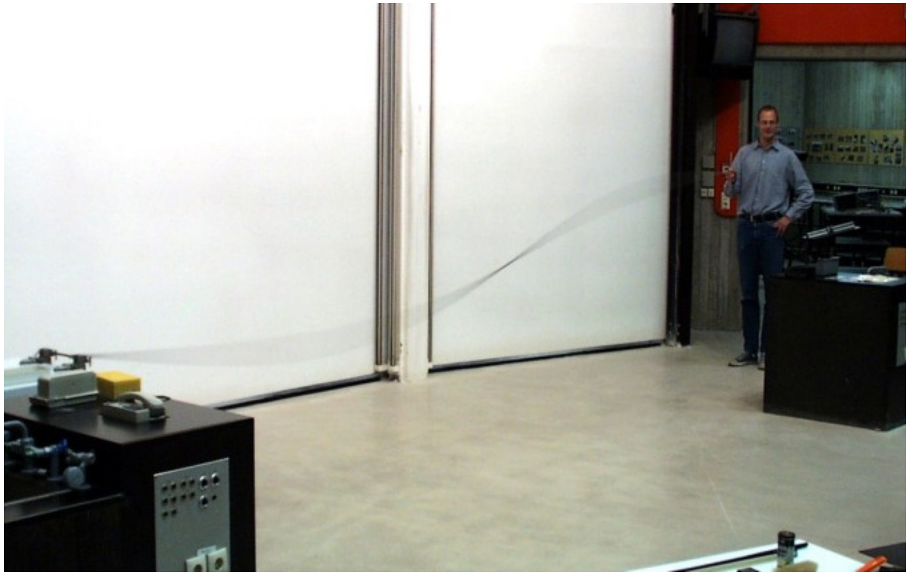
Die „Schallmauer“



Versuch 2: Transversale Federwelle

1/2-Welle

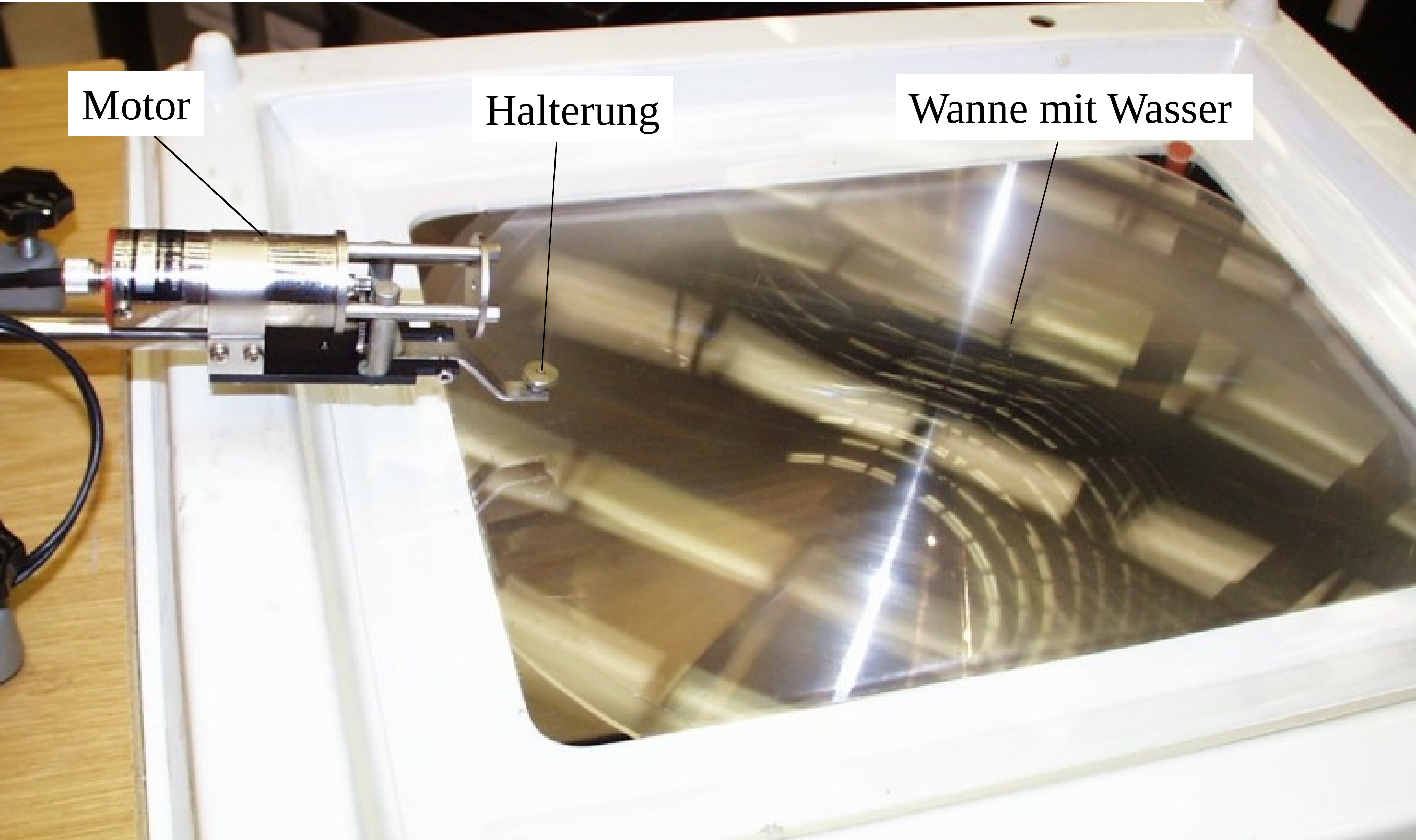
3/2-Welle



2/2-Welle

4/2-Welle

Versuch 3: Wanne zur Erzeugung von Wasserwellen



An die Halterung werden verschiedene Wellenerreger befestigt, mit denen sich z.B. Kreiswellen und ebene Wellen erzeugen lassen.

Einfache Lösungen der Wellengleichung

Die einfachste Lösung der 1D Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

ist eine monochromatische harmonische Welle:

$$A(x,t) = A_0 \cos\left(kx - \omega t\right)$$

$$\text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Dabei wird der Ausdruck $(kx - \omega t)$ als die *Phase* der Welle bezeichnet.

Durch Einsetzen zeigt man leicht, dass dies eine Lösung ist:

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A_0 \cos\left(kx - \omega t\right)$$

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A_0 \cos\left(kx - \omega t\right)$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right) A_0 \cos\left(kx - \omega t\right) = 0$$

$$\Rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

Hier ist v ist die Phasengeschwindigkeit, wie man folgendermaßen sieht.

Für Werte konstanter Phase gilt:

$$k x - \omega t = const.$$

An zwei Punkten (x_1,t_1) und (x_2,t_2) mit gleicher Phase ist dann:

$$k x_1 - \omega t_1 = const.$$

$$k x_2 - \omega t_2 = const.$$

$$\Rightarrow k(x_1 - x_2) - \omega(t_1 - t_2) = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

Hier soll auch gleich wieder an die komplexe Schreibweise erinnert werden. Deswegen wird auch die Funktion

$$A(x,t) = A_0 \exp\left(i(k x - \omega t)\right)$$

$$\text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

als Welle bezeichnet. Physikalisch sinnvoll ist natürlich wieder nur der Realteil:

$$A(x,t) = \mathrm{Re}\left(A_0 \exp\left(i(k x - \omega t)\right)\right)$$

$$= A_0 \cos\left(k x - \omega t\right)$$

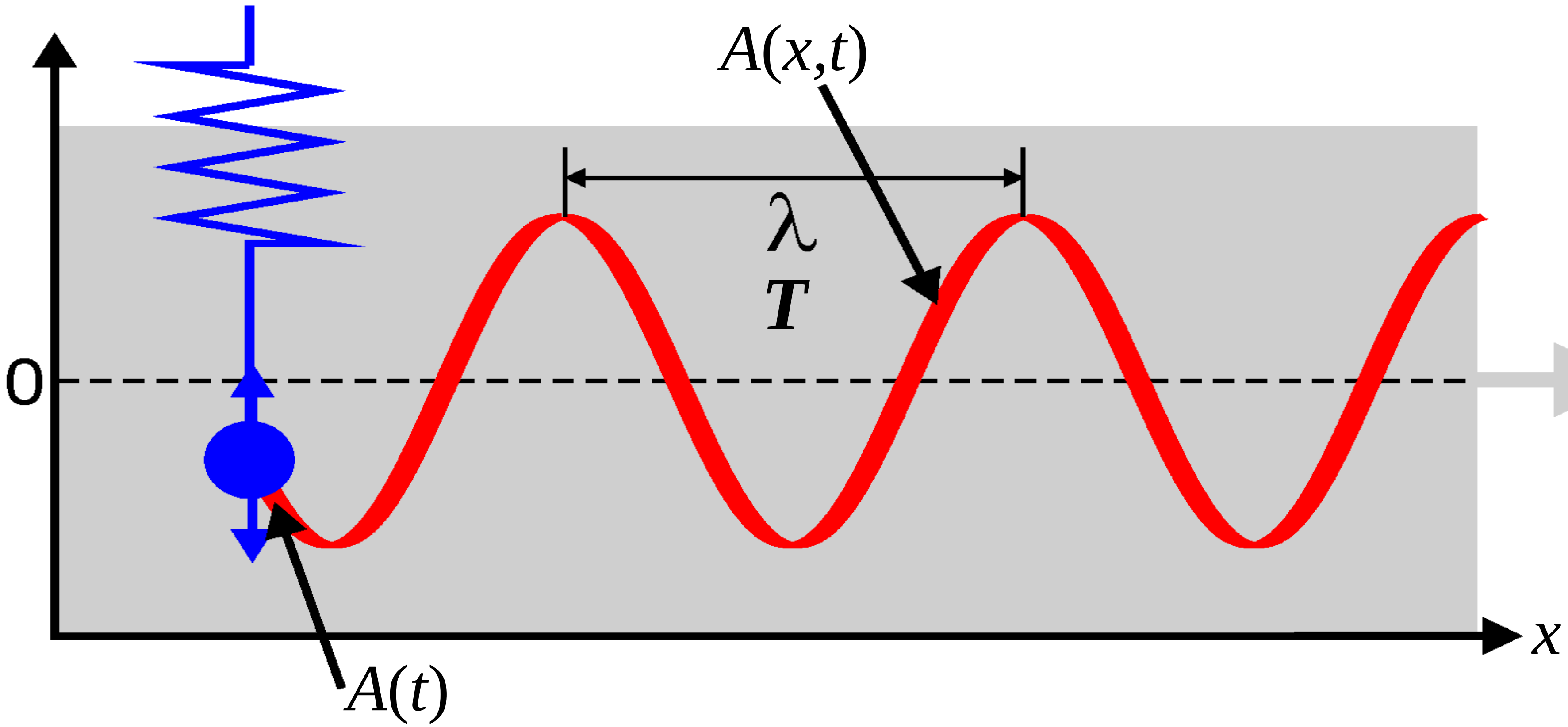
Dies ist nicht die einzige Lösung der 1D Wellengleichung. Beispielsweise wäre auch

$$A(x,t) = A_0 \sin\left(k x - \omega t\right)$$

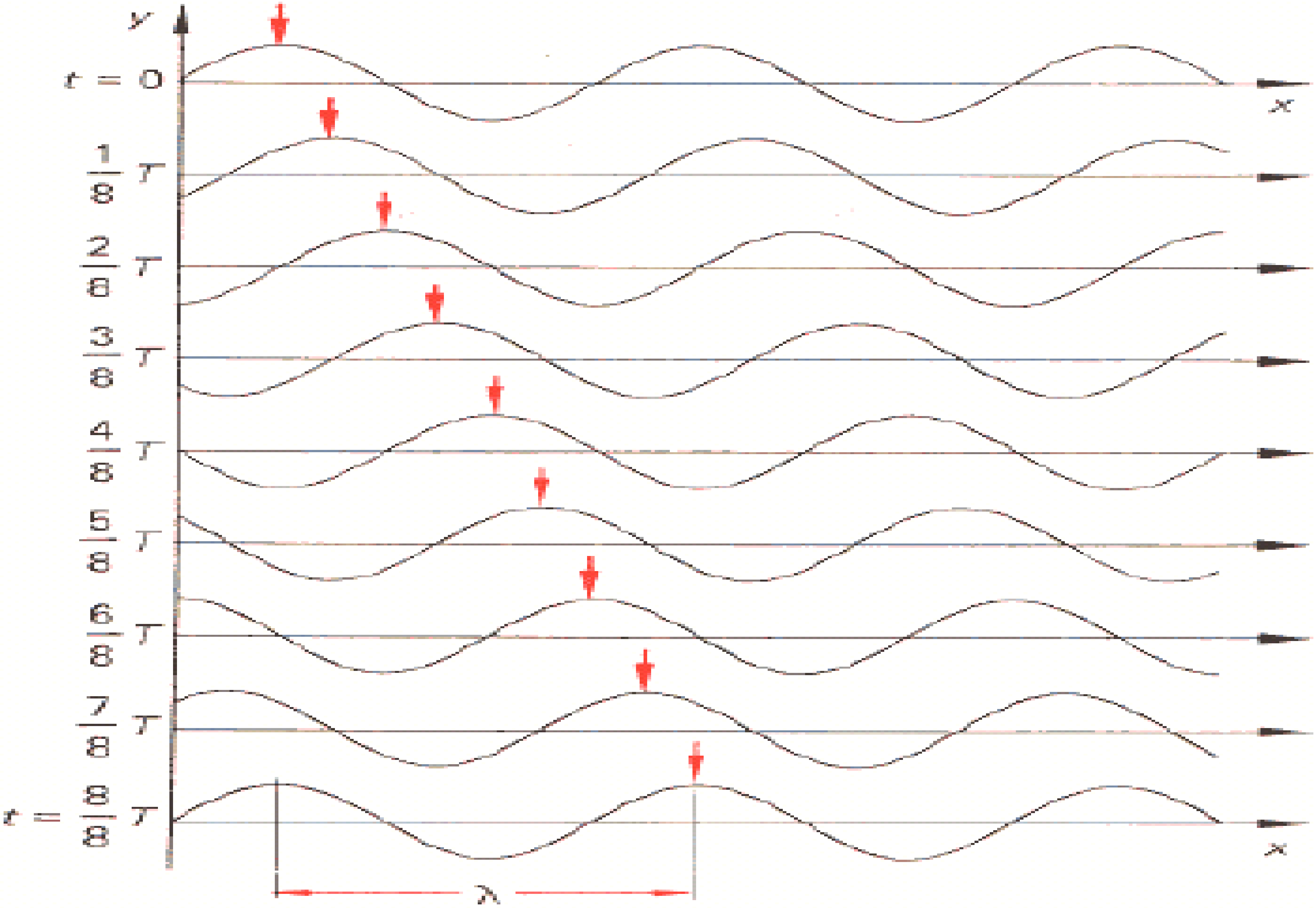
eine Lösung. Die Wellengleichung hat viele Lösungen. Dies wird später diskutiert.

Der Zusammenhang der Phasengeschwindigkeit *v* einer Welle und ihrer Wellenlänge und Frequenz ergibt sich einfach aus der Darstellung mit der Wellenzahl *k* und der Kreisfrequenz *ω* zu:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad v = \lambda f$$



$$v = \frac{\lambda}{T}$$



y
t = 0
x
1/8 T
2/8 T
3/8 T
4/8 T
5/8 T
6/8 T
7/8 T
t = 8/8 T
x
λ

Dies läßt sich einfach für 3D Wellen verallgemeinern. Dann ist eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta A(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

die ebene, monochromatische, harmonische Welle der Form:

$$A(\vec{r},t) = A_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

$$\text{mit } \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Dabei ist der Ausdruck $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ wieder die *Phase* der Welle.

Jetzt ist:

$$\Delta A(\vec{r},t) = -k^2 A_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

$$\text{mit} \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right) A_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) = 0$$

$$\Rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

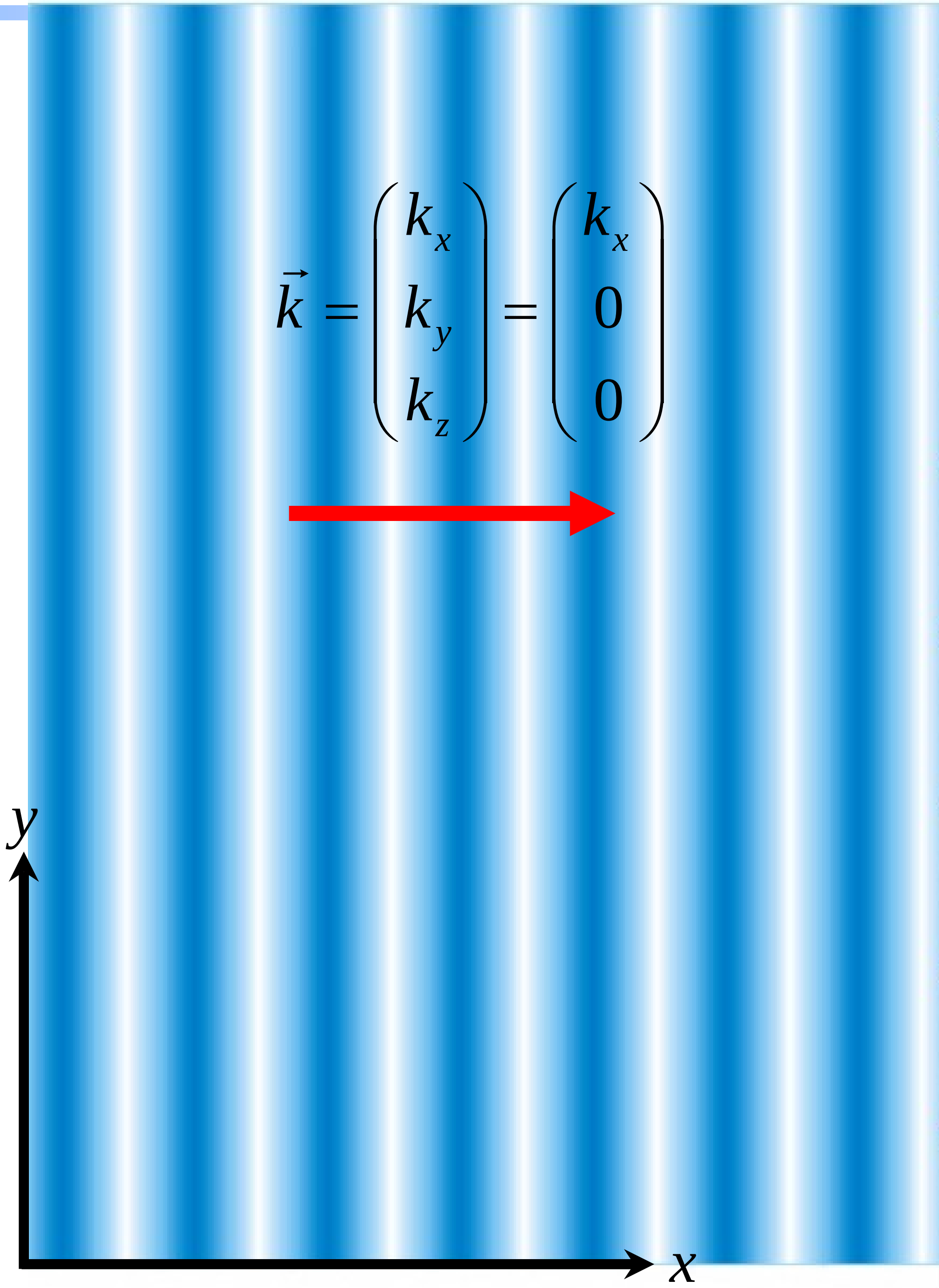
$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

Eine ebene Welle der Form

$$A(\vec{r},t) = A_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

kann durch das Bild rechts veranschaulicht werden. Die Ausbreitungsrichtung der Welle ist durch den Vektor $\vec{k}$ gegeben. Dieser Vektor steht senkrecht auf den Wellenfronten.

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_x x$$



$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Komplexe Schreibweise:

$$A(\vec{r},t) = A_0 \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\right)$$

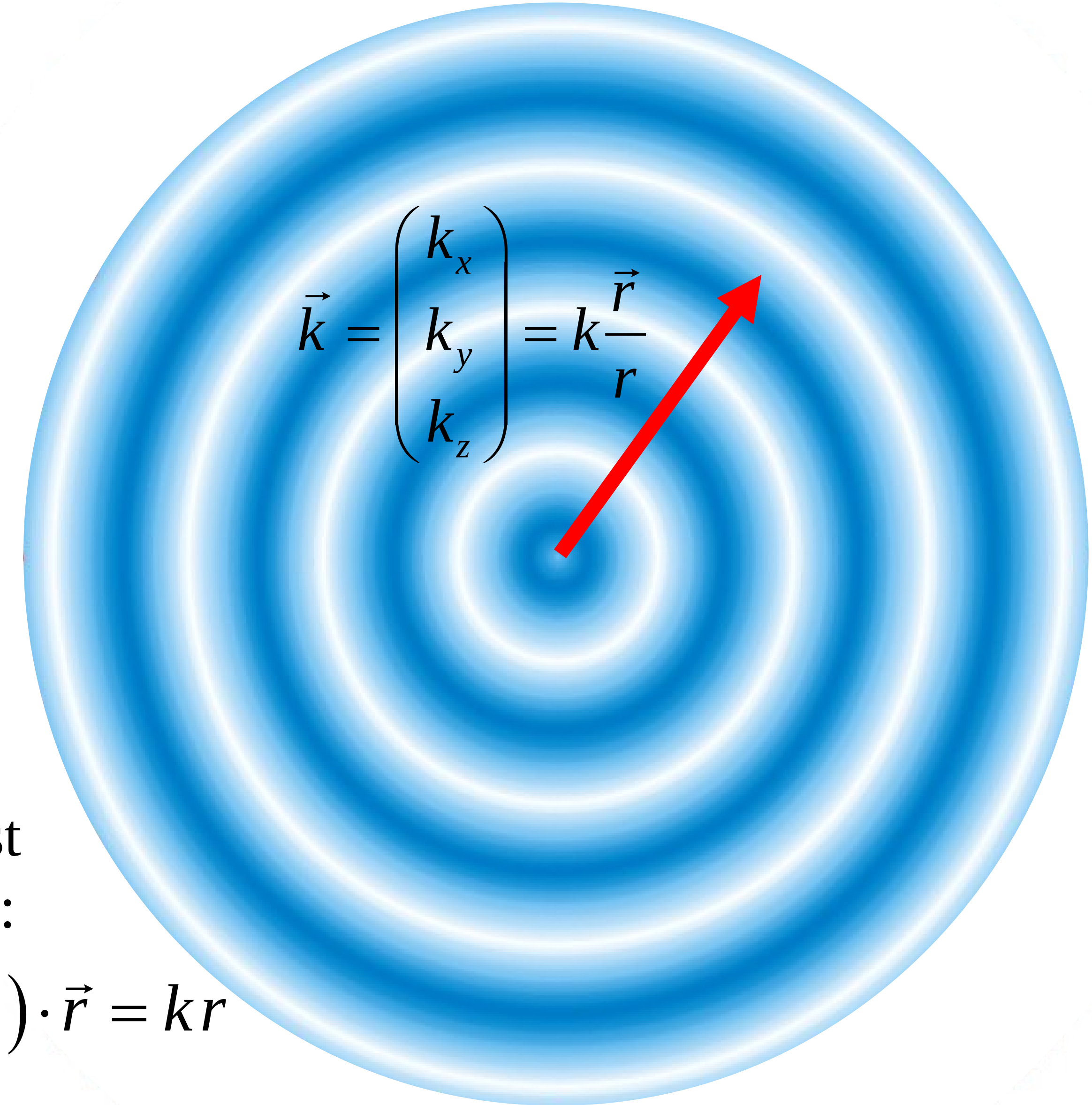
Eine Kugelwelle ist beispielsweise durch

$$A(\vec{r},t) = \frac{A_0}{r}\cos\left(kr - \omega t\right)$$

gegeben. Mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

kann man leicht zeigen, dass diese Funktion die Wellengleichung erfüllt.



$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = k\frac{\vec{r}}{r}$$

Die Ausbreitungsrichtung ist nun radial nach Außen, also:

$$\vec{k} = k\,\vec{r}/r \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = \left(k\,\vec{r}/r\right)\cdot\vec{r} = kr$$

Komplexe Schreibweise: $A(\vec{r},t) = \dfrac{A_0}{r}\exp\left(i(kr - \omega t)\right)$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung

Wir wollen nun eine allgemeine Lösung der 1D Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

bestimmen. Dafür setzen wir an:

$$A(x,t) = f_-\left(kx - \omega t\right)$$

mit einer beliebigen Funktion f_- .

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt mit $u = kx - \omega t$:

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}k \Rightarrow \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}k^2$$

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}(-\omega) \Rightarrow \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}\omega^2$$

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) = 0 \Rightarrow k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion $f_-(kx - \omega t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist. Genauso zeigt man, dass die Funktion $f_+(kx + \omega t)$ auch eine Lösung der Wellengleichung ist. Da die Wellengleichung linear ist, ergibt sich als allgemeinere Lösung

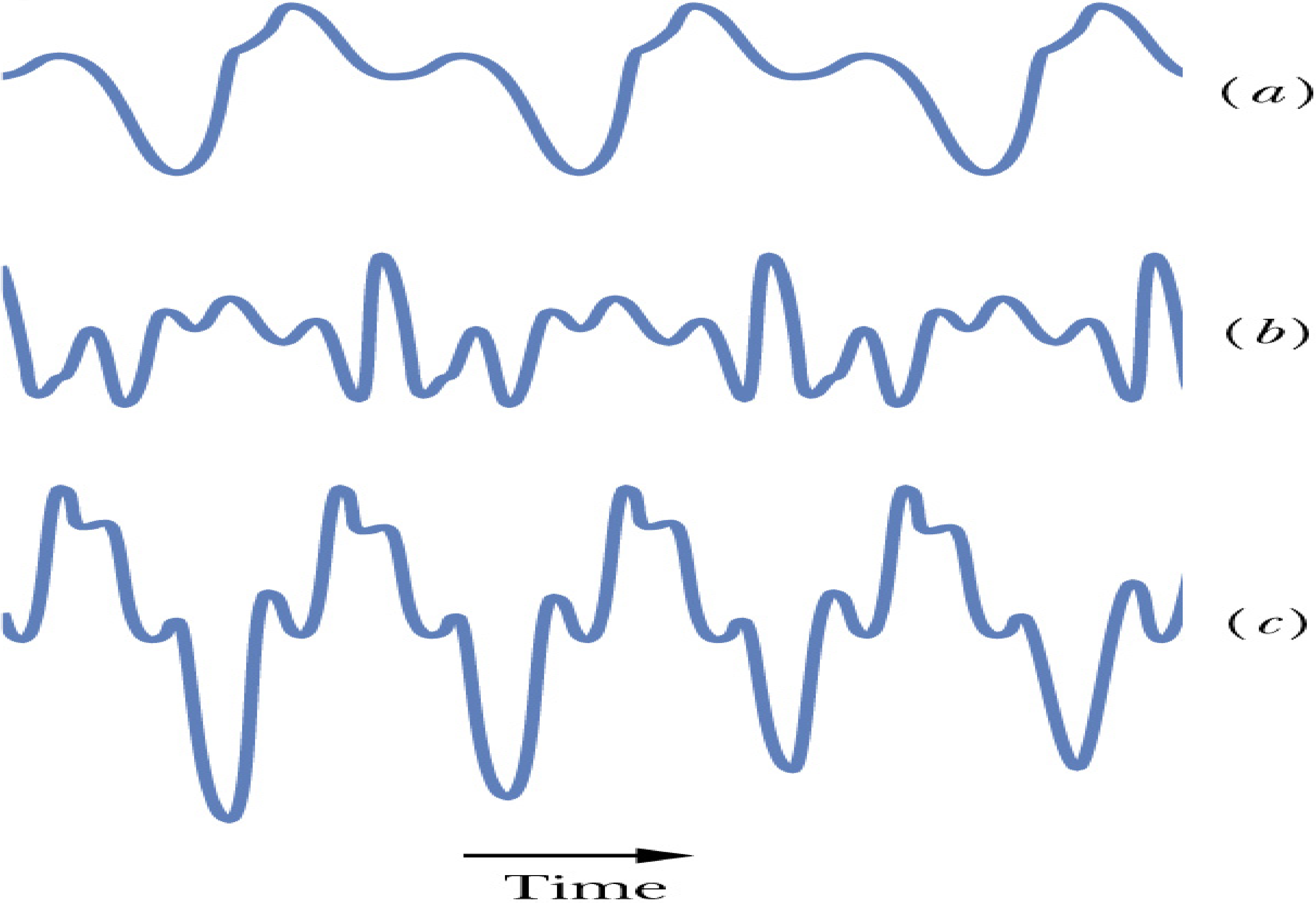
$$\boxed{A(x,t) = f_-\left(kx - \omega t\right) + f_+\left(kx + \omega t\right)}$$

mit zwei beliebigen Funktionen f_- und f_+.

Dieses Resultat läßt sich wieder einfach auf 3D verallgemeinern. Dann lautet die allgemeine Lösung der 3D Wellengleichung:

$$A(\vec{r},t) = f_-\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) + f_+\left(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t\right)$$

Beispiel: Lösungen der Wellengleichung



Überlagerung von Wellen - Schwebungen

Wir betrachten nun zwei 1D Wellen mit gleicher Amplitude A_0 aber unterschiedlcher Wellenlänge und Frequenz:

$$A_1(x,t) = A_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$A_2(x,t) = A_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Dann gilt für die Überlagerung beider Wellen:

$$\begin{aligned} A_{12}(x,t) &= A_1(x,t) + A_2(x,t) \\ &= A_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{aligned}$$

Da die Wellengleichung linear ist, ist die Superposition zweier Wellen wieder eine Lösung der Wellengleichung.

Ganz allgemein gilt der folgende Zusammenhang:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Damit folgt für die Überlagerung der beiden Wellen:

$$A_{12}(x,t) = A_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= A_0 2 \cos\left(\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right)$$

Dies läßt sich mit den Definitionen

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

folgendermaßen schreiben:

$$A_{12}(x,t) = 2A_0 \cos\left(\Delta k\, x - \Delta\omega t\right) \cos\left(\bar{k}\, x - \bar{\omega} t\right)$$

$$= \tilde{A}_0(x,t) \cos\left(\bar{k}\, x - \bar{\omega} t\right)$$

Dies ist eine Welle mit der mittleren Frequenz $\bar{\omega}$ und der mittleren Wellenzahl $\bar{k}$ und einer orts- und zeitabhängigen Amplitude $\tilde{A}_0(x,t)$.

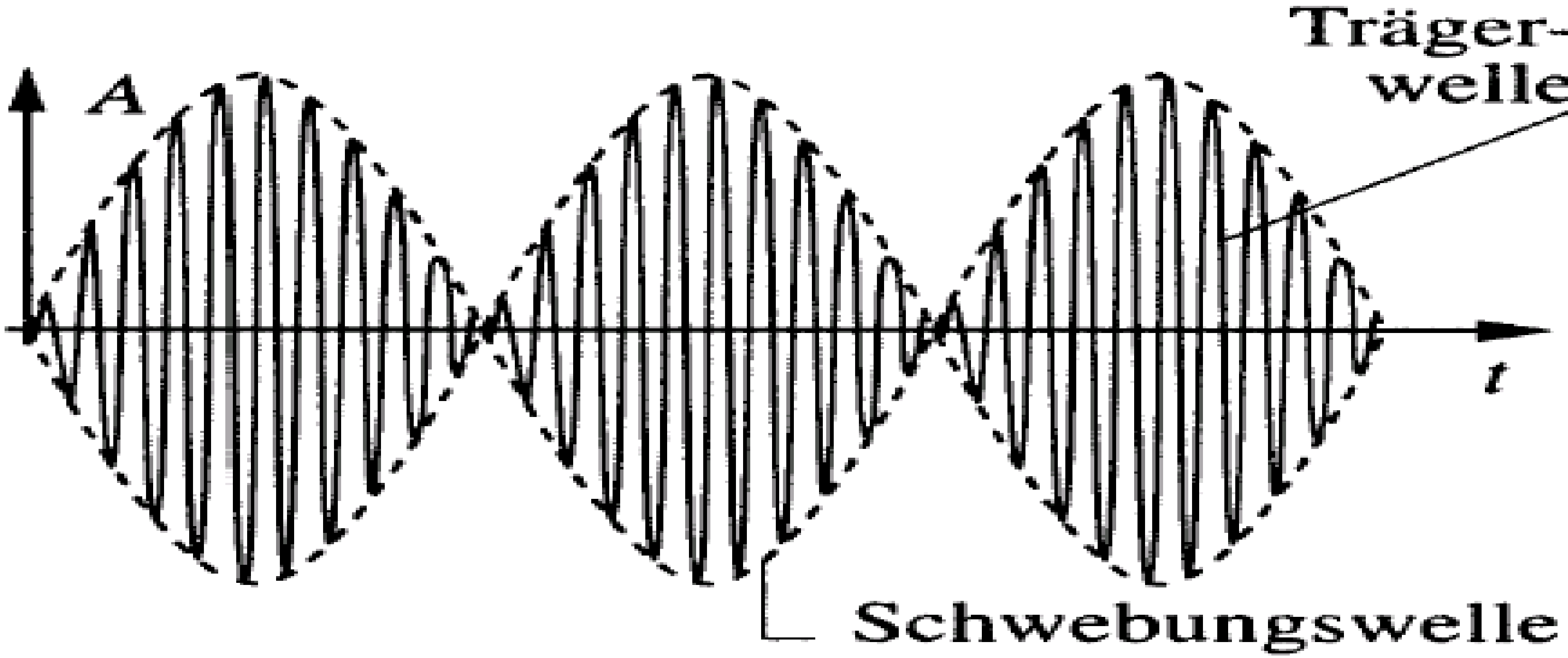
$$A_{12}(x,t) = 2A_0 \cos\left(\Delta k\, x - \Delta\omega t\right) \cos\left(\bar{k}\, x - \bar{\omega} t\right)$$

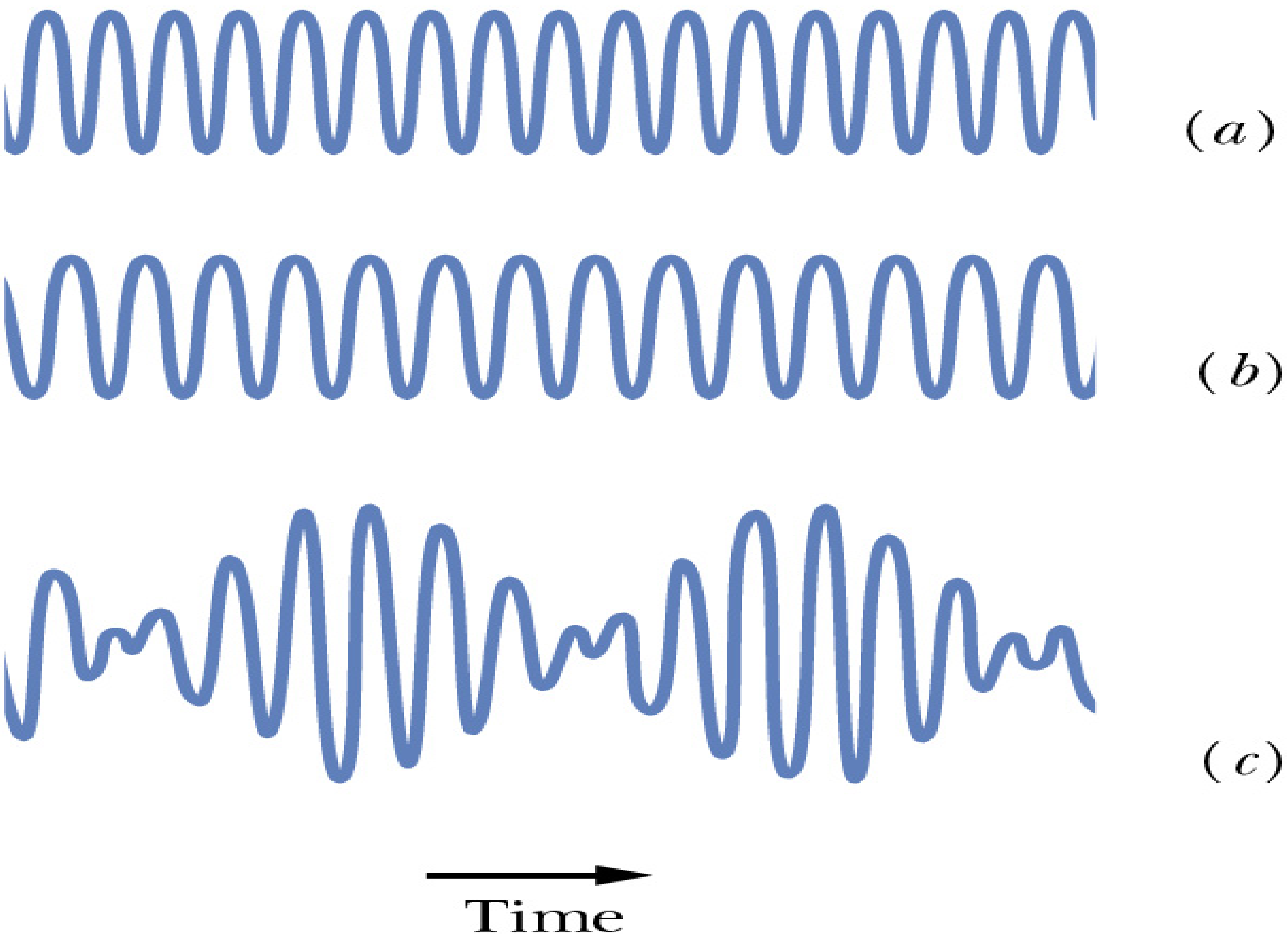
$$= \tilde{A}_0(x,t) \cos\left(\bar{k}\, x - \bar{\omega} t\right)$$

Die Amplitude

$$\tilde{A}_0(x,t) = 2A_0 \cos\left(\Delta k\, x - \Delta\omega t\right)$$

hüllt die Welle ein, da Δk und $\Delta\omega$ kleine Frequenzen und Wellenzahlen sind.




(a)
(b)
(c)
Time

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist wie bisher:

$$v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\overline{\omega}}{\overline{k}} = \overline{\lambda}\,\overline{f}$$

Die einzelnen Wellengruppen bewegen sich mit der *Gruppengeschwindigkeit*, die sich folgendermaßen aus der Phase der Amplitude ergibt:

$$\tilde{A}_0(x,t) = 2A_0 \cos\left(\Delta k\, x - \Delta\omega t\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta k\, x - \Delta\omega t = const.$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{Gr}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Allgemein gilt für die Gruppengeschwindigkeit bei bekanntem Zusammenhang $\omega(k)$:

$$v_{\mathrm{Gr}} = \frac{d\omega(k)}{dk}$$

Stehende Wellen

Wir betrachten jetzt die Überlagerung zweier 1D Wellen mit gleicher Amplitude aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung:

$$A_1(x,t) = A_0 \cos(+kx - \omega t), \quad A_2(x,t) = A_0 \cos(-kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow A(x,t) = A_1(x,t) + A_2(x,t)$$

$$= A_0 \cos(+kx - \omega t) + A_0 \cos(-kx - \omega t)$$

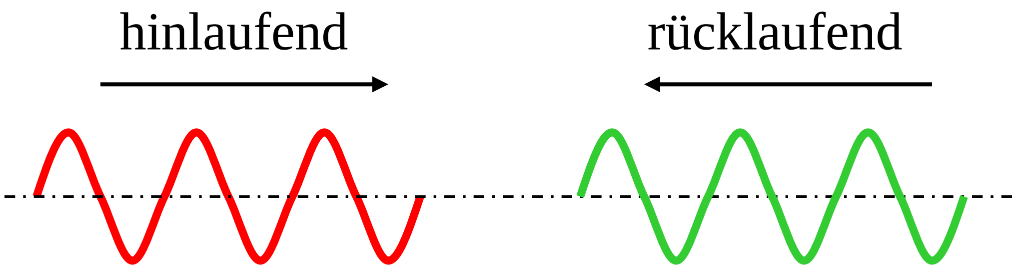
$$\Rightarrow A(x,t) = A_0 \big(\cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t)$$

$$+ \cos(kx)\cos(\omega t) - \sin(kx)\sin(\omega t) \big)$$

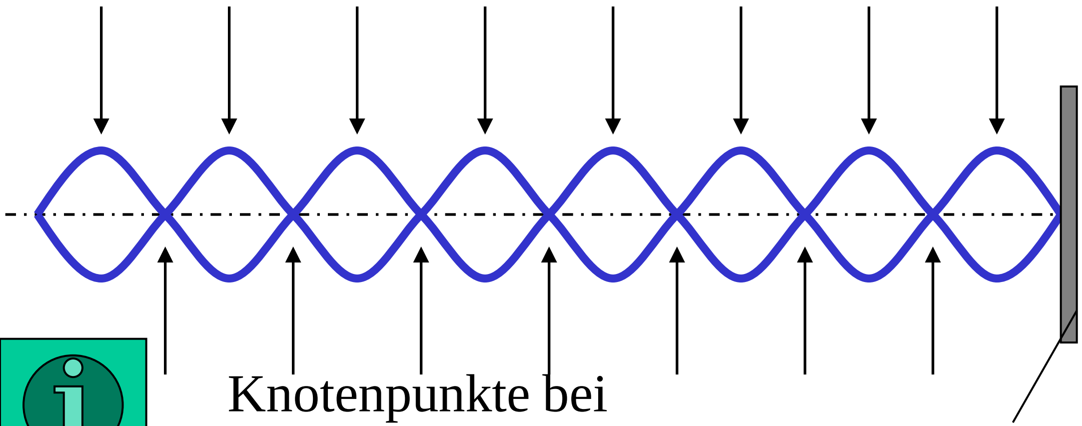
$$\Rightarrow A(x,t) = 2A_0 \cos(kx)\cos(\omega t)$$

Das ist eine sog. „stehende Welle“, bei der an jedem festen Ort x eine harmonische Schwingung mit der Amplitude $2A_0\cos(kx)$ stattfindet.

Die Überlagerung einer hin- und rücklaufenden Welle ergibt also eine stehende Welle mit raumfesten Knotenpunkten:



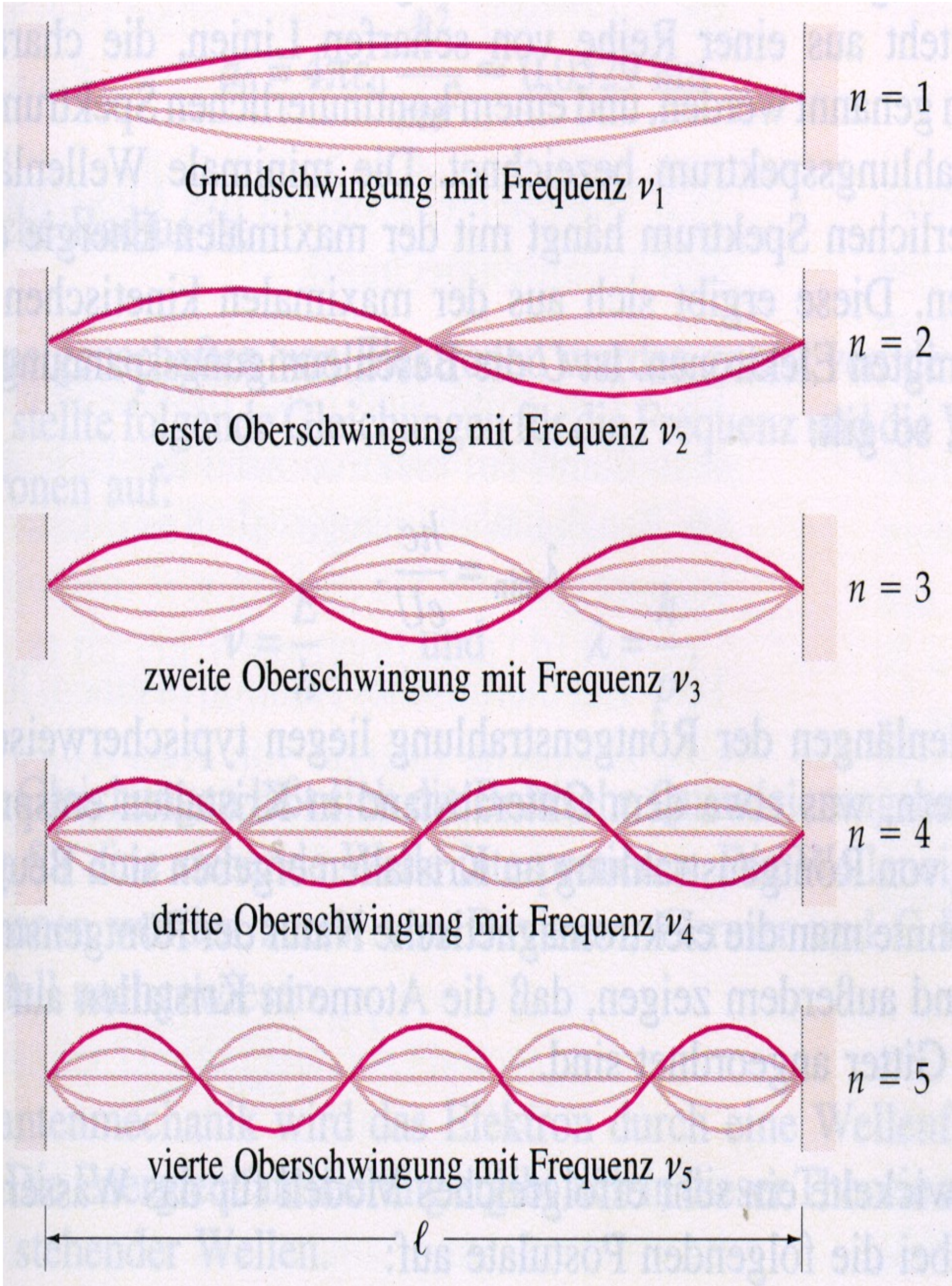
Wellenbäuche $kx = n\pi \Rightarrow x = n\lambda/2$

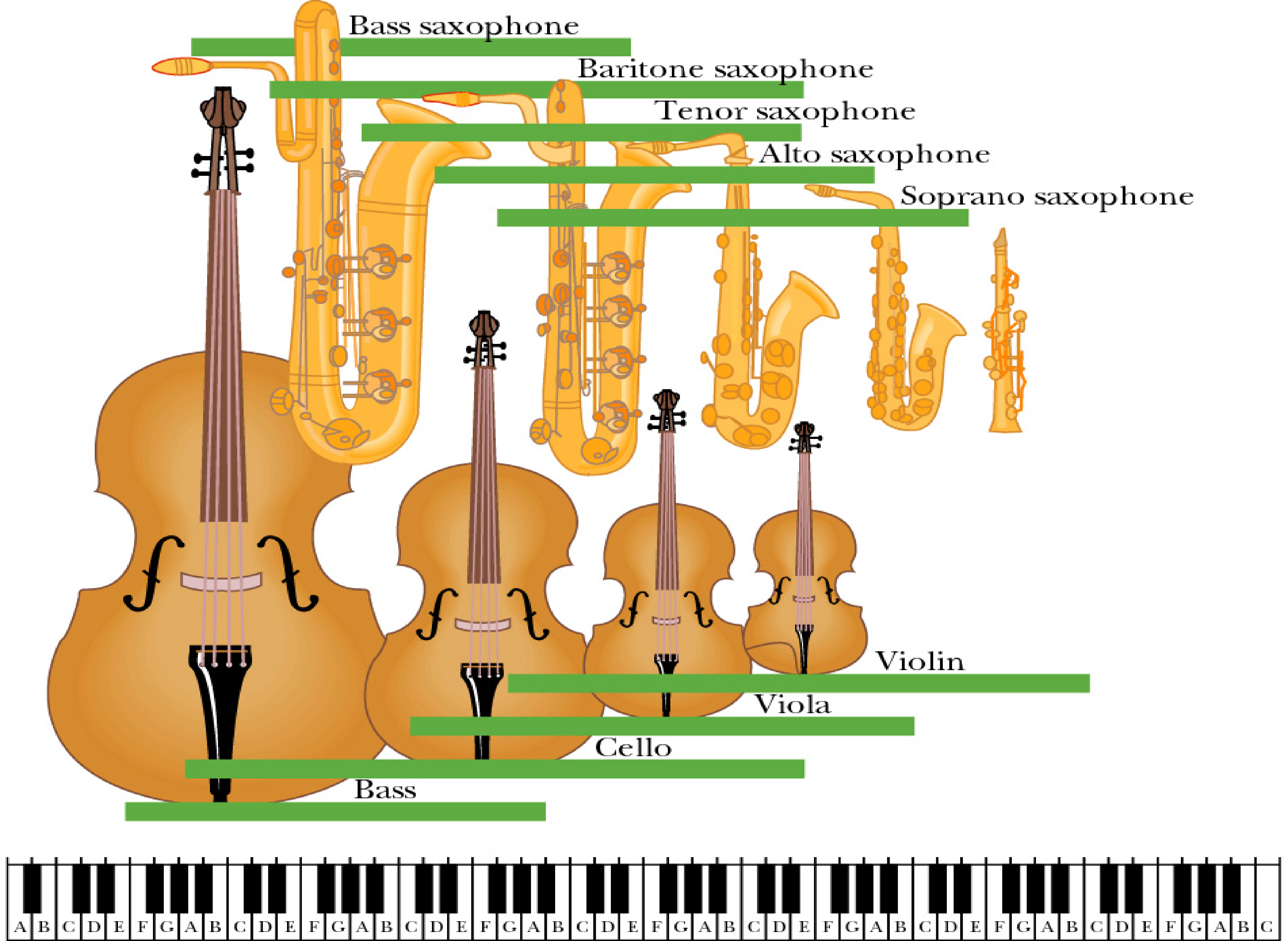


Knotenpunkte bei
$kx = n\pi + \pi/2$
$\Rightarrow x = n\lambda/2 + \lambda/4$

reflektierende Wand

Beispiel: Schwingung einer Saite





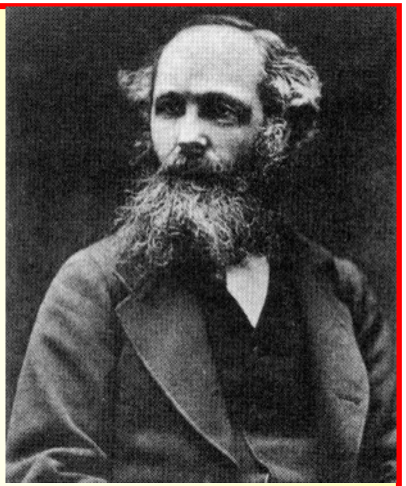
Bass saxophone
Baritone saxophone
Tenor saxophone
Alto saxophone
Soprano saxophone
Violin
Viola
Cello
Bass
A B C D E F G A B C D E F G A B C D E F G A B C D E F G A B C D E F G A B C D E F G A B C D E F G A B C


... und es wurde Licht !

Wellengleichung für elektromagnetische Wellen

Die Maxwell'schen Gleichungen (1864)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Aus diesen Gleichungen folgt direkt eine Wellengleichung, wie man folgendermaßen sieht:

Im materiefreien Raum verschwinden sowohl die Ladungs- als auch die Stromdichte, also:

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\vec{0},\quad \rho(\vec{r},t)=0$$

Dann lautet die vierte Maxwell-Gleichung:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Diese Gleichung wird nun nach der Zeit abgeleitet:

$$\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Die 3. Maxwell-Gleichung besagt aber:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Einsetzen in die linke Seite ergibt:

$$-\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Nun gilt für ein beliebiges Vektorfeld:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \Delta \vec{E}$$

Im materiefreien Raum gilt wegen der 1. Maxwell'schen Gleichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Damit folgt:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\Delta \vec{E}$$

Die eingesetzt in die linke Seite der Gleichung vorher ergibt:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

James Clerk Maxwell
(1831-1879)

Es ergibt sich also die folgende Gleichung für das elektrische Feld im materiefreien Raum:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Bemerkungen:

- Dies ist eine Wellengleichung. Neben der trivialen Lösung $E = 0$ für das Feld im Vakuum gibt es also noch „wellenförmige“ Lösungen der Maxwell-Gleichungen.
- Diese Gleichung gilt für jede Komponente des elektrischen Feldes. Es sind also genaugenommen drei 3D Wellengleichungen !
- Die Phasengeschwindigkeit c dieser Wellen ist durch die Feldkonstanten gegeben. Sie ist damit eine universelle Naturkonstante.
- Es ist zu beachten, dass das elektrische Feld allein aber nicht ausreicht, um eine solche Welle zu generieren. Bei der Herleitung wurde das Induktionsgesetz verwendet. Dies wird jetzt diskutiert.

Wir zeigen jetzt, dass eine solche Wellengleichung auch für das magnetische Feld im Vakuum gilt.

Hierfür gehen wir von der 3. Maxwell-Gleichung aus:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Ableiten nach der Zeit ergibt:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Mit der vierten Maxwell-Gleichung im materiefreien Raum

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

folgt nun durch Einsetzen in die rechte Seite der letzten Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right)$$

Nun gilt wieder für ein beliebiges Vektorfeld:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) - \Delta \vec{B}$$

Und wegen der 2. Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

folgt sofort:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=-\Delta\vec{B}$$

Wenn dieses Resultat in die Gleichung

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=-\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

eingesetzt wird, dann ergibt sich:

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\Delta\vec{B}$$

Dies kann wieder geschrieben werden als:

$$\Delta\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

Dabei wurde ebenfalls

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

als Phasengeschwindigkeit eingesetzt.

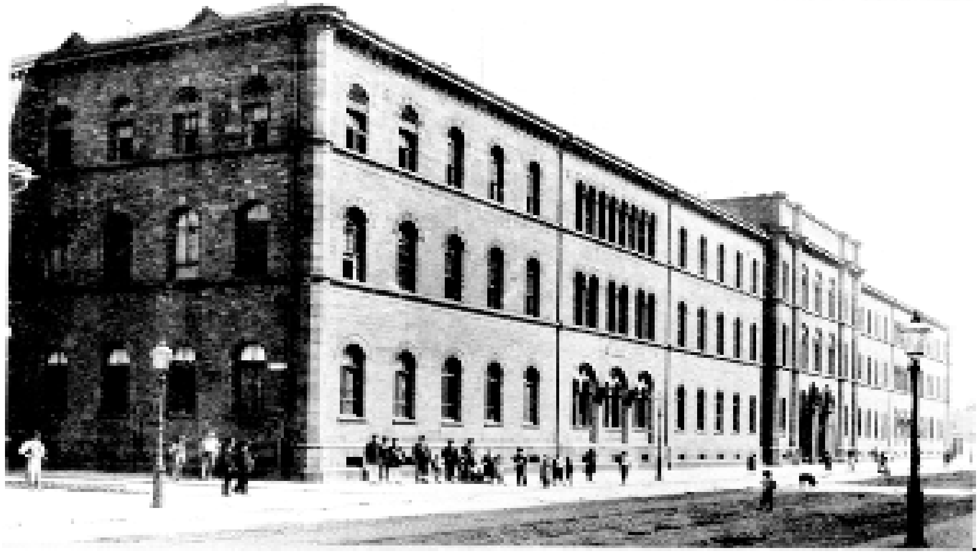
Das magnetische Feld erfüllt im Vakuum also auch eine Wellengleichung. Dabei handelt es sich eigentlich wieder um drei Gleichungen für die drei Komponenten $B_x(x,y,z,t)$, $B_y(x,y,z,t)$ und $B_z(x,y,z,t)$ des magnetischen Feldes.

Aufgrund dieser Berechnungen hat Maxwell 1864 die Existenz elektromagnetischer Wellen theoretisch vorhergesagt. Erst 1888 konnten sie experimentell nachgewiesen werden.

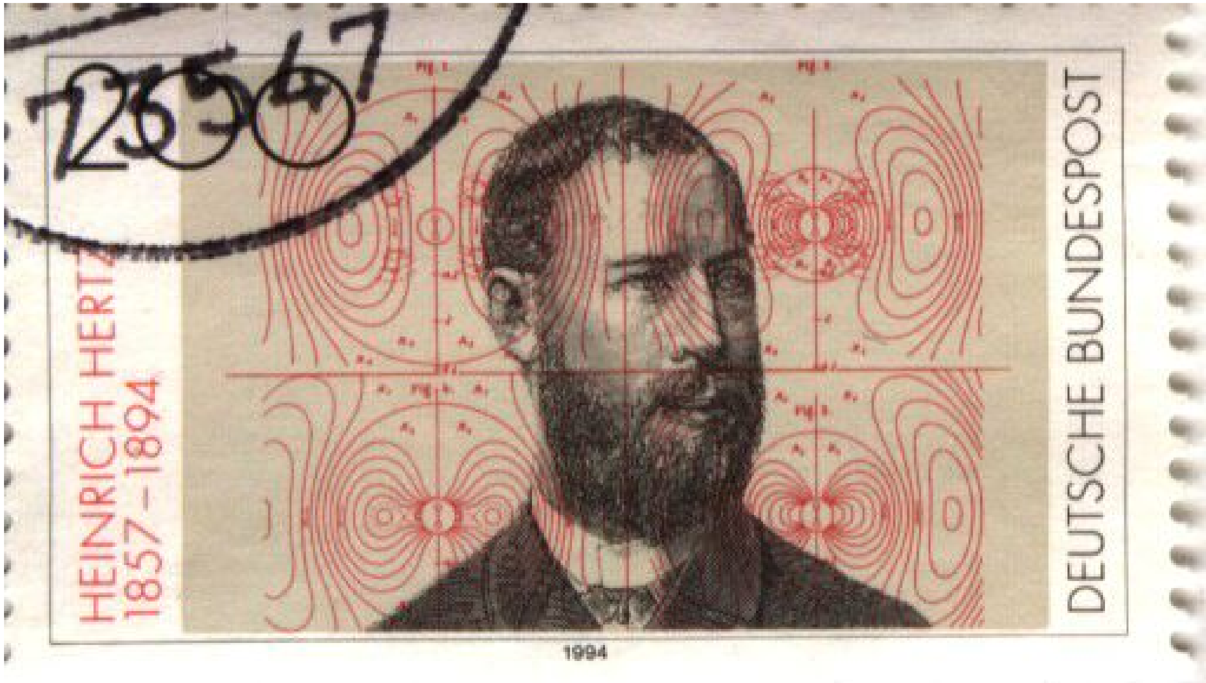
Der experimentelle Nachweis elektromagnetischer Wellen

Heinrich Rudolf Hertz
(1857-1894)

Nachweis elektromagnetischer Wellen in den Jahren 1885-1889 an der Universität in Karlsruhe.



Die Universität Fridericiana zu Karlsruhe



Ueber die

Induction in rotirenden Kugeln.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 15. März 1880

von

Heinrich Hertz

aus Hamburg.

OPPONENTEN:

Herr Dr. med. C. Günther.
- Cand. phil. F. Schulze-Berge.
- Stud. jur. G. Hertz.

BERLIN.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke).

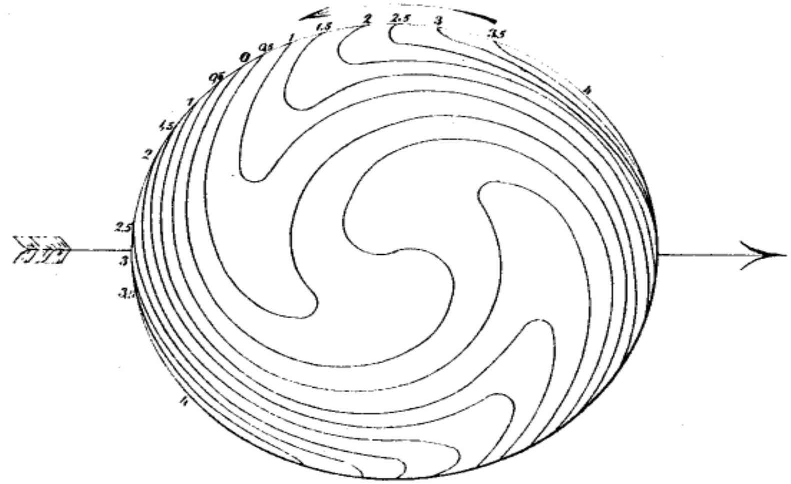
Linienstr. 158.

Taf. 7.

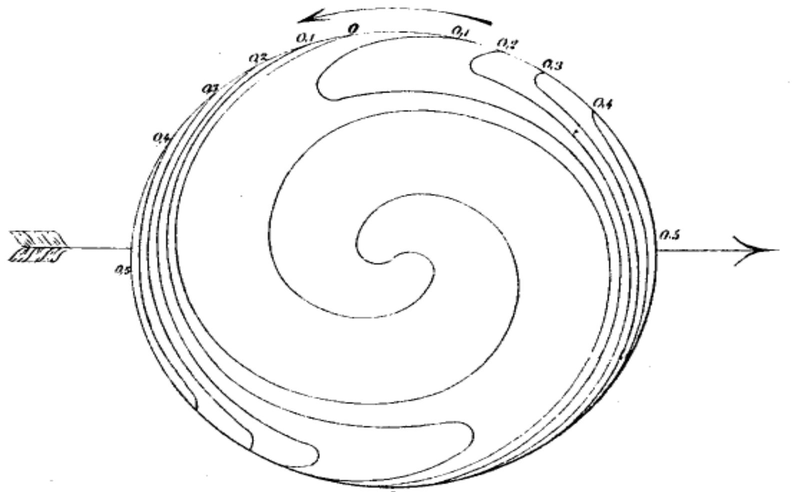
a.

Kupferkugel,

50 Umdrehungen in der Secunde.



Rotirende Kugeln.



b.

Eisenkugel,

5 Umdrehungen in der Secunde.

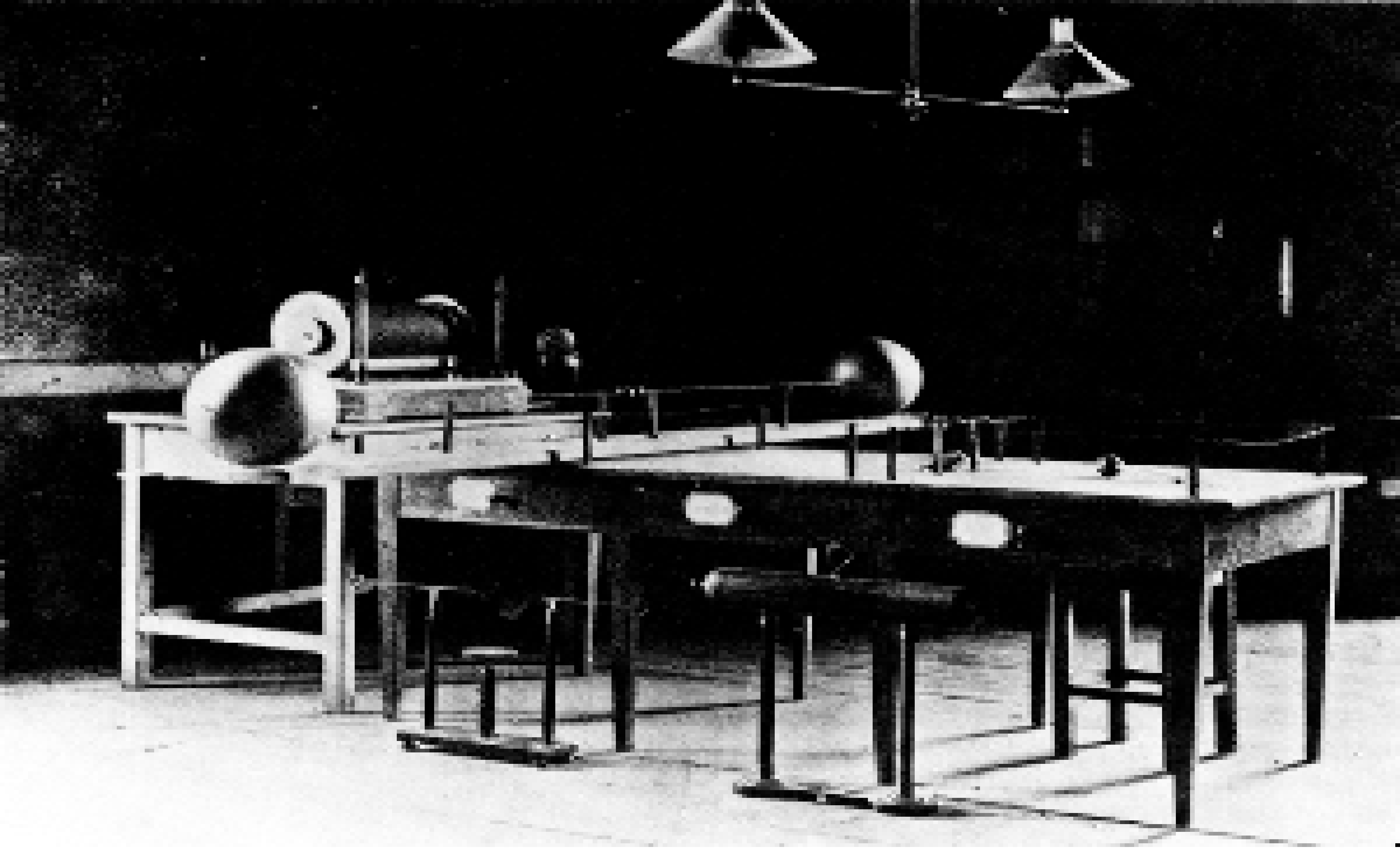
2/3 nat. Gr.

THESEN.

1. Ein Fehler von $^1/_{100}$ des wahren Werthes bildet die Grenze für die wünschenswerthe Genauigkeit, ein Fehler von $^1/_{1000}$ des wahren Werthes die Grenze für die mögliche Genauigkeit in der Bestimmung einer physikalischen Constanten; genauer als bis auf $^1/_{10000}$ ihres Werthes lässt sich kaum eine physikalische Constante auch nur definiren.

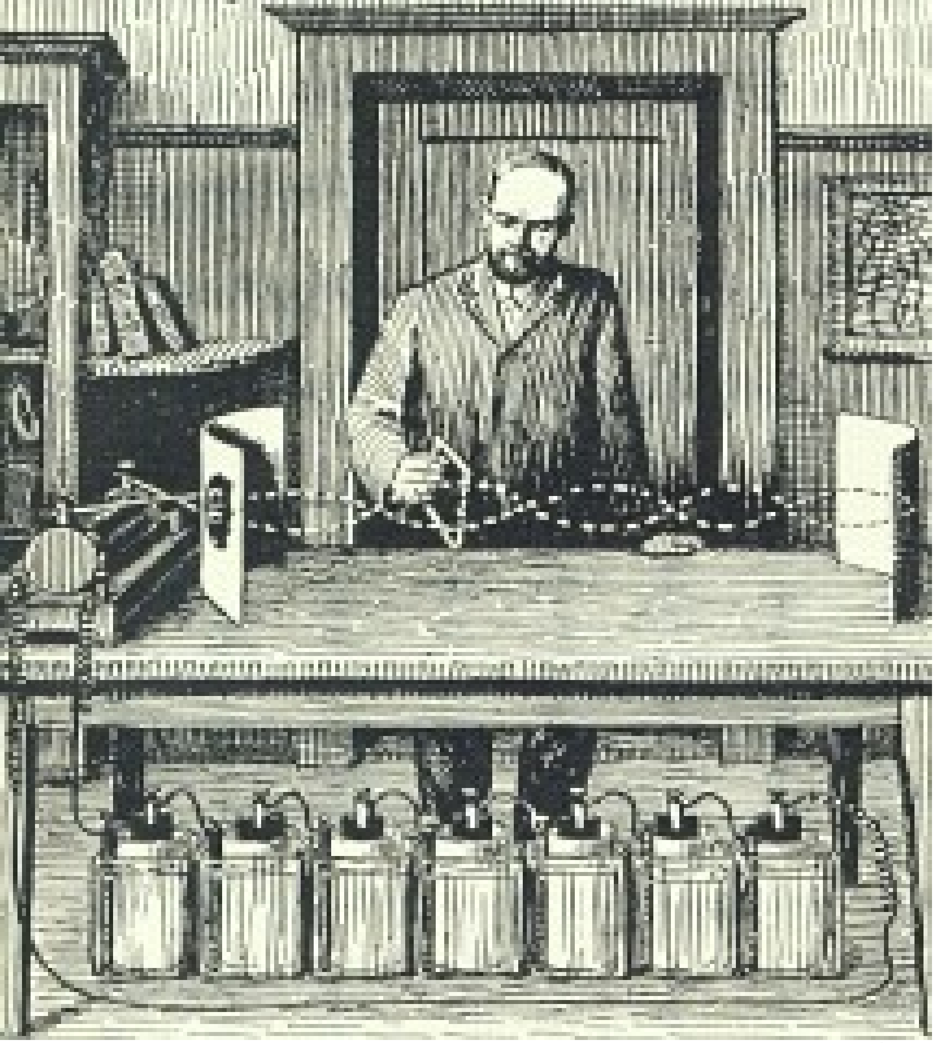
2. Obgleich es verfehlt sein würde, im Verlaufe einer Untersuchung eine vorgefasste Meinung beständig festzuhalten, so ist doch im Beginn der Untersuchung eine solche vorgefasste Meinung nicht nur nicht schädlich, sondern sogar nothwendig.

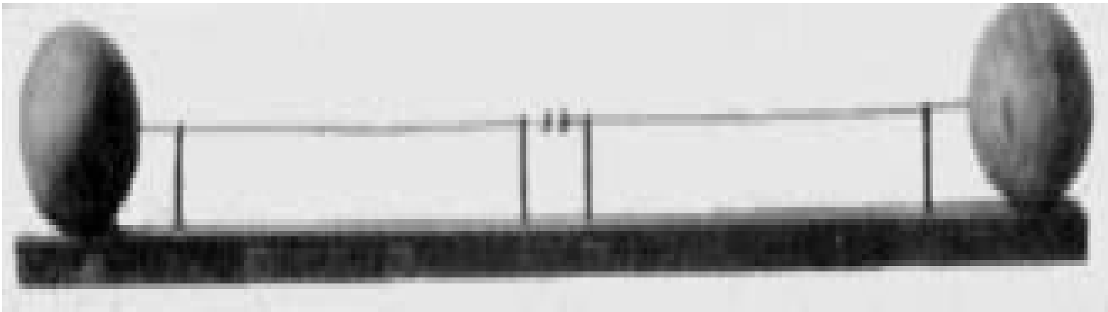
3. Die untergeordnete Stellung, welche in dem Gymnasialunterricht die Studien mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhalts gegenüber den humanistischen Studien einnehmen, ist gerechtfertigt.

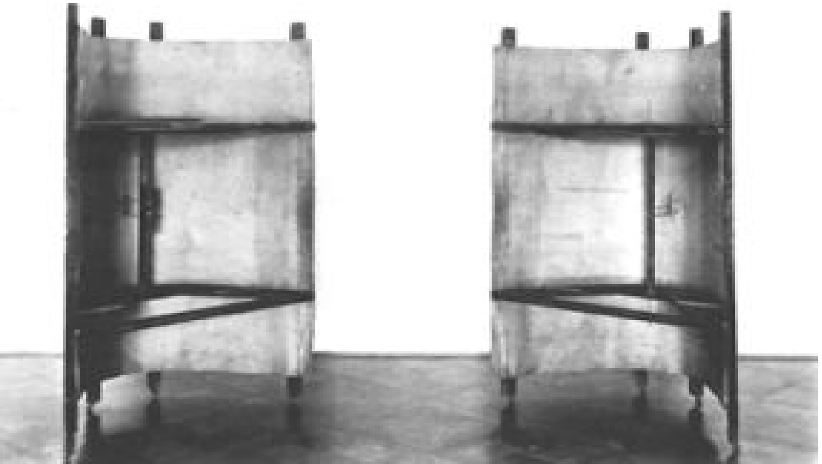


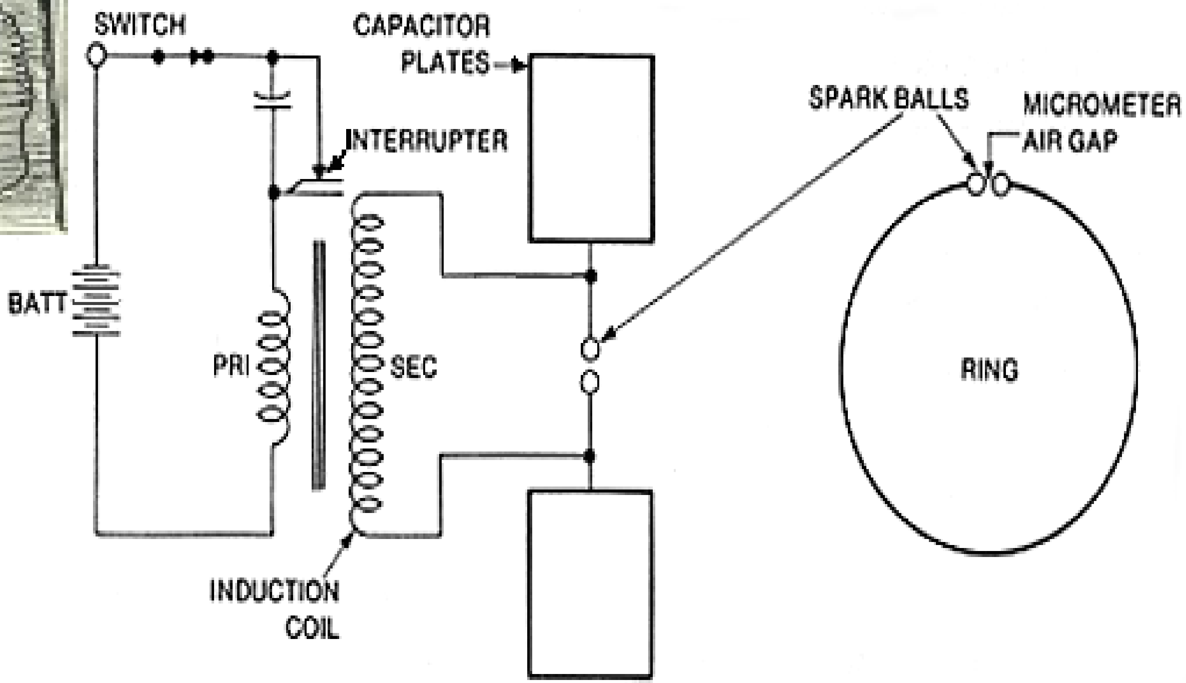
Dieses Bild zeigt den Hertz'schen UKW-Sender. Es handelt sich dabei um ein Originalphoto von Heinrich Hertz.

Experimentelle Aufbauten von Heinrich Hertz

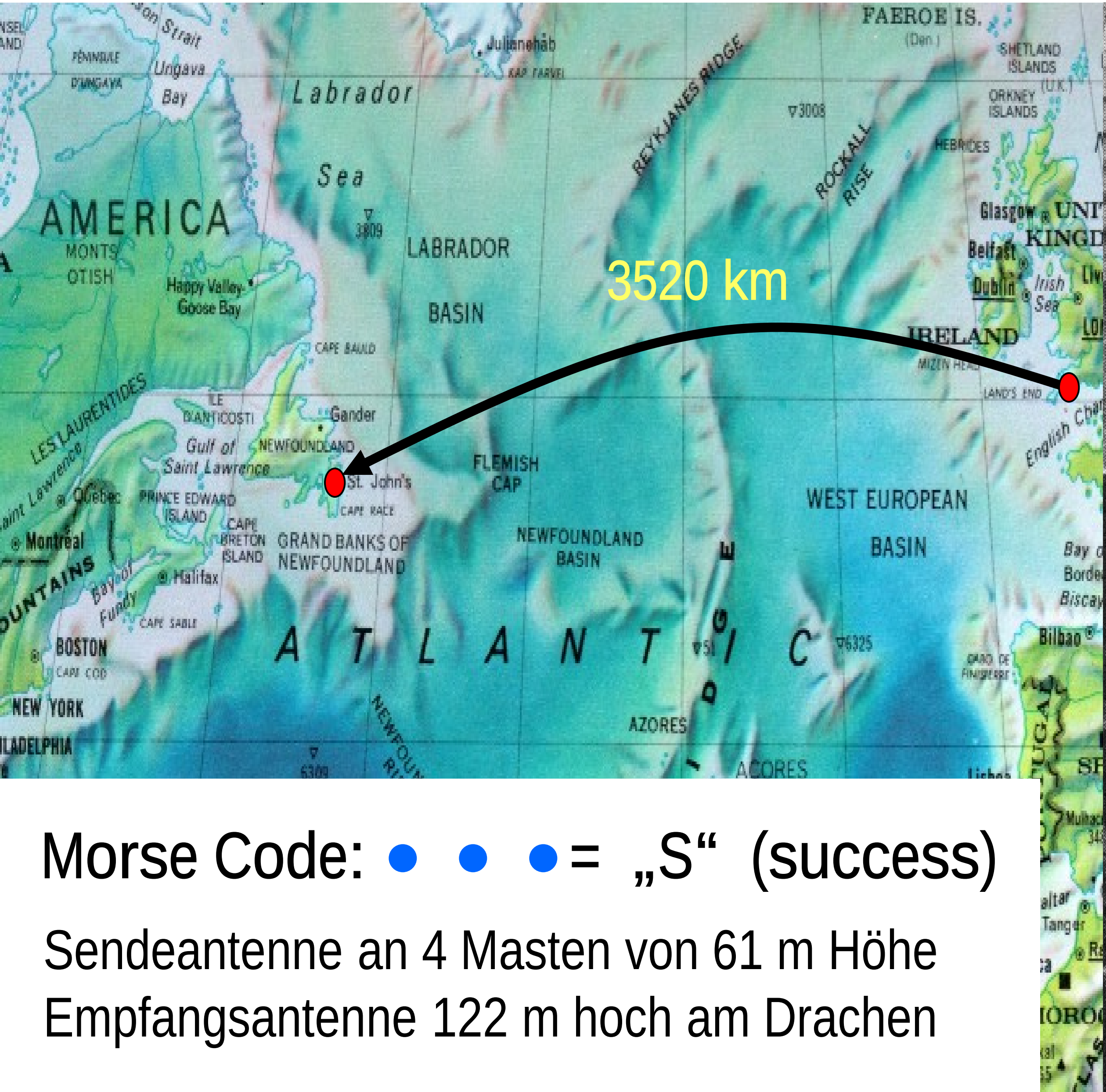


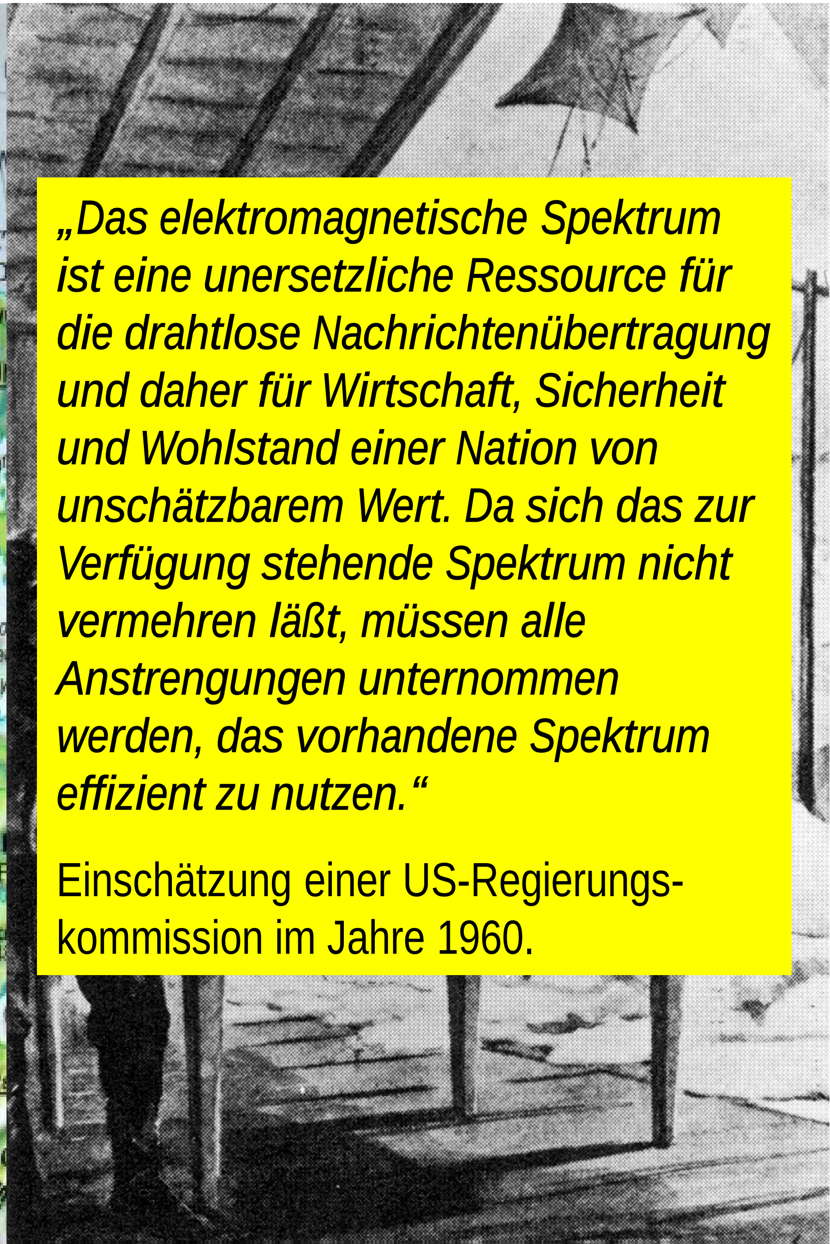






Erste Funkverbindung zwischen Cornwall (England) und Neufundland (G. Marconi 1901)





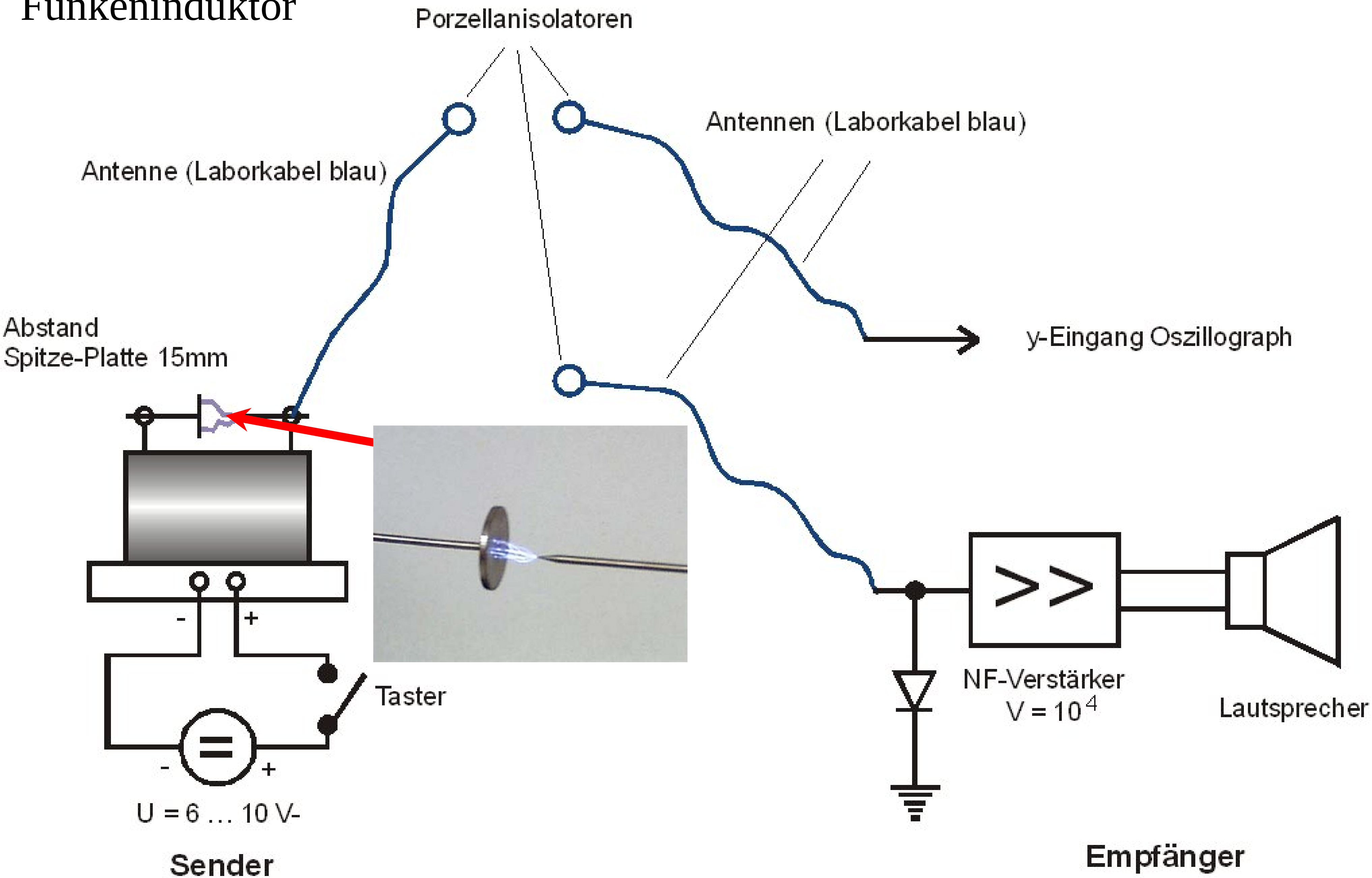
„Das elektromagnetische Spektrum ist eine unersetzliche Ressource für die drahtlose Nachrichtenübertragung und daher für Wirtschaft, Sicherheit und Wohlstand einer Nation von unschätzbarem Wert. Da sich das zur Verfügung stehende Spektrum nicht vermehren läßt, müssen alle Anstrengungen unternommen werden, das vorhandene Spektrum effizient zu nutzen."

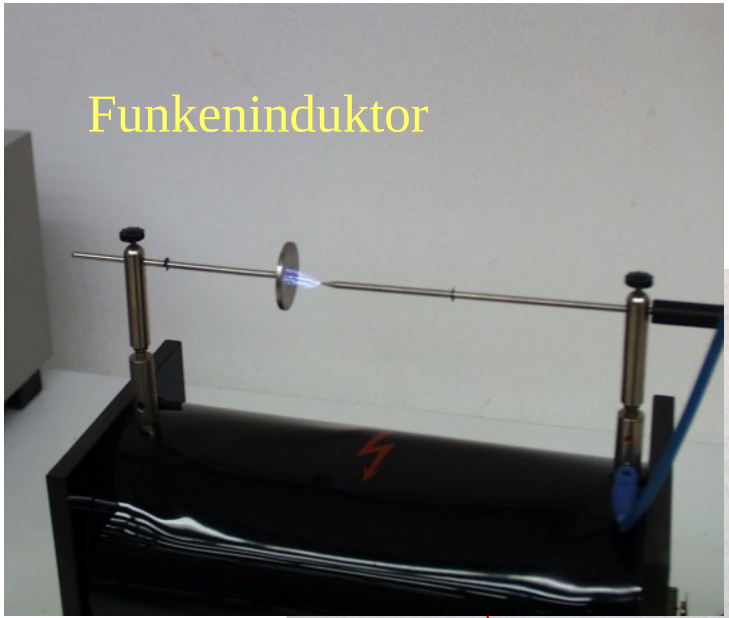
Einschätzung einer US-Regierungs-kommission im Jahre 1960.

Morse Code: ● ● ● = „S" (success)

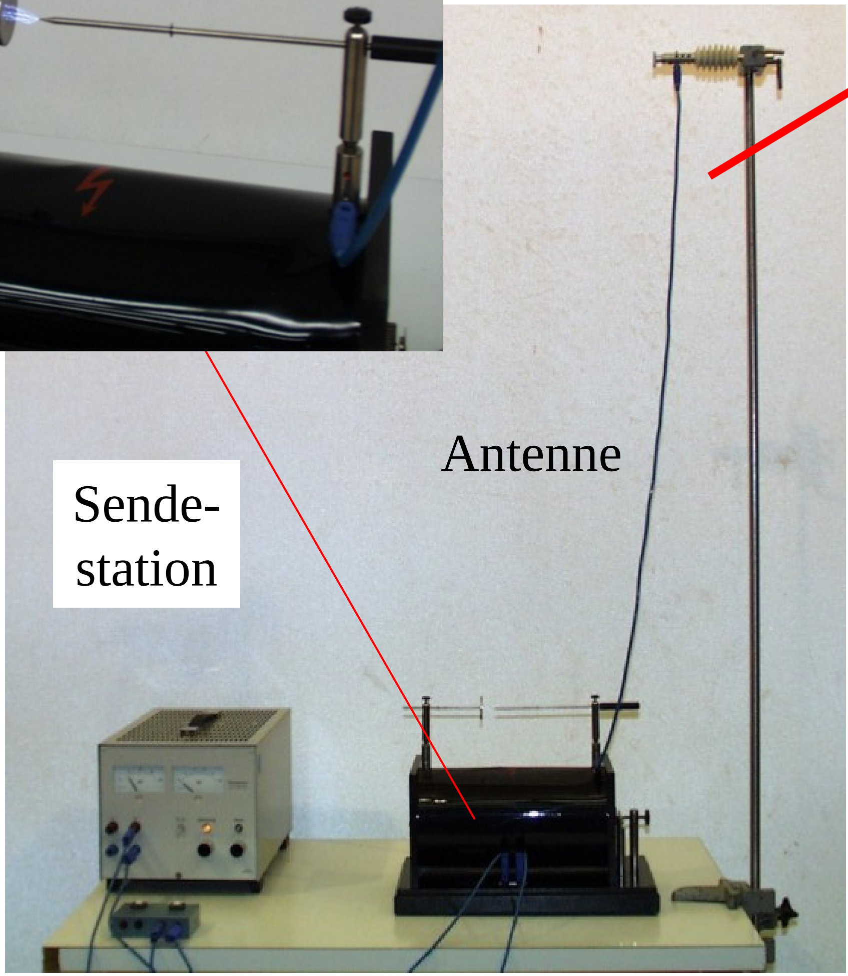
Sendeantenne an 4 Masten von 61 m Höhe
Empfangsantenne 122 m hoch am Drachen

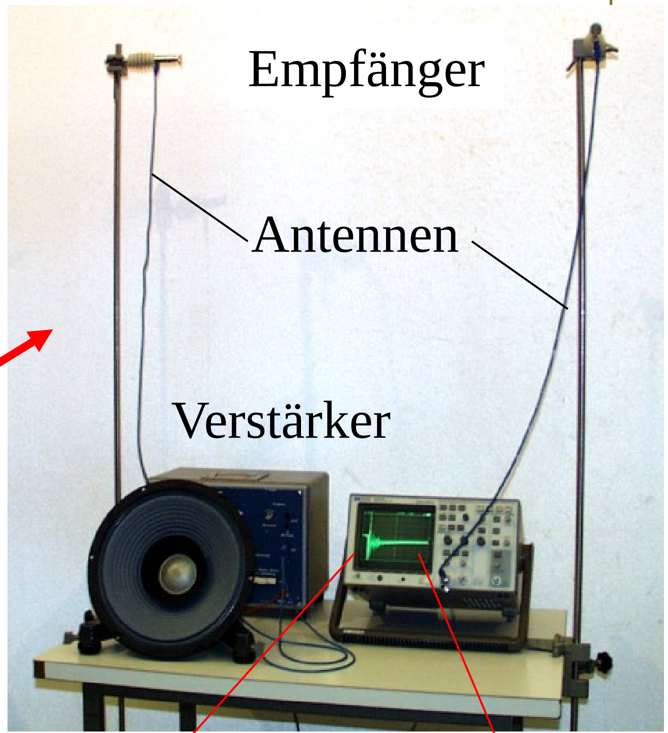
Versuch 4: Erzeugung von elektromagnetischen Wellen mit einem Funkeninduktor

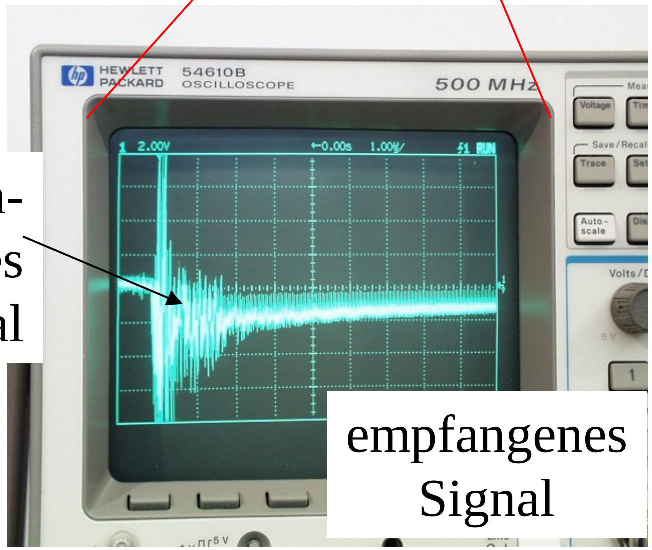




Durch den Funkeninduktor werden in der Antenne hochfrequente Wechsel-spannungen erzeugt





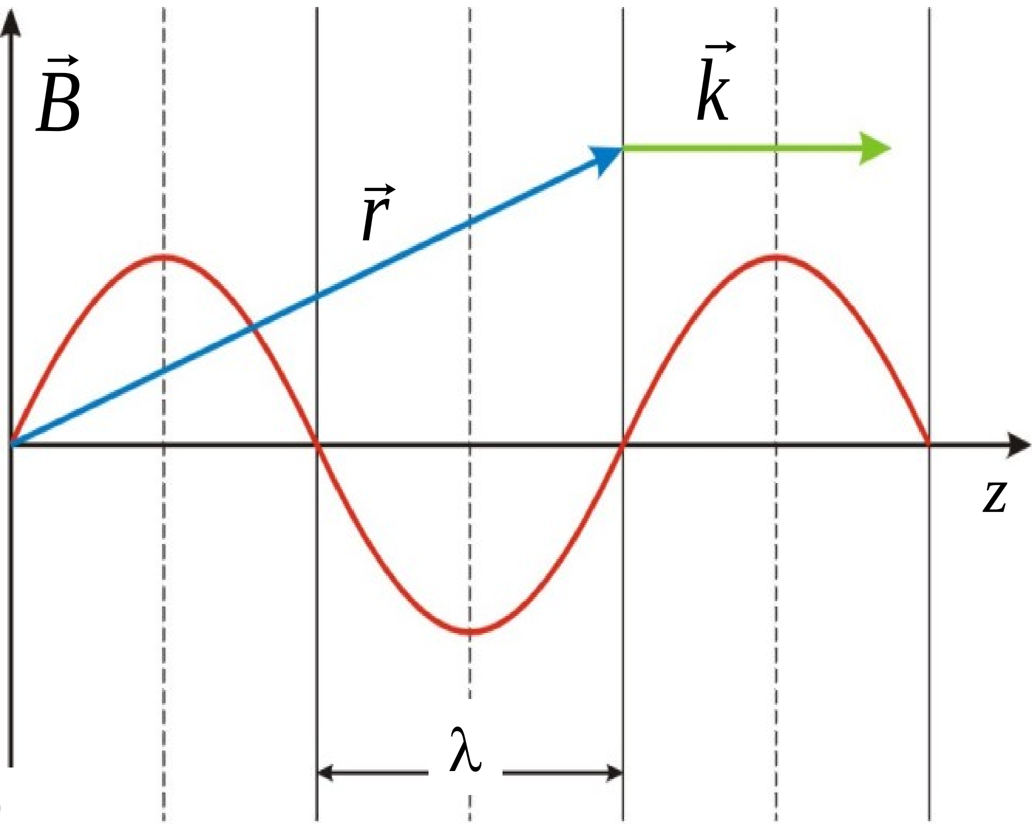


Elementare Eigenschaften elektromagnetischer Wellen

Eine Lösung der Wellengleichung für das magnetische Feld lautet:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

$$= \vec{B}_0 \exp\left(i\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)\right)$$



Dabei ist die Amplitude ein konstanter Vektor:

$$\vec{B}_0 = \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ B_{0,z} \end{pmatrix}$$

Die drei Komponenten des magnetischen Feldes lauten daher:

$$B_x(\vec{r},t) = B_{0,x} \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

$$B_y(\vec{r},t) = B_{0,y} \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

$$B_z(\vec{r},t) = B_{0,z} \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

Der magnetische Feldvektor ist also:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} B_x(\vec{r},t) \\ B_y(\vec{r},t) \\ B_z(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ B_{0,z} \end{pmatrix} \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right)$$

Zweimalige Differentation nach der Zeit liefert:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{B}(\vec{r},t)$$

Die zweimalige Ableitung nach den Raumkoordinaten ergibt:

$$\Delta\vec{B} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\vec{B} = -k^2\vec{B}$$

Wie vorher in Abschnitt 4.8.5 ergibt sich wieder durch Einsetzen in die Wellengleichung

$$-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}=0 \Rightarrow k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi f}{c} \Rightarrow c=\lambda f$$

als Zusammenhang zwischen der Phasengeschwindigkeit, der Wellenlänge und der Frequenz einer elektromagnetischen Welle.

Wegen der 2. Maxwell‘schen Gleichung gilt ferner:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(B_{0,x}\exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(B_{0,y}\exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(B_{0,z}\exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right)\right)$$

$$=i\left(\underbrace{k_xB_{0,x}+k_yB_{0,y}+k_zB_{0,z}}_{=\vec{k}\cdot\vec{B}_0}\right)\exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right)=0$$

Damit folgt der wichtige Zusammenhang:

$$\vec{k}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{k}\perp\vec{B}$$

Ganz entsprechend zeigt man:

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{k}\perp\vec{E}$$

Bei einer elektromagnetischen Welle sind der elektrische und magnetische Feldvektor immer senkrecht zur durch $\vec{k}$ gegebenen Ausbreitungsrichtung orientiert. Sie ist damit *transversal*.

Für das elektrische Feld gilt auch:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\begin{pmatrix} E_x(\vec{r},t) \\ E_y(\vec{r},t) \\ E_z(\vec{r},t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right)$$

$$=\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix}\exp\left(i\left(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t\right)\right)$$

Die Rotation des E-Feldes ist dann:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=$$

$$i\underbrace{\begin{pmatrix} k_y E_{0,z}-k_z E_{0,y} \\ k_z E_{0,x}-k_x E_{0,z} \\ k_x E_{0,y}-k_y E_{0,x} \end{pmatrix}}_{=\vec{k}\times\vec{E}_0}\exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}=i\vec{k}\times\vec{E}$$

Andererseits ist die zeitliche Ableitung des *B*-Feldes:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}_0 \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

$$= -i\omega \vec{B}$$

Wegen der 3. Maxwell'schen-Gleichung

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

gilt dann:

$$i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$$

Wegen $\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \quad \Big| \cdot\vec{E}$

$$\underbrace{\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)}_{=0}\cdot\vec{E} = \omega\vec{B}\cdot\vec{E}$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{B}\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{B}\perp\vec{E}$$

Bei einer elektromagnetischen Welle stehen die Felder senkrecht aufeinander und senkrecht in Bezug auf die Ausbreitungsrichtung.

Weiter folgt für die Beträge der Felder:

$$k\,E = \omega\,B \Rightarrow E = \frac{\omega}{k}B = c\,B$$

Zusammengefaßt gilt für die Felder einer elektromagnetischen Welle:

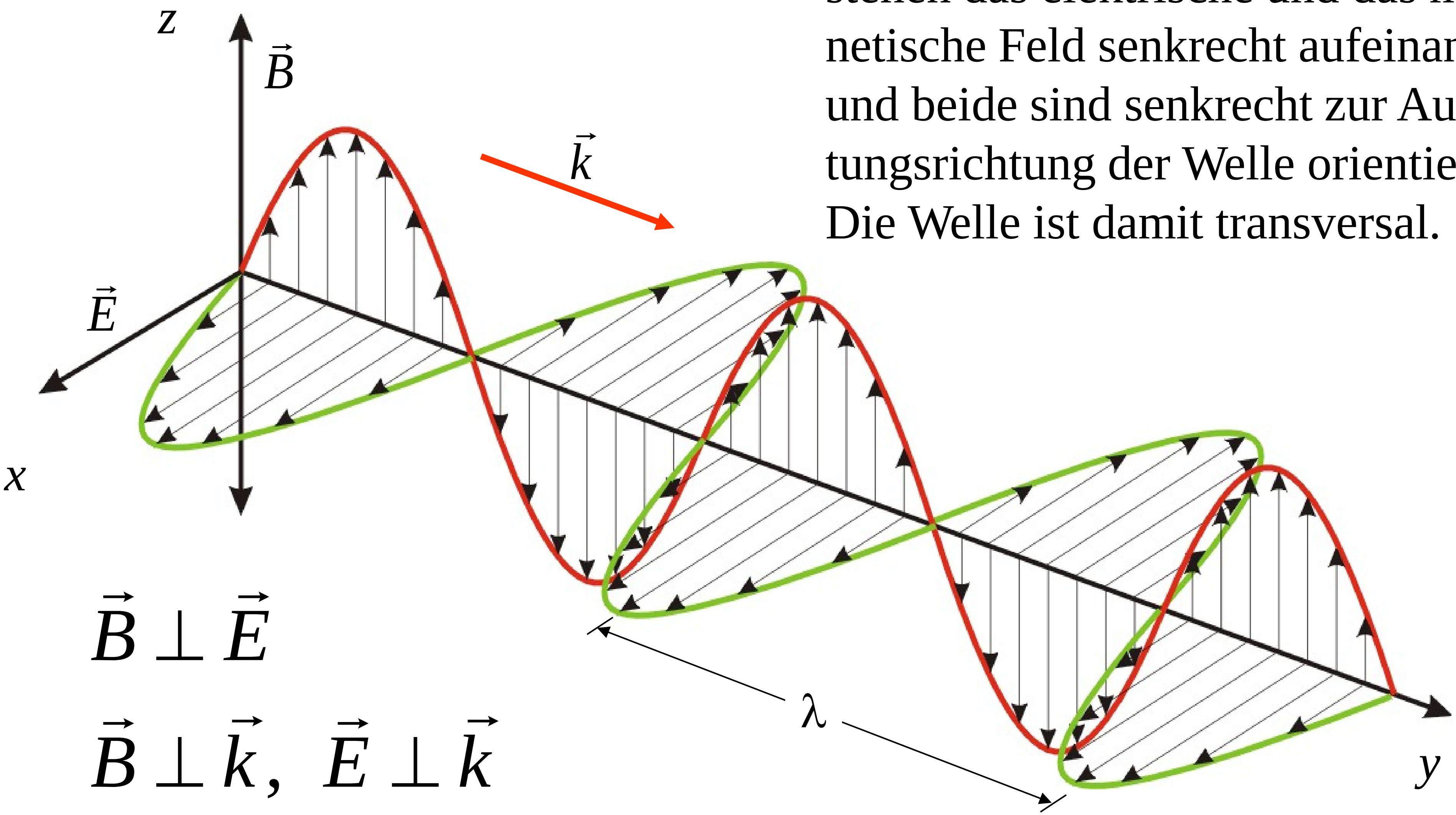
$$\vec{B}\perp\vec{E}\perp\vec{k}$$

$$E = cB$$

$$c = \lambda f = 1\Big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

Die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle sieht dann so aus:

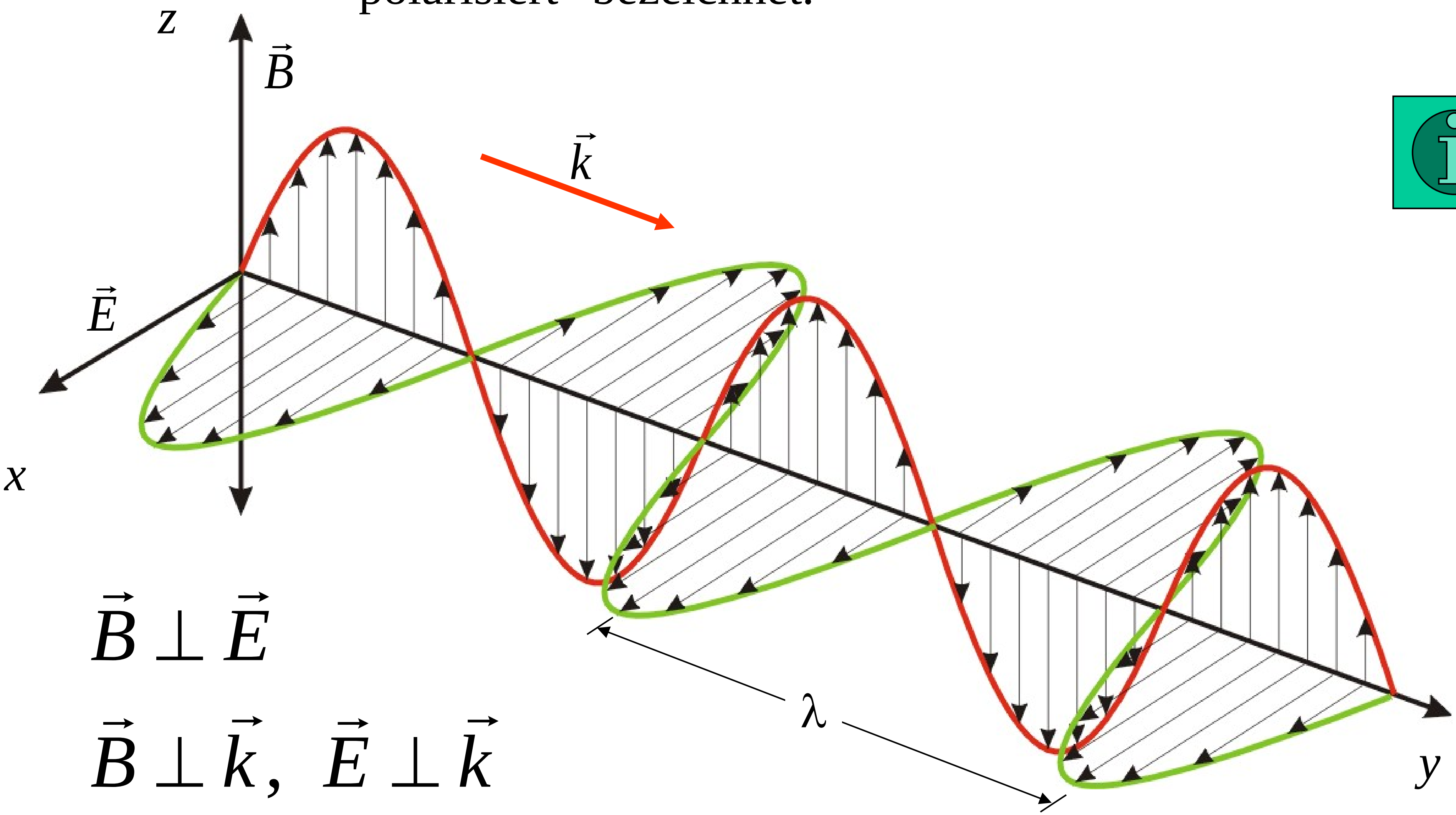
In einer elektromagnetischen Welle stehen das elektrische und das magnetische Feld senkrecht aufeinander und beide sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle orientiert. Die Welle ist damit transversal.



$$\vec{B} \perp \vec{E}$$

$$\vec{B} \perp \vec{k}, \quad \vec{E} \perp \vec{k}$$

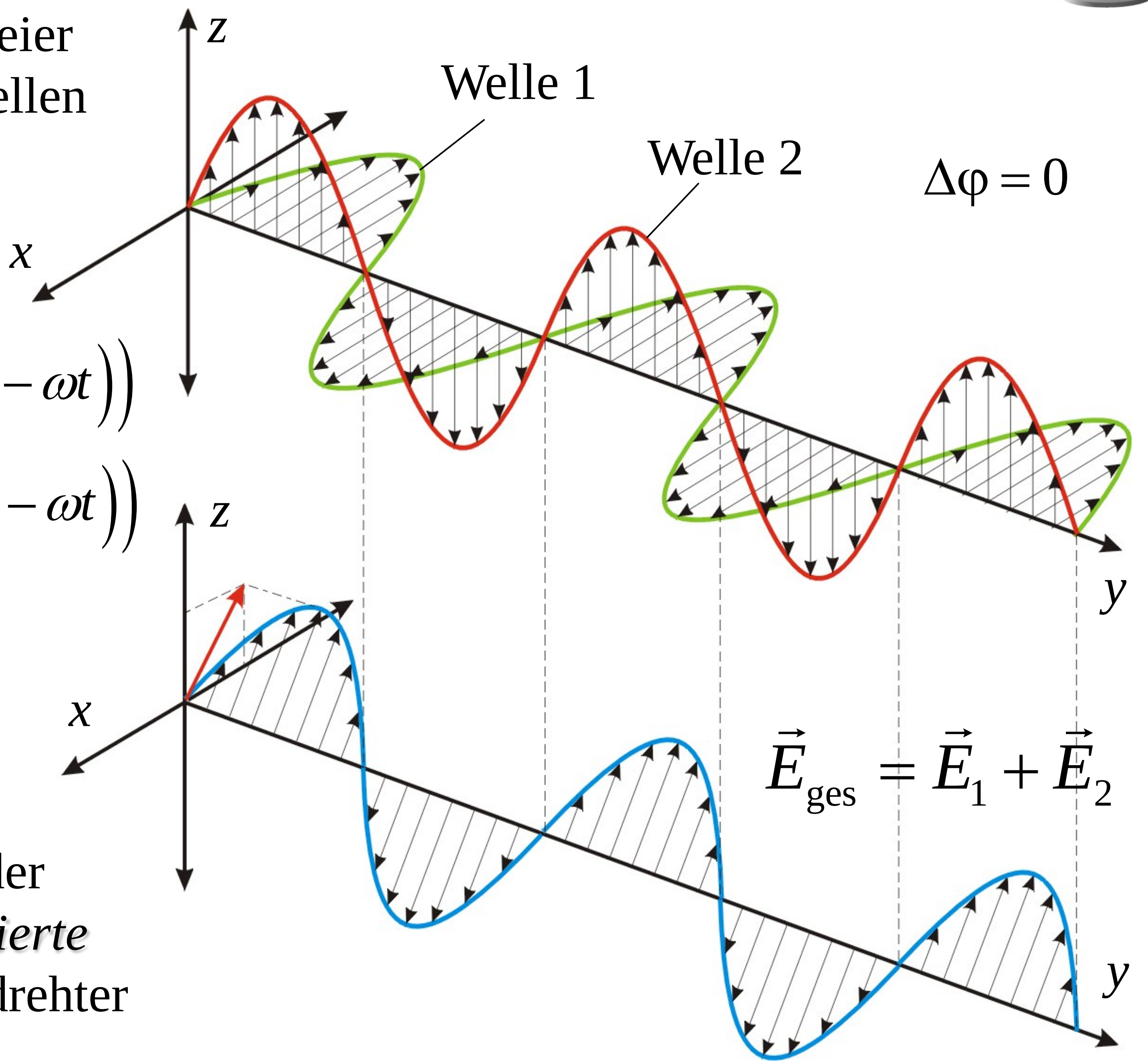
Das elektrische und magnetische Feld schwingt jeweils nur in einer Ebene. Eine solche Welle wird als „linear polarisiert“ bezeichnet.



$$\vec{B} \perp \vec{E}$$

$$\vec{B} \perp \vec{k}, \;\; \vec{E} \perp \vec{k}$$

Die Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen ergibt:



$$\vec{E}_1 = \hat{x}\, E_0 \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{z}\, E_0 \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Beide Wellen sind in Phase, d.h. $\Delta\varphi = 0$

$\Rightarrow$ Es ergibt sich wieder eine *linear polarisierte Welle*, aber mit gedrehter Polarisationsebene.

Bei einer Phasenverschiebung der beiden sich überlagernden Wellen gilt:

$$\vec{E}_1 = \hat{x} E_0 \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

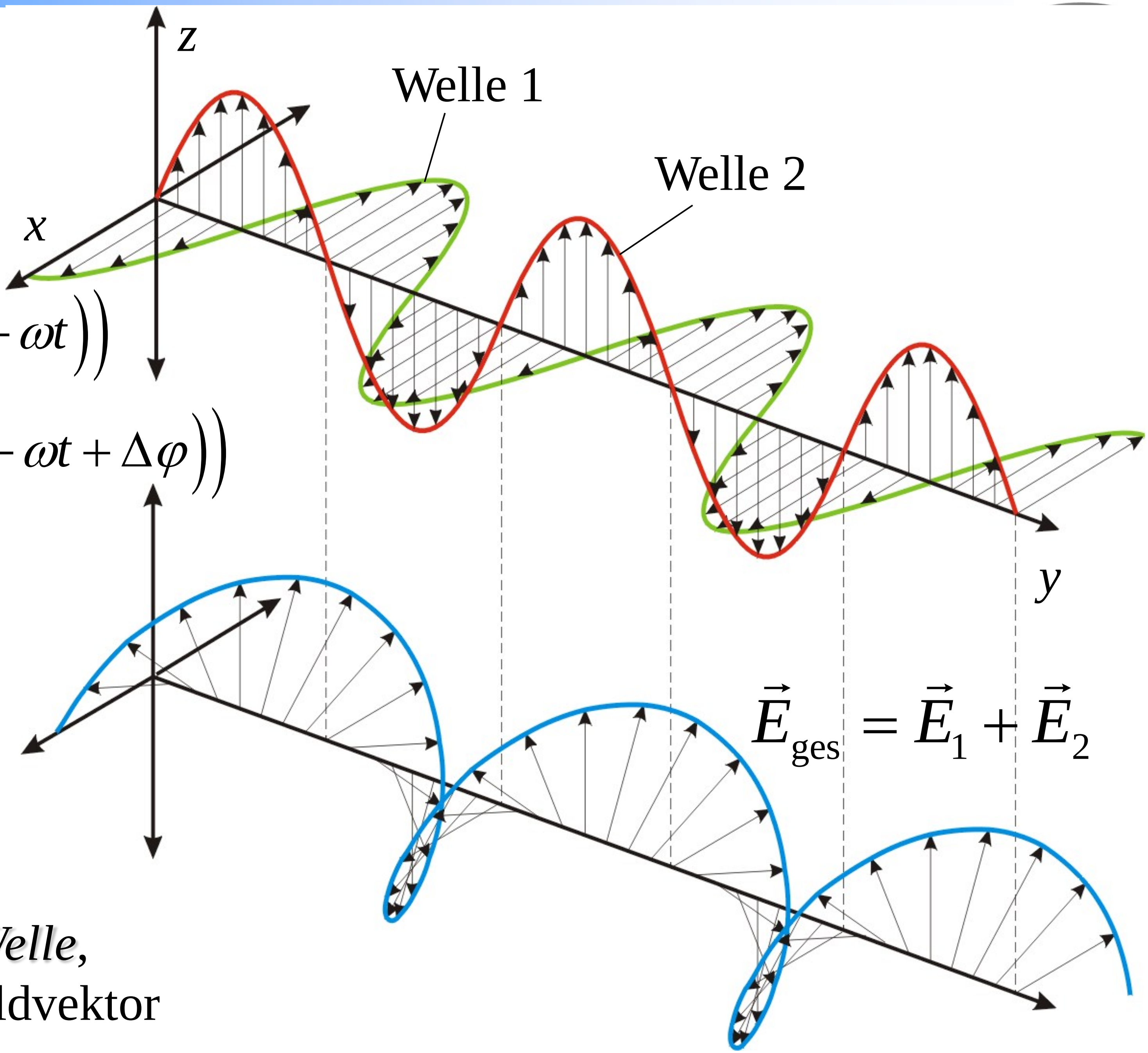
$$\vec{E}_2 = \hat{z} E_0 \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \Delta\varphi\right)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Für eine Phasenverschiebung von

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

ergibt sich eine *zirkular polarisierte Welle*, d.h. der elektrische Feldvektor läuft auf einem Kreis.

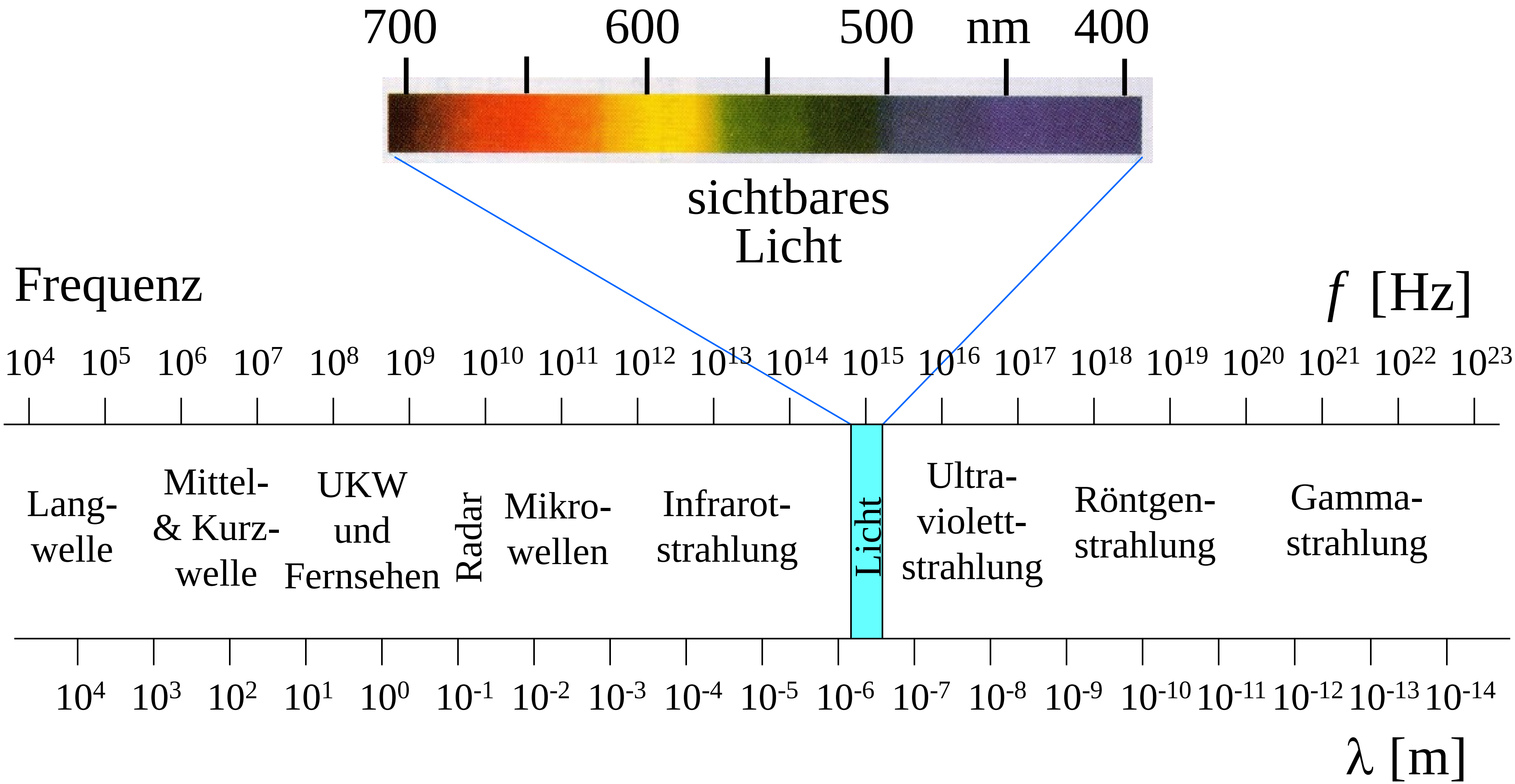


Das elektromagnetische Spektrum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\,8.854188 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}}} = 299792\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

James Clerk Maxwell 1864:

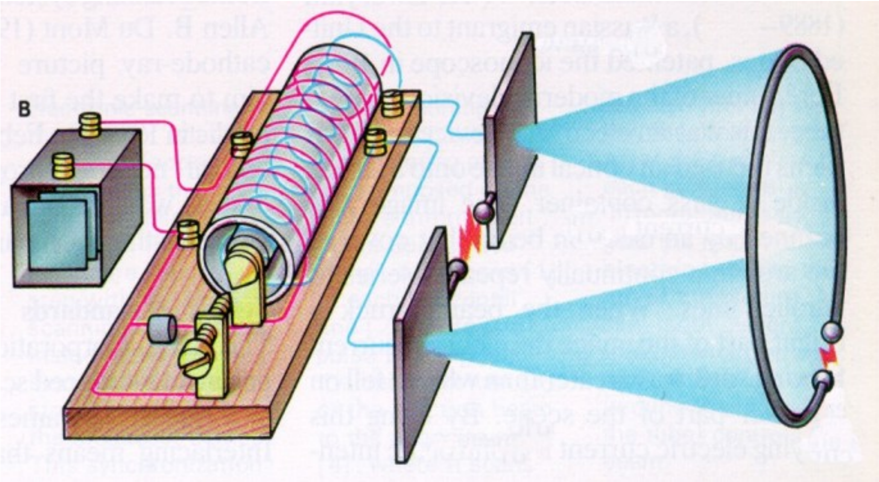
“This velocity is so nearly that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiation if any) is an electro-magnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws.”



Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \text{mit} \quad c = 2.997925 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Historische Erzeugung von Radiowellen durch Hochspannungsfunken:

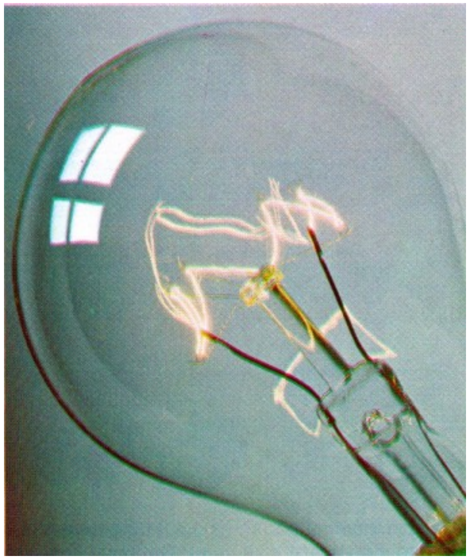


Die hohe Spannung baut ein entprechend hohes *E*-Feld auf. Schlägt der Funken über, bricht innerhalb von Nanosekunden das Feld zusammen. Dabei werden die Ladungen stark bescheunigt und strahlen.

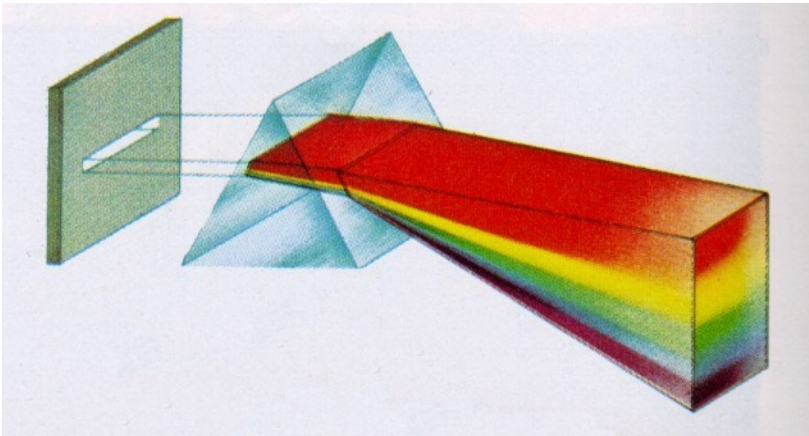
Heute wird der primitive Funken durch aktive Bauelemente (Röhren und Transistoren) ersetzt.

Erzeugung von Licht durch eine Glühbirne:

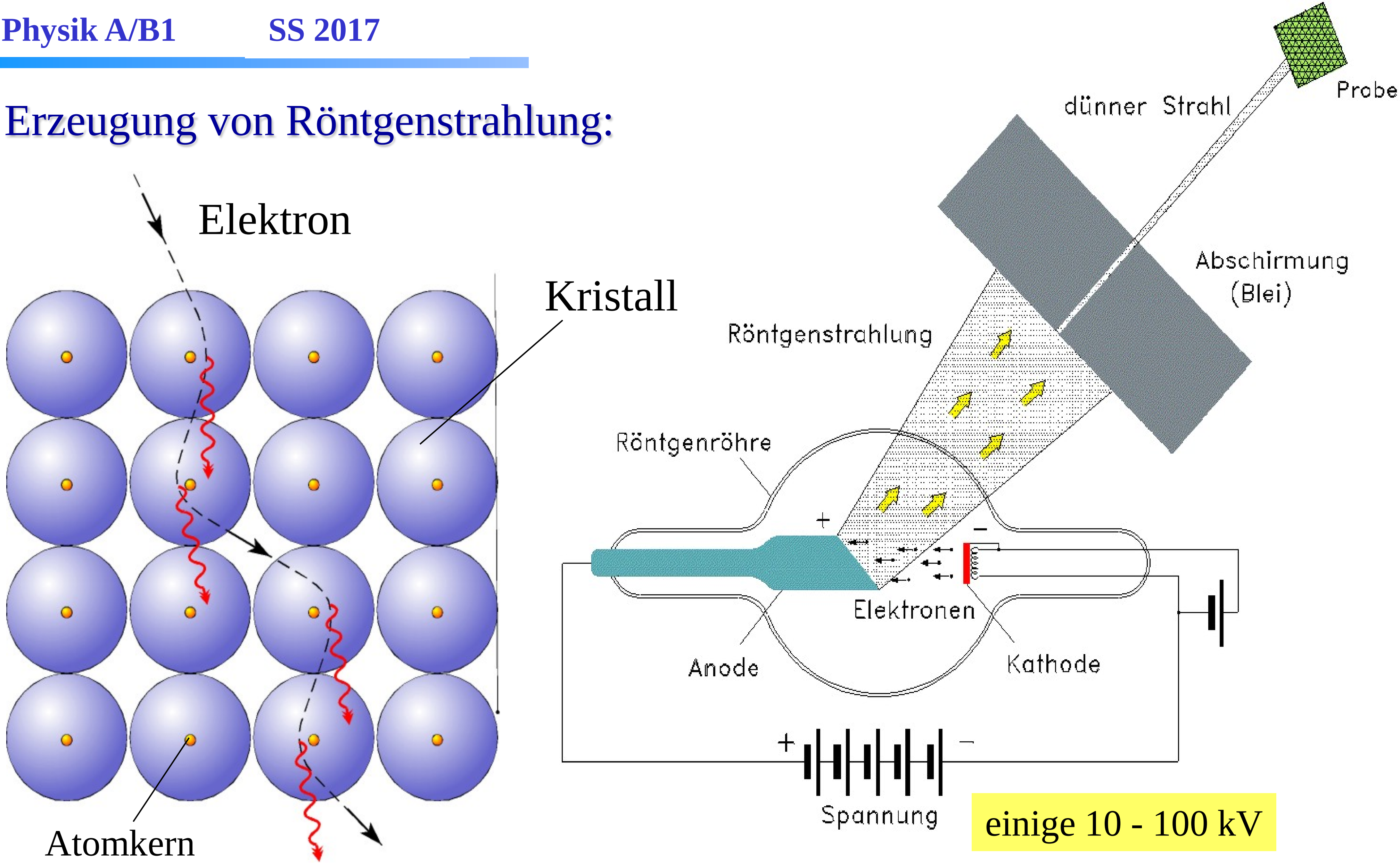
Durch hohe Temperaturen werden die Ladungen in den Molekülen so stark zu thermischen Bewegungen (Bescheunigung) angeregt, daß sie elektromagnetische Wellen aussenden.



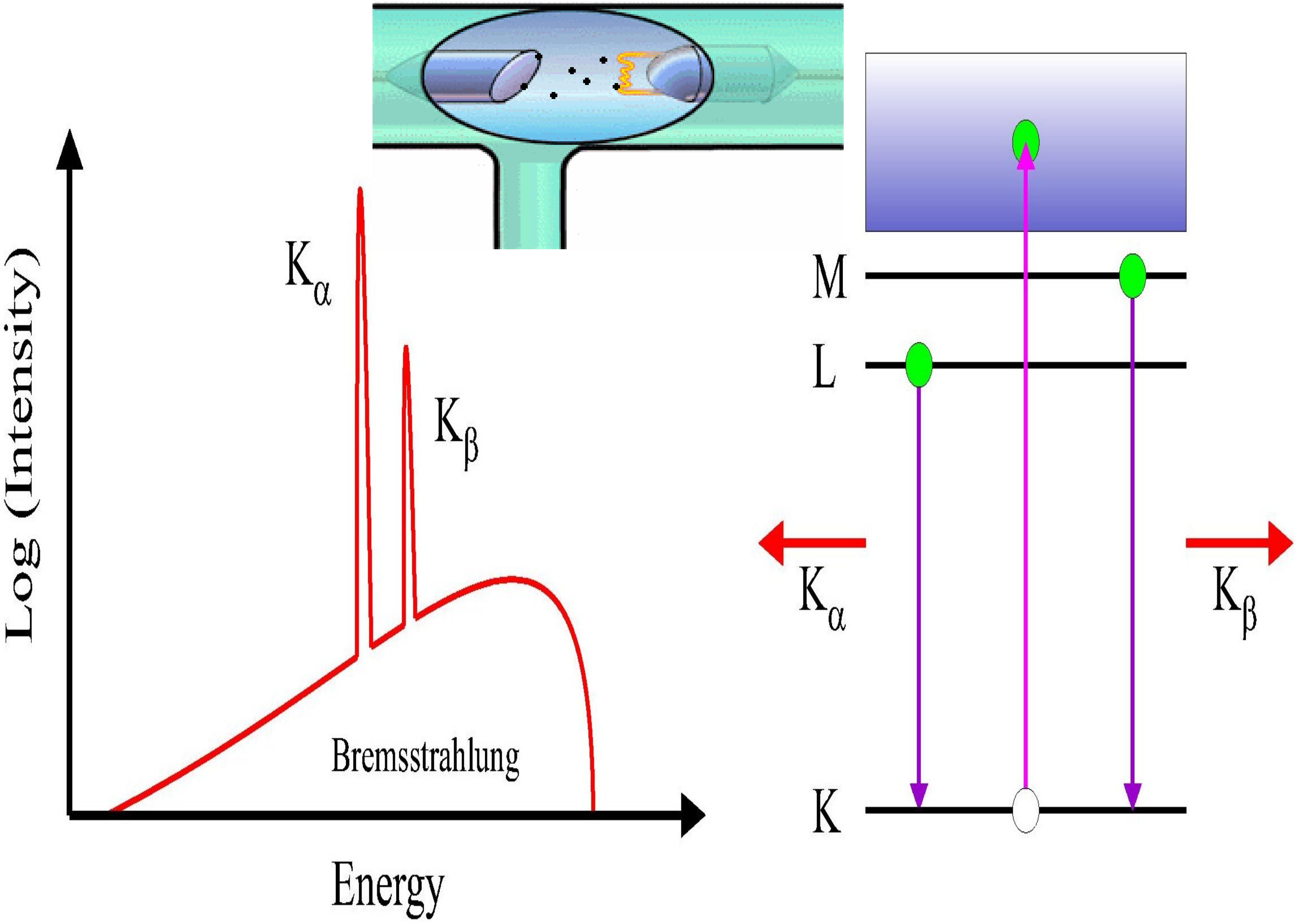
Weißes Licht enthält Wellen verschiedener Frequenzen = „Farben“



Erzeugung von Röntgenstrahlung:



Die Elektronen werden im Kristall stark abgebremst (d.h. „negativ beschleunigt“) und strahlen dabei kurzwellige Strahlung ab („Bremsstrahlung“).

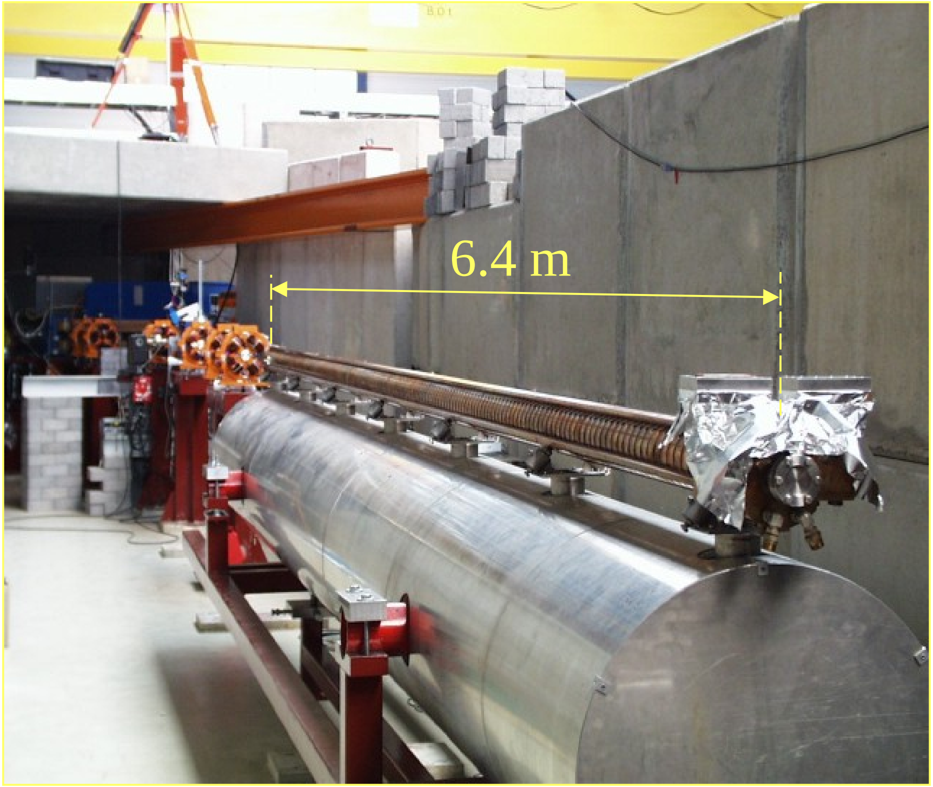


Log (Intensity)
K$_\alpha$
K$_\beta$
Bremsstrahlung
Energy
M
L
K
K$_\alpha$
K$_\beta$

Erzeugung von Gammastrahlung:

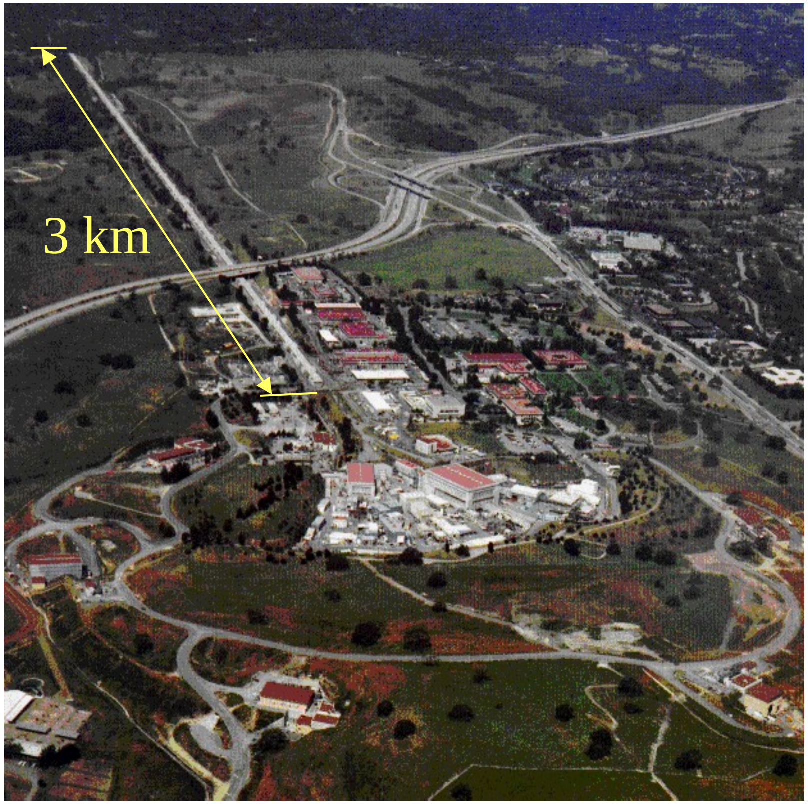
Im Prinzip wie bei der Röntgenröhre durch „Bremsstrahlung“. Die Elektronenenergie ist allerdings wesentlich höher. Sie wird durch Teilchenbeschleuniger (z.B. „LINACs“) erzeugt.

DELTA-LINAC



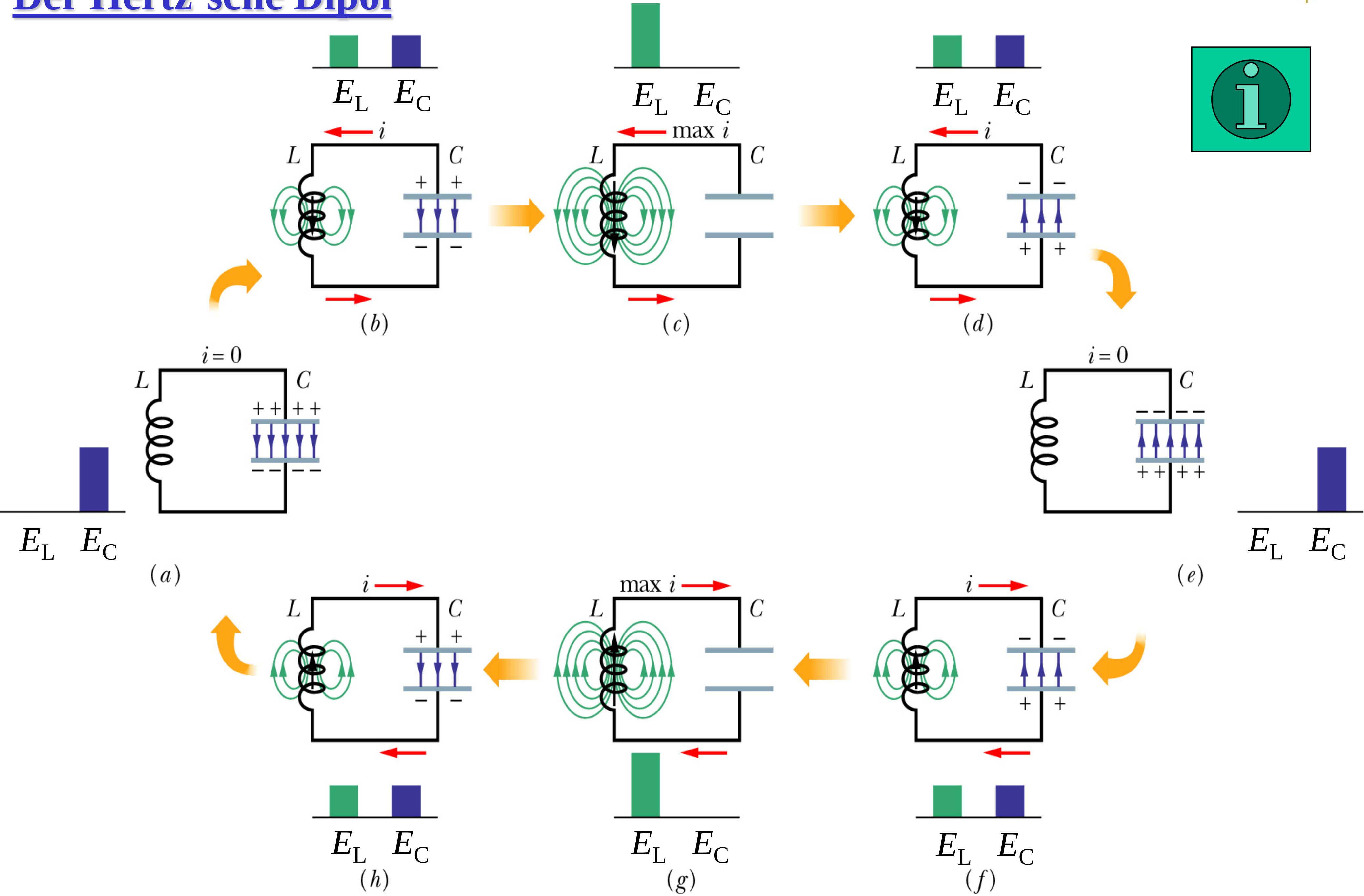
$$E_{\text{Elektron}} = 75\,\text{MeV}$$

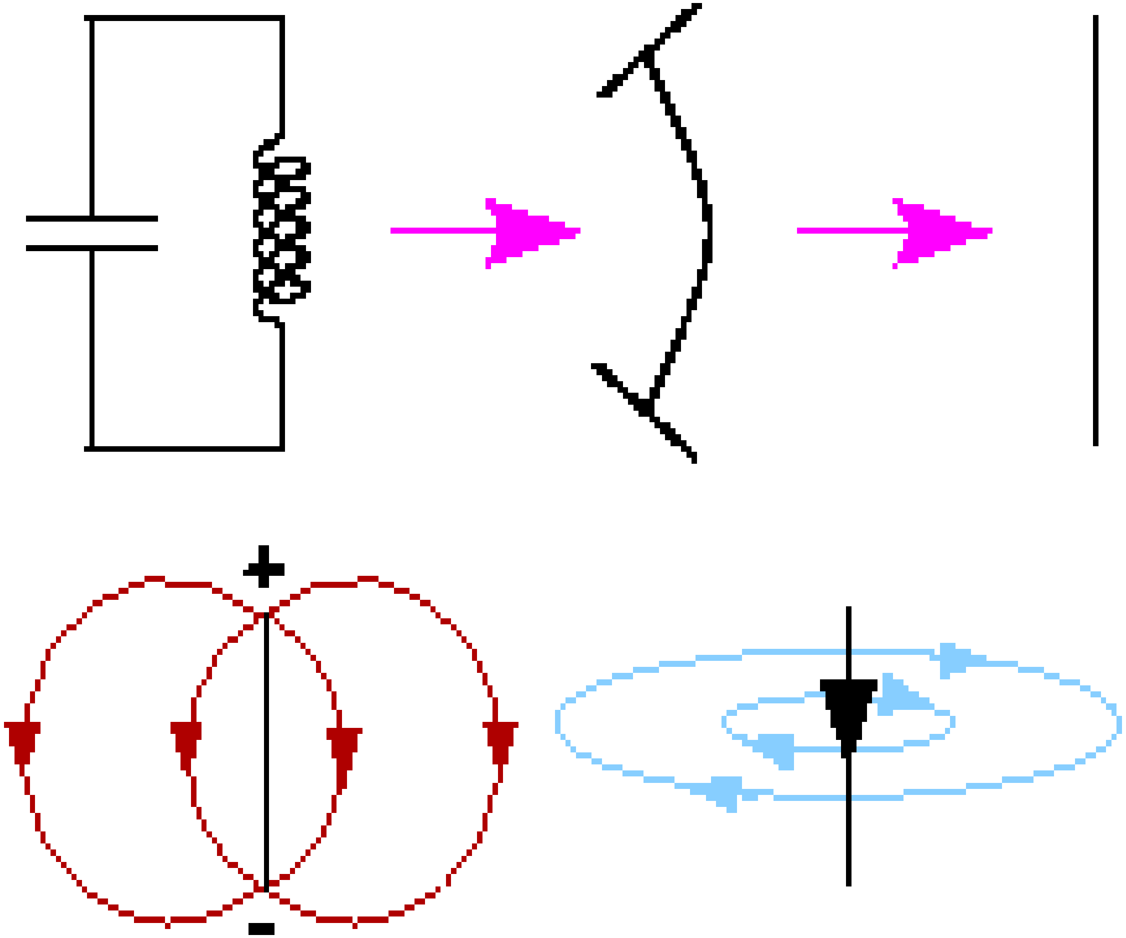
SLAC in Kalifornien, USA

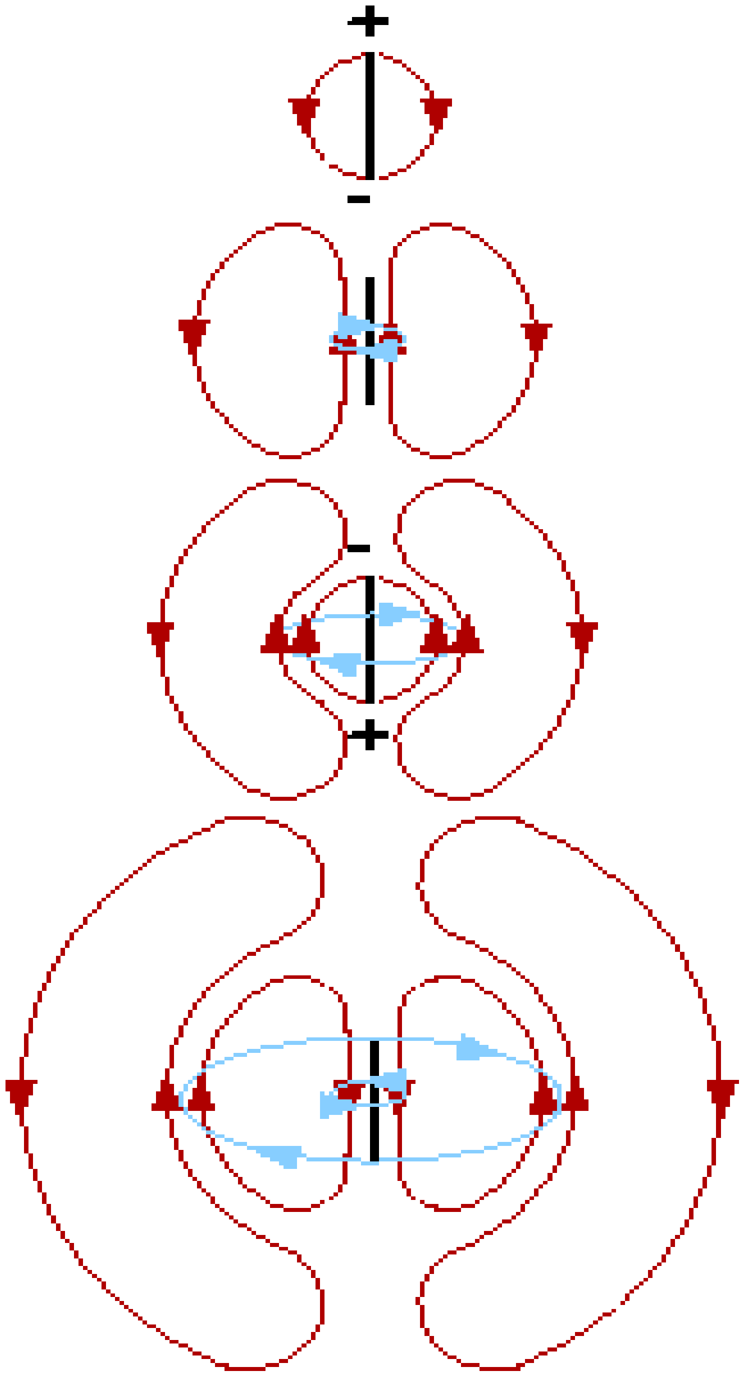


$$E_{\text{Elektron}} = 50\,\text{GeV}$$

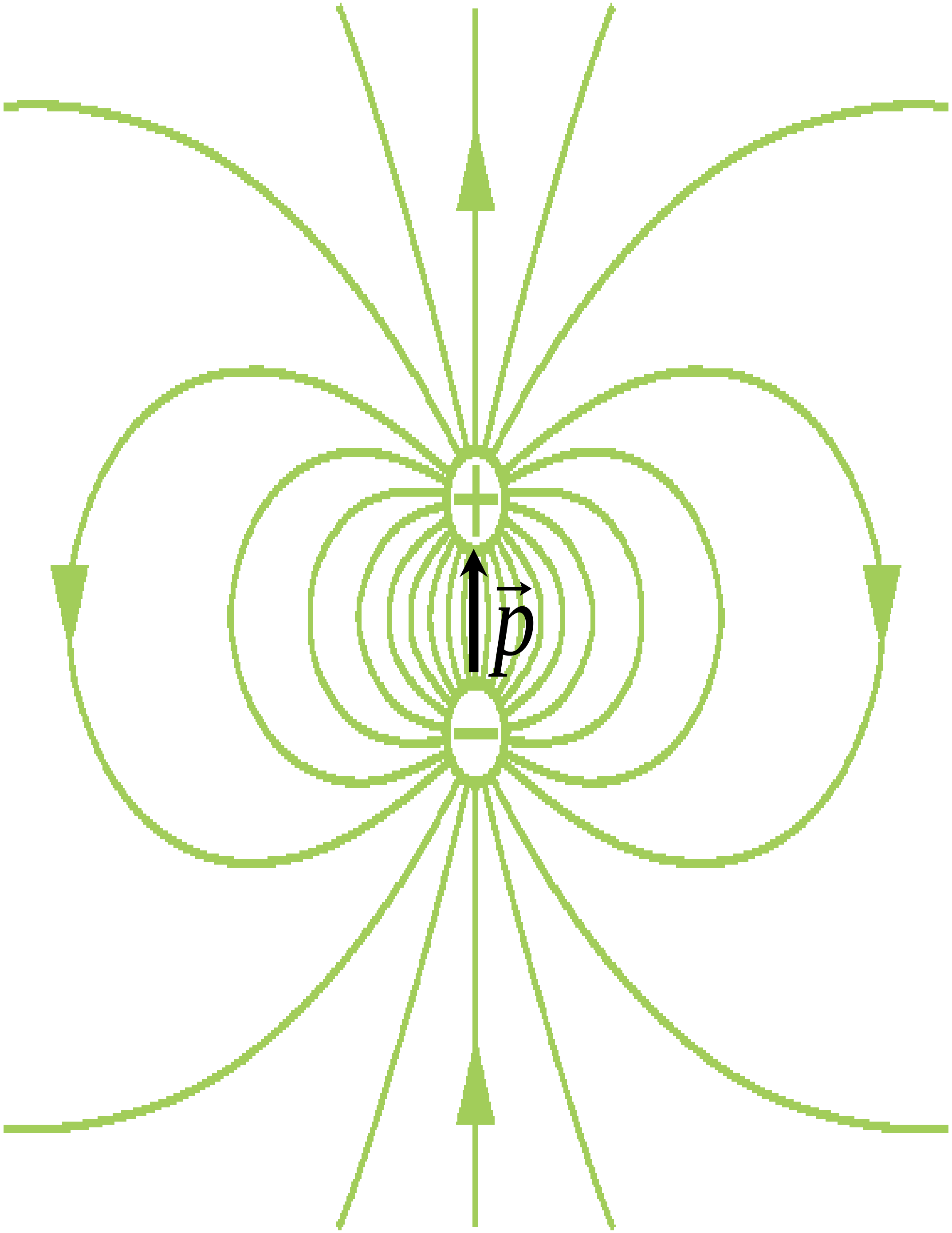
Der Hertz'sche Dipol







Der Hertz‘sche Dipol ist das Standard-
beispiel an dem die Abstrahlung elektro-
magnetischer Wellen diskutiert wird.



Das Feld eines statischen elektrischen Dipols ist (Abschnitt 4.2.11):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\left(\vec{p}\cdot\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}$$

$$\text{mit} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{und} \quad \vec{p} = q\vec{d}$$

Wenn der Abstand d der beiden Ladungen zeitlich veränderlich ist, d.h. $d = d(t)$ und somit $p = p(t)$, dann verändert sich auch das elektrische Feld mit der Zeit, und es wird nach der 4. Maxwell-Gleichung ein Magnetfeld erzeugt.

$\Rightarrow$ Der Dipol strahlt elektromagnetische Wellen ab.

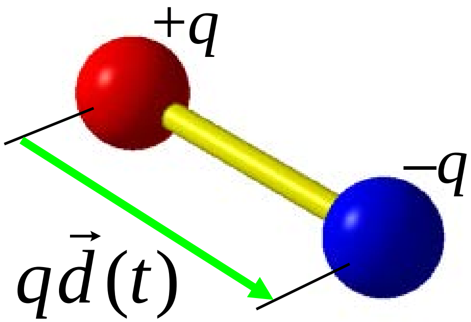
Eine sehr komplizierte Berechnung, die den Rahmen dieser Vorlesung überschreitet, ergibt für das Fernfeld ($r >> d$) eines Dipols mit dem zeitlich veränderlichen Dipolmoment $\vec{p}(t)$:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c\, r}\,\ddot{\vec{p}} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

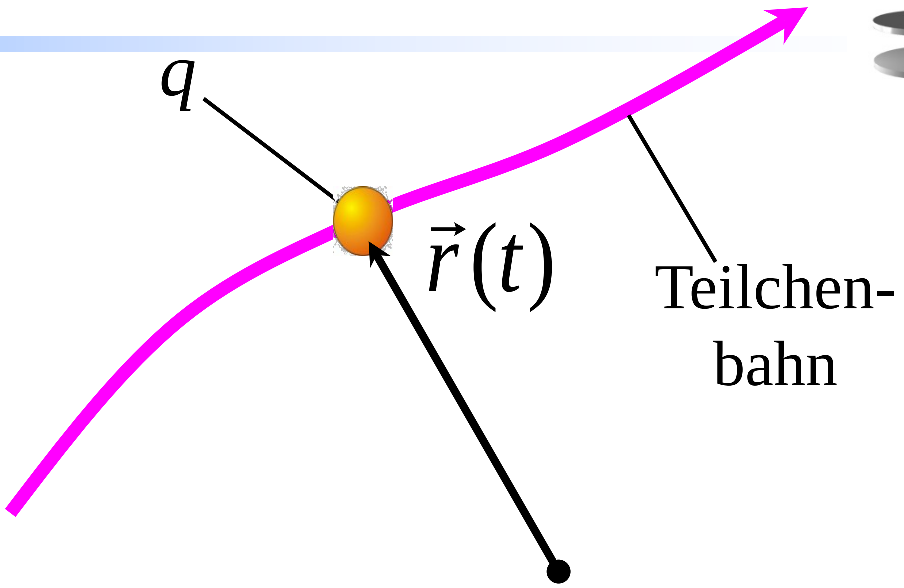
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi\, r}\left(\frac{\ddot{\vec{p}}\cdot\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} - \ddot{\vec{p}}\right)$$

Dabei ist im Argument des Dipolmomentes wegen der endlichen Lichtgeschwindigkeit c nicht die Zeit t selbst, sondern der sog. „retardierte Zeitpunkt" $t - r/c$ einzusetzen, mit (ω - Frequenz der zeitlichen Änderung von p):

$$\vec{p} = \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \vec{p}\left(\omega t - \omega\frac{r}{c}\right) = \vec{p}\left(\omega t - kr\right)$$



$$\vec{p}(t) = q\vec{d}(t)$$



Es gilt also beim Hertz‘schen Dipol:

$$\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right| \propto \left|\vec{B}(\vec{r},t)\right| \propto \ddot{\vec{p}}$$

Wegen

$$\vec{p}(t) = q\vec{d}(t)$$

folgt:

$$\ddot{\vec{p}}(t) = q\ddot{\vec{d}}(t)$$

$\Rightarrow$ Nur eine *beschleunigte Ladung* in einem Dipol strahlt elektromagnetische Wellen ab !

Auch eine einzelne Ladung hat bzgl. eines festen Raumpunktes immer ein Dipolmoment:

$$\vec{p}(t) = q\vec{r}(t)$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = q\ddot{\vec{r}}(t)$$

Dann gilt für die abgestrahlten Felder:

$$\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right| \propto \left|\vec{B}(\vec{r},t)\right| \propto \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$ *Beschleunigte Ladungen* strahlen elektromagnetische Wellen ab.

Die abgestrahlte Leistung

Wir hatten für die Energiedichte im elektromagnetischen Feld gefunden:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Es ist beim Hertz'schen Dipol:

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

Einsetzen in den Ausdruck für die Energiedichte führt auf:

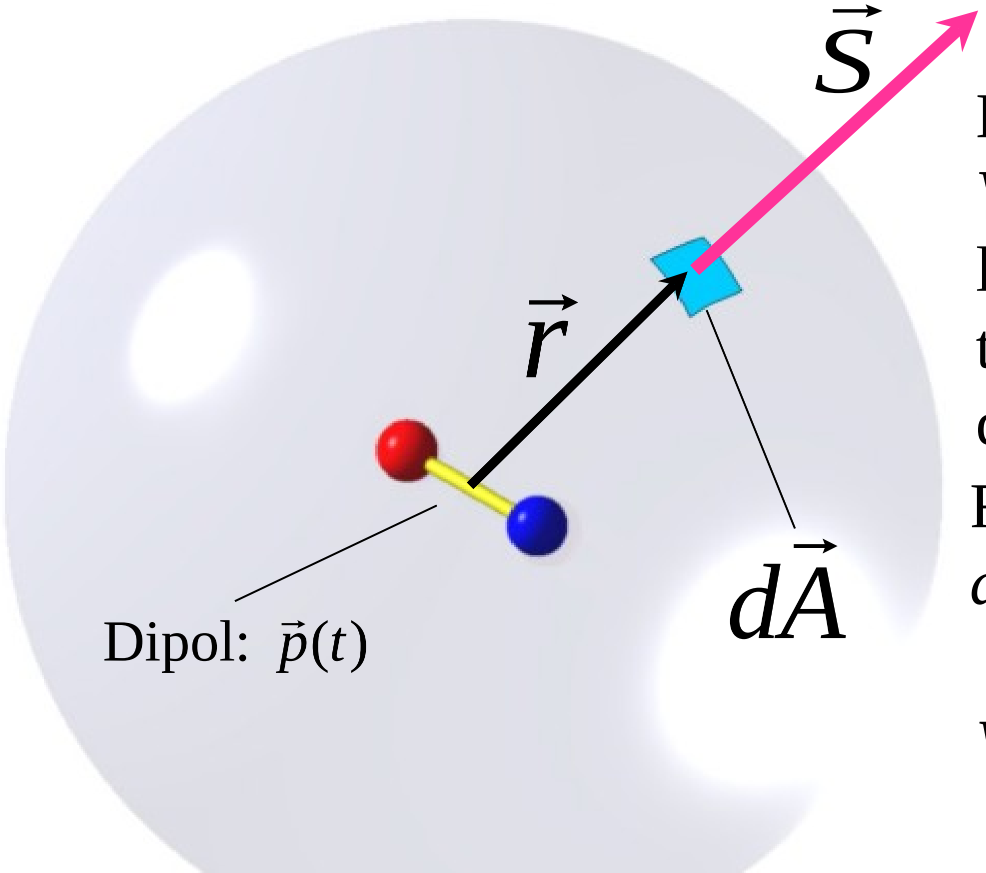
$$w = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 c^2}{r^2}\underbrace{\left|\vec{B}\times\vec{r}\right|^2}_{=r^2B^2} + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$w = \frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_0 c^2}_{=1/\mu_0} B^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}B^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$\Rightarrow \quad w = \frac{1}{\mu_0}B^2 = \varepsilon_0 E^2$$

Die abgestrahlte Energie pro Volumen steckt also zur Hälfte im elektrischen und zur anderen Hälfte im magnetischen Feld. Wir berechnen nun die abgestrahlte Leistung pro Fläche.



Der Vektor $\vec{S}$ ist der sog. *Poynting-Vektor*. Sein Betrag gibt die Strahlungsleistung an, die durch die Fläche *dA* tritt; seine Richtung ist die Richtung des Energieflusses.

Für die Energie *W*, die durch die Fläche *dA* tritt, gilt:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{dW}{dr\,dA} \Rightarrow \frac{dW}{dA} = w\,dr$$

Damit folgt für die abgestrahlte Energie pro Fläche und Zeit, also für die Leistung pro Fläche:

$$S = \frac{dW}{dt\,dA} = \underbrace{w}_{=\frac{B^2}{\mu_0}} \frac{dr}{\underbrace{dt}_{=c}} = \frac{c}{\mu_0} B^2 \Rightarrow \vec{S} = \frac{c}{\mu_0} B^2 \frac{\vec{r}}{r}$$


John Henry Poynting (1852-1914)

Wir betrachten den Ausdruck:

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\frac{c}{r}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right)}_{=\vec{E}}\times\vec{B}$$

$$= \frac{c}{\mu_0 r}\left[\left(\vec{B}\cdot\vec{B}\right)\vec{r} - \underbrace{\left(\vec{B}\cdot\vec{r}\right)}_{=0}\vec{B}\right]$$

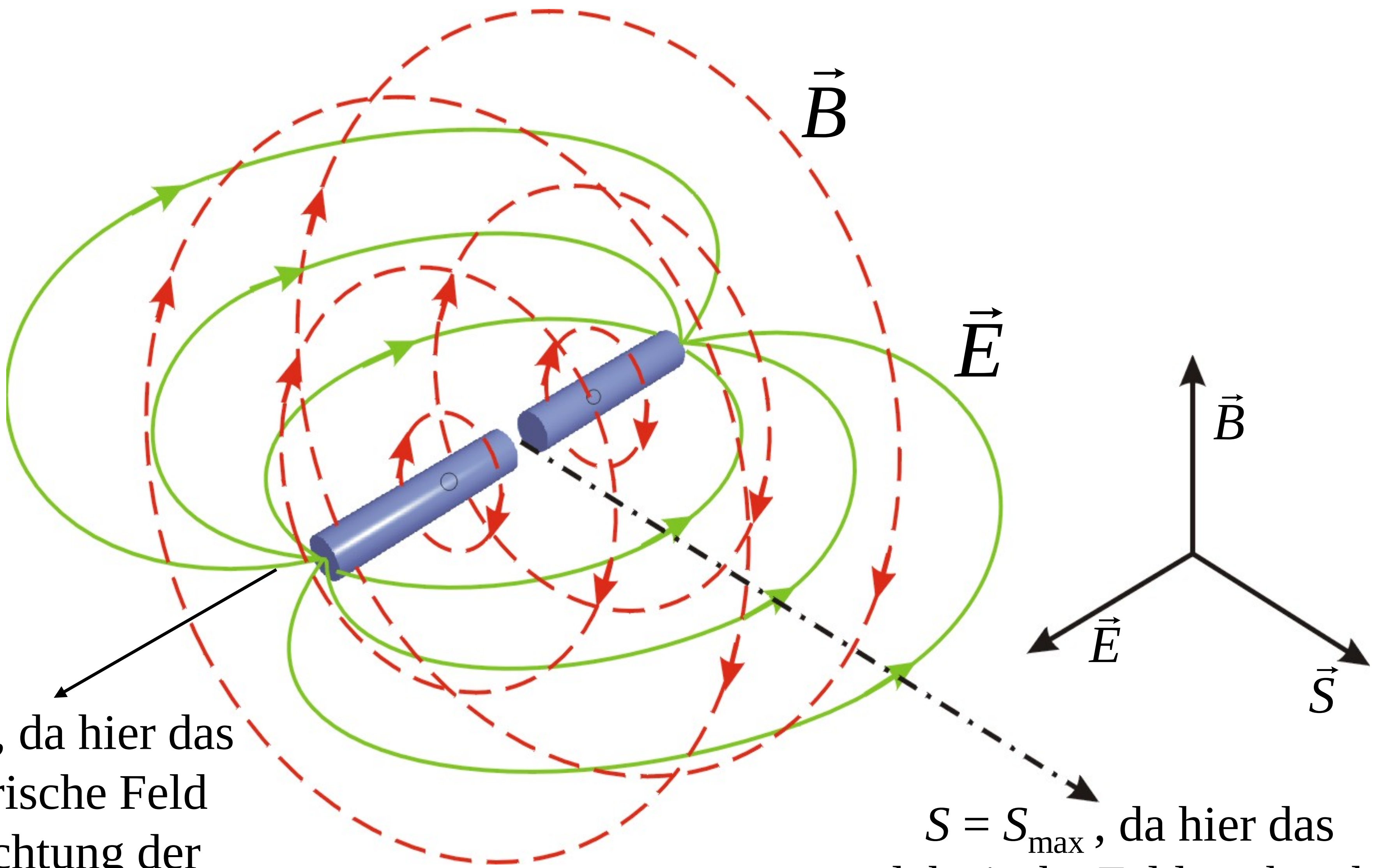
$$= \frac{c}{\mu_0}B^2\frac{\vec{r}}{r}$$

Der Poynting-Vektor kann also auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}}$$

Dieses Resultat gilt allgemein für jede elektromagnetische Welle. Der Poynting-Vektor ist das Vektorprodukt aus dem elektrischen und dem magnetischen Feldvektor und zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Welle.

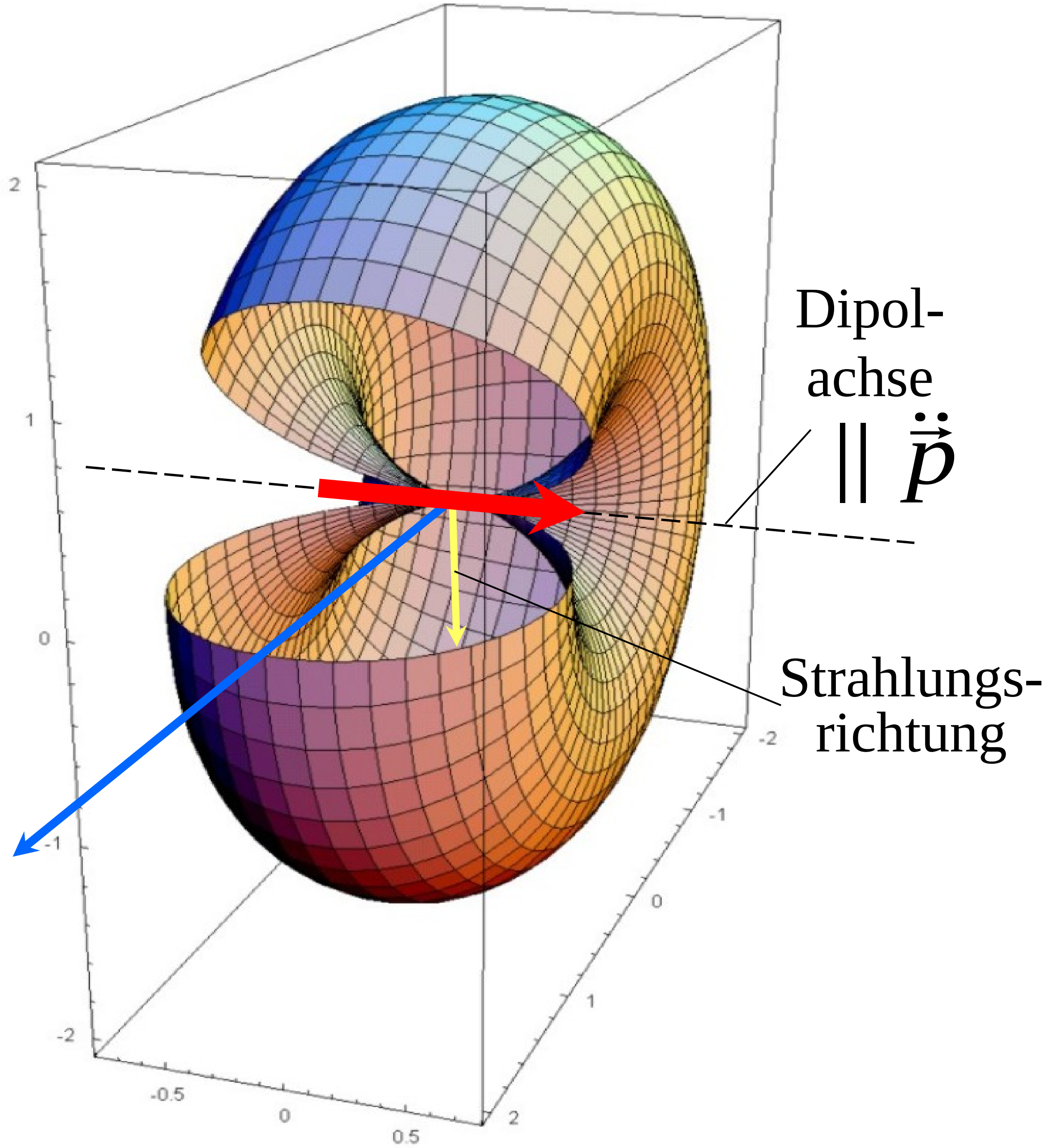
Abstrahlung und Feldverteilung beim Hertz'schen Dipol:



$S = 0$, da hier das elektrische Feld in Richtung der Ausbreitung verläuft: $\vartheta = 0$

$S = S_{max}$, da hier das elektrische Feld senkrecht zur Ausbreitung ist: $\vartheta = 90°$

Strahlungscharakteristik eines Hertz'schen Dipols:



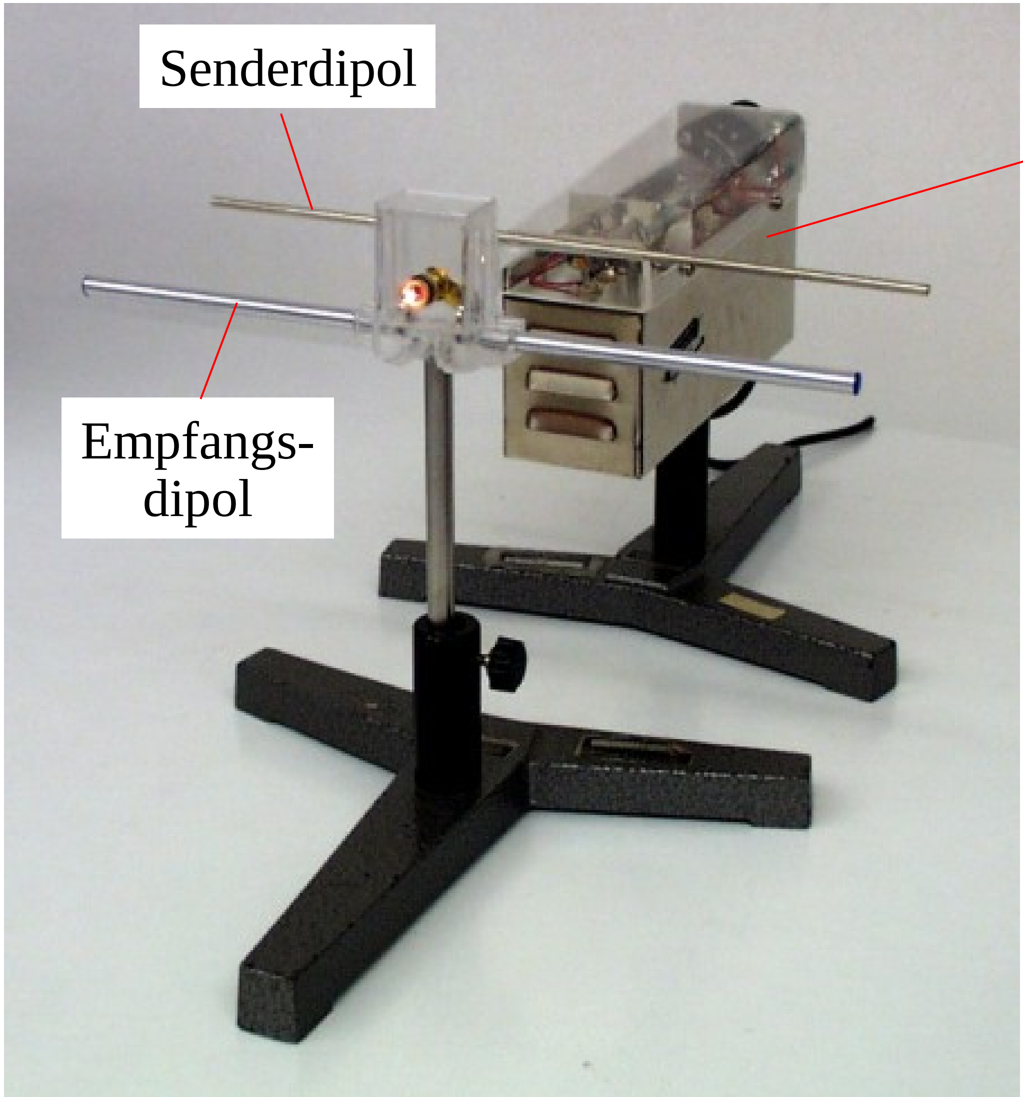
In Richtung der Dipolachse wird keine Strahlung emittiert, also:

$$\vec{S} = \vec{0} \quad \text{falls} \quad \ddot{\vec{p}} \parallel \vec{e}_r$$

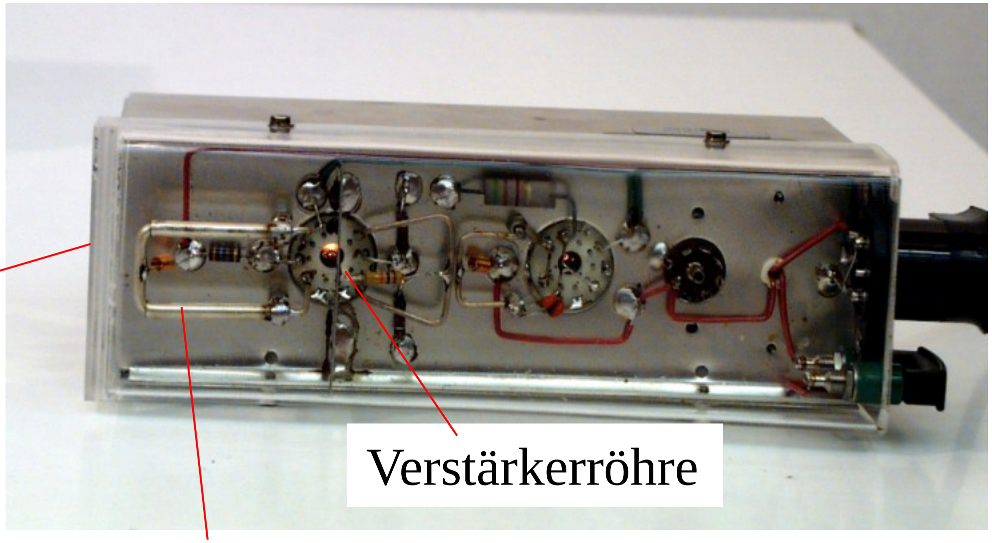
Die maximale Strahlungsleistung wird senkrecht zur Dipolachse abgestrahlt, d.h. wenn:

$$\vec{S} = \vec{S}_{\max} \quad \text{falls} \quad \ddot{\vec{p}} \perp \vec{e}_r$$

Versuch 5: Der Hertz‘sche Dipol als Sender und Empfänger

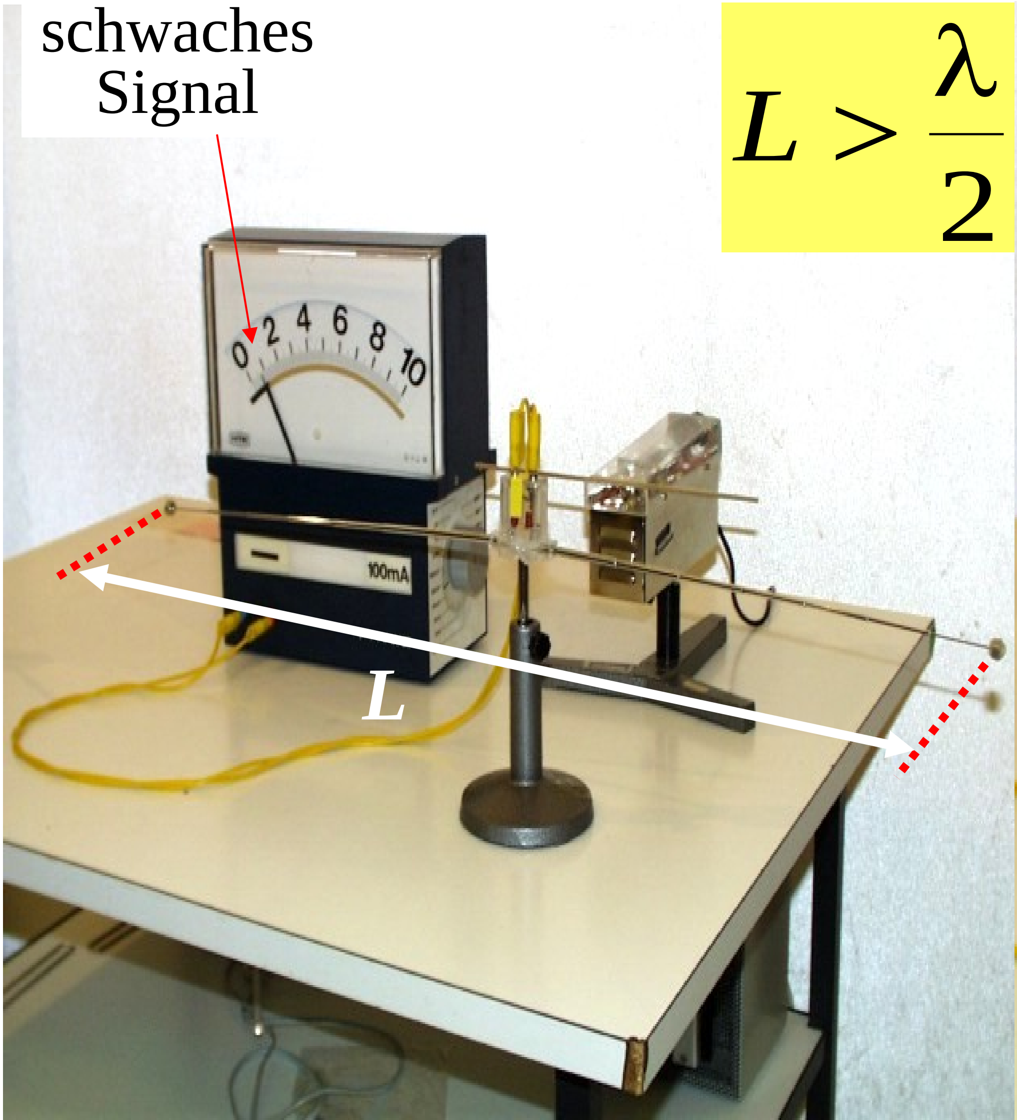


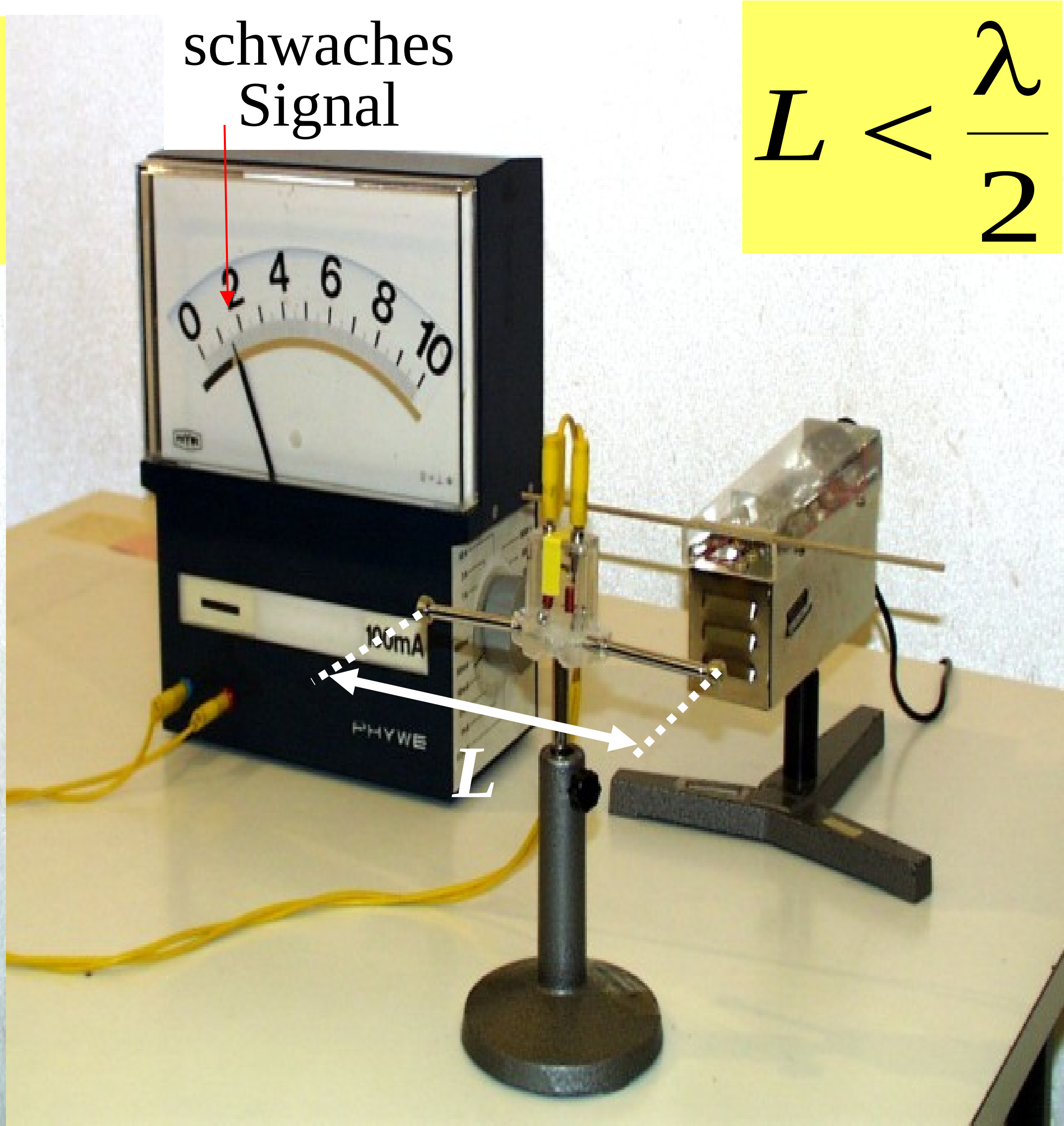
HF-Generator mit Röhrenverstärker



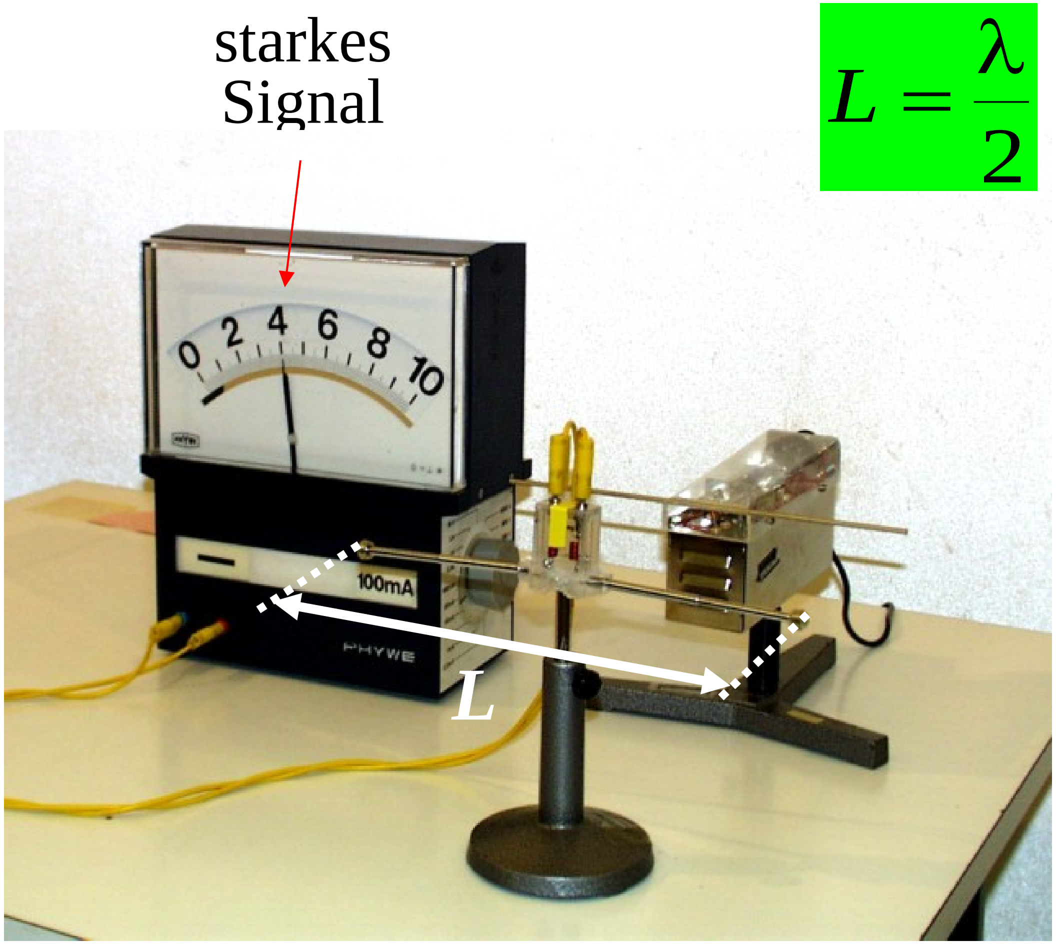
Die von hochfrequentem Wechselstrom durchflossene Auskoppelschleife erzeugt ein magnetisches Wechselfeld, das in dem Dipol eine HF-Spannung induziert. Der Strom in dem Empfangsdipol bringt die Glühbirne zum Leuchten.

Effekte eines zu kurzen und zu langen Dipols:

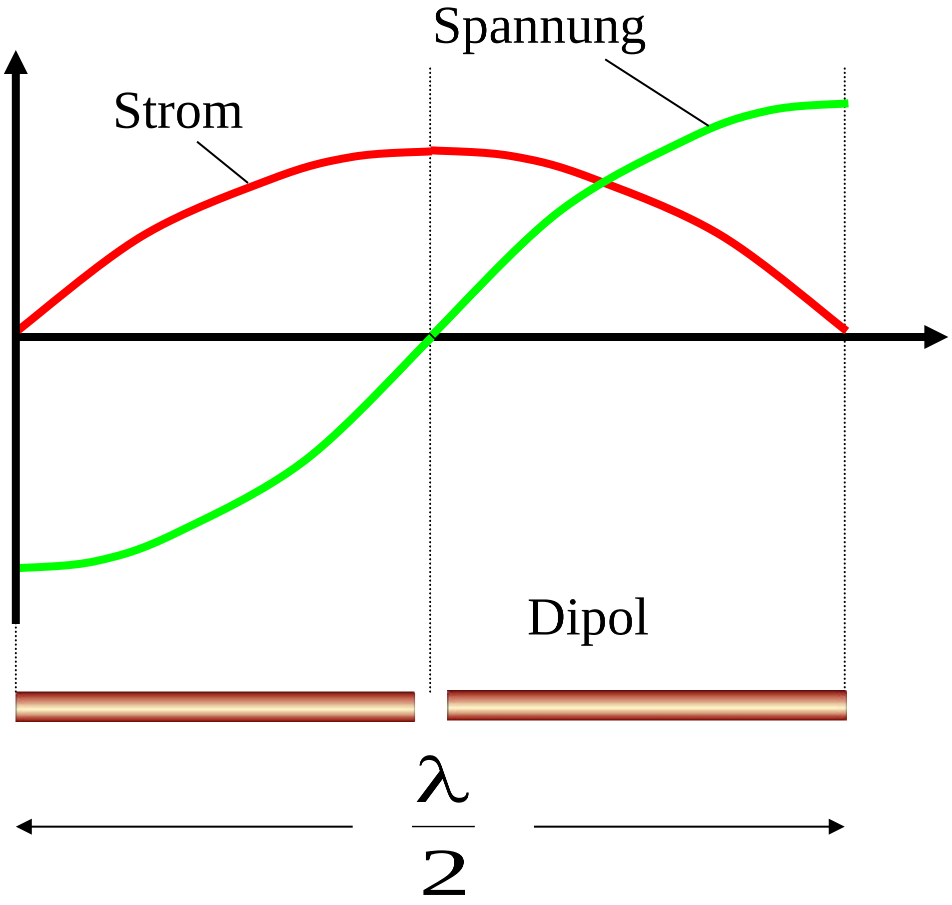




Den besten Wirkungsgrad hat ein Dipol, wenn seine Länge $L = \lambda/2$ beträgt. Dann kann sich eine stehende Welle optimal ausbilden.

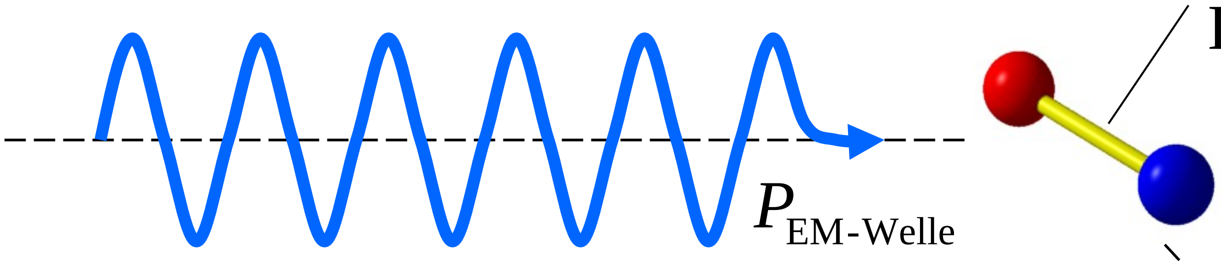


$$L = \frac{\lambda}{2}$$



Ein optimal abgestimmter Dipol ist gleichermaßen gut zum Senden wie zum Empfangen von elektromagnetischen Wellen geeignet.

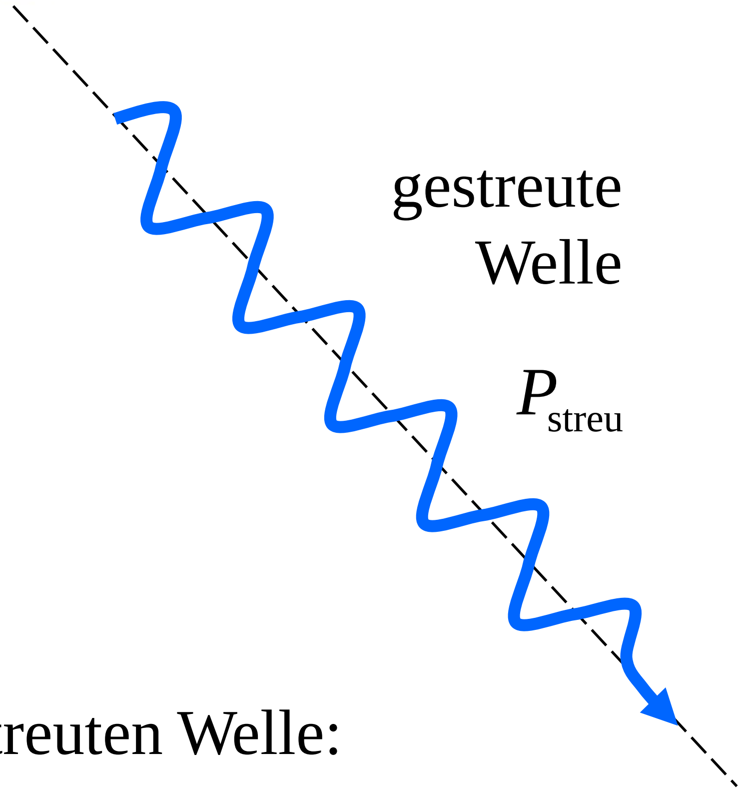
Streuung von elektromagnetischen Molekülen an Molekülen



Die einlaufende Lichtwelle regt das Molekül zu erzwungenen Schwingungen an. Es strahlt dann wie ein Hertz'scher Diplol.
Mit einer periodischen Anregung durch die einlaufende Welle folgt:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}_0 \cos(\omega t) = -\omega^2 \vec{p}$$



Damit gilt für die abgestrahlte Leistung der gestreuten Welle:

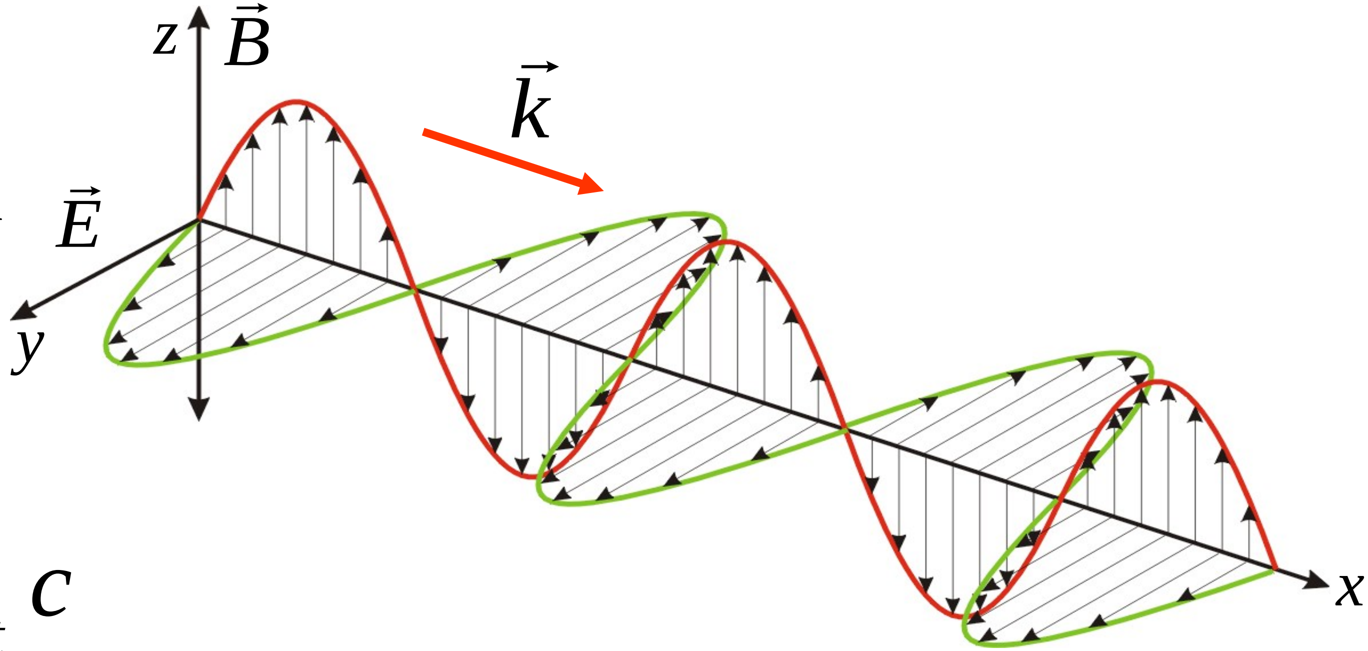
$$P_{\text{streu}} \propto \left|\ddot{\vec{p}}\right|^2 \propto \omega^4 \quad (!)$$

Hochfrequente Wellen werden deutlich stärker gestreut !

Wäre es umgekehrt, d.h. wäre etwa $P \propto 1/\omega^4$, dann wäre der Himmel rot !

Die Intensität und der Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle

Wir definieren zunächst den Begriff der Intensität einer elektromagnetischen Welle. Die Intensität I ist die *mittlere* übertragene Leistung pro Fläche, also:



$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle_t = \langle w \rangle_t \, c$$

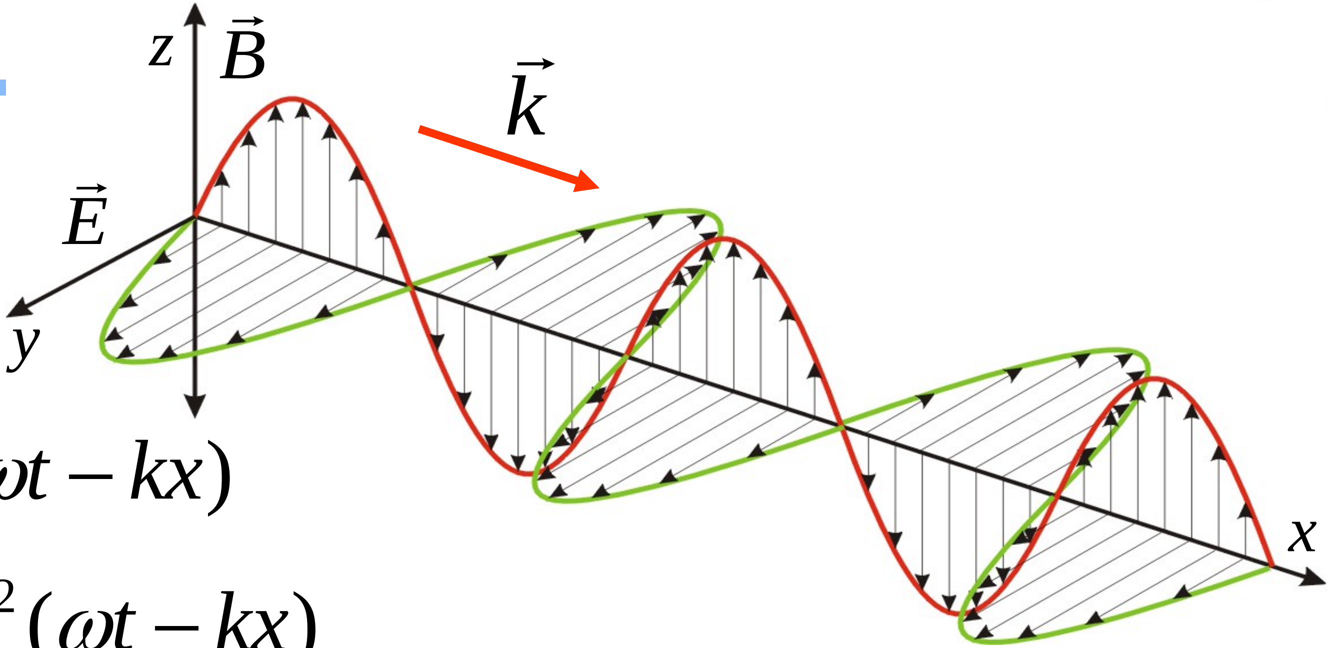
Hierbei ist $\vec{S}$ der schon eingeführte Poynting-Vektor und $\langle w \rangle_t$ die über die Zeit gemittelte Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.

Beispiel 1: Die Intensität einer harmonischen ebenen elektromagnetischen Welle.

$$\vec{E} = \hat{y} E_0 \cos(\omega t - kx) \qquad \vec{B} = \hat{z} B_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\vec{S} = \mu_0^{-1} \vec{E} \times \vec{B} = \hat{x} \mu_0^{-1} E_0 B_0 \cos^2(\omega t - kx)$$

Nun muß der Betrag des Poynting-Vektors gebildet und über die Zeit gemittelt werden:



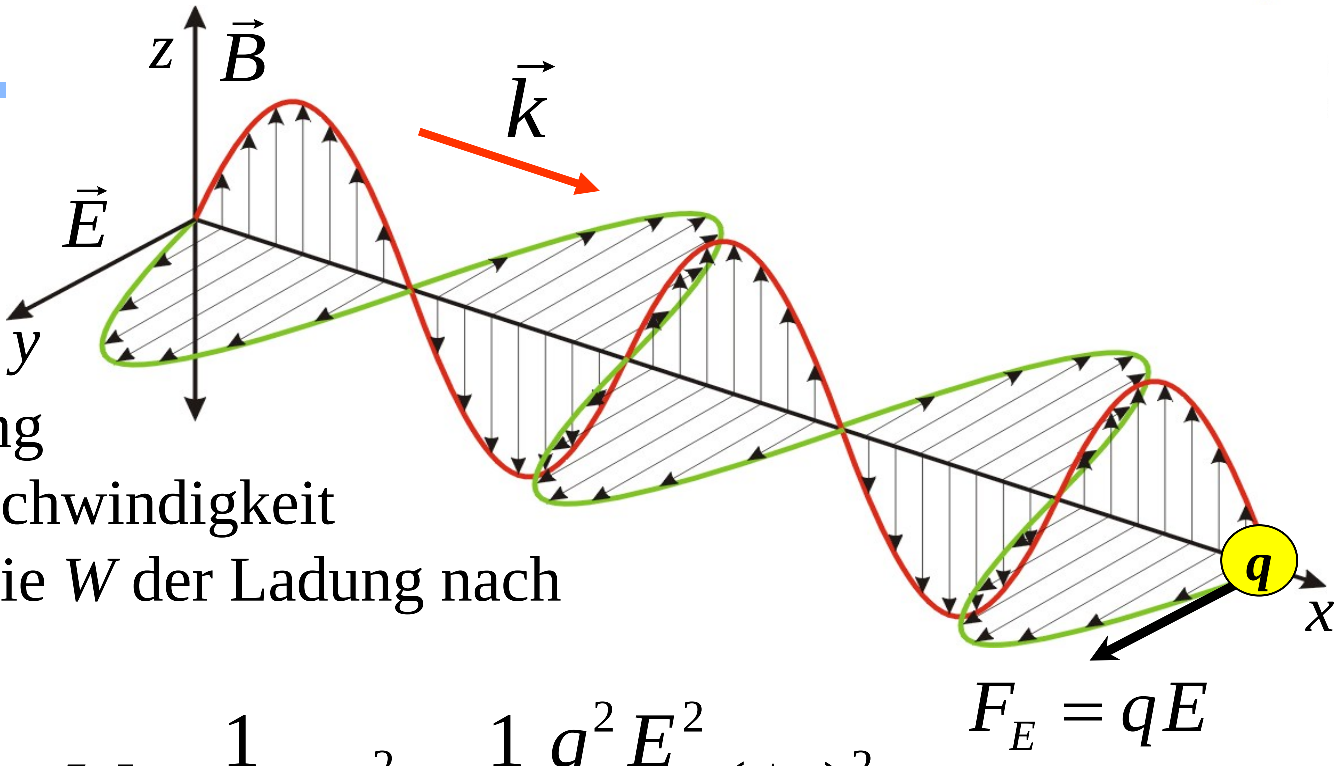
$$\vec{S} = \hat{x}\mu_0^{-1} E_0 B_0 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{S}\right| = \mu_0^{-1} E_0 B_0 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\Rightarrow I = \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle_t = \mu_0^{-1} E_0 B_0 \underbrace{\left\langle \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle_t}_{=1/2}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{B_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\mu_0} E_{\text{eff}} B_{\text{eff}}$$

$$\langle w \rangle_t = \left\langle \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right\rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{B_0\, E_0/c}{2\mu_0} = \frac{1}{c} \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{I}{c}$$



Wir betrachten nun eine Ladung q mit der Masse m, die vom elektrischen Feld der Welle in y-Richtung beschleunigt wird. Die Geschwindigkeit v_y und die kinetische Energie W der Ladung nach der Zeit Δt ist:

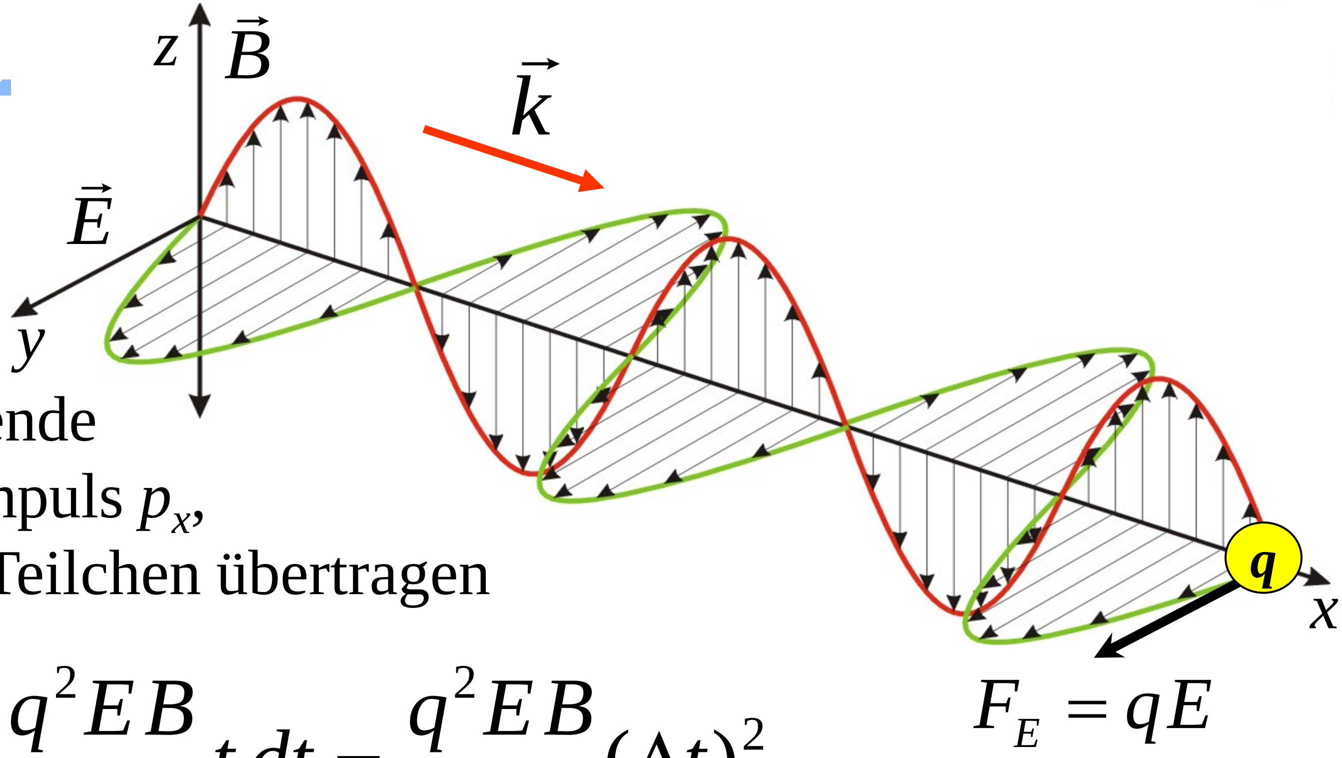
$$v_y = a\Delta t = \frac{qE}{m}\Delta t \qquad W = \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m}(\Delta t)^2$$

Die Welle hat die Energie W auf das Teilchen übertragen.

Da sich die Ladung im Magnetfeld der Welle in y-Richtung bewegt, wird sie durch die Lorentz-Kraft in x-Richtung abgelenkt. Für einen beliebigen Zeitpunkt t gilt:

$$F_{L,x} = qv_yB = \frac{q^2EB}{m}t$$

$$F_{L,x} = qv_y B = \frac{q^2 E B}{m} t$$



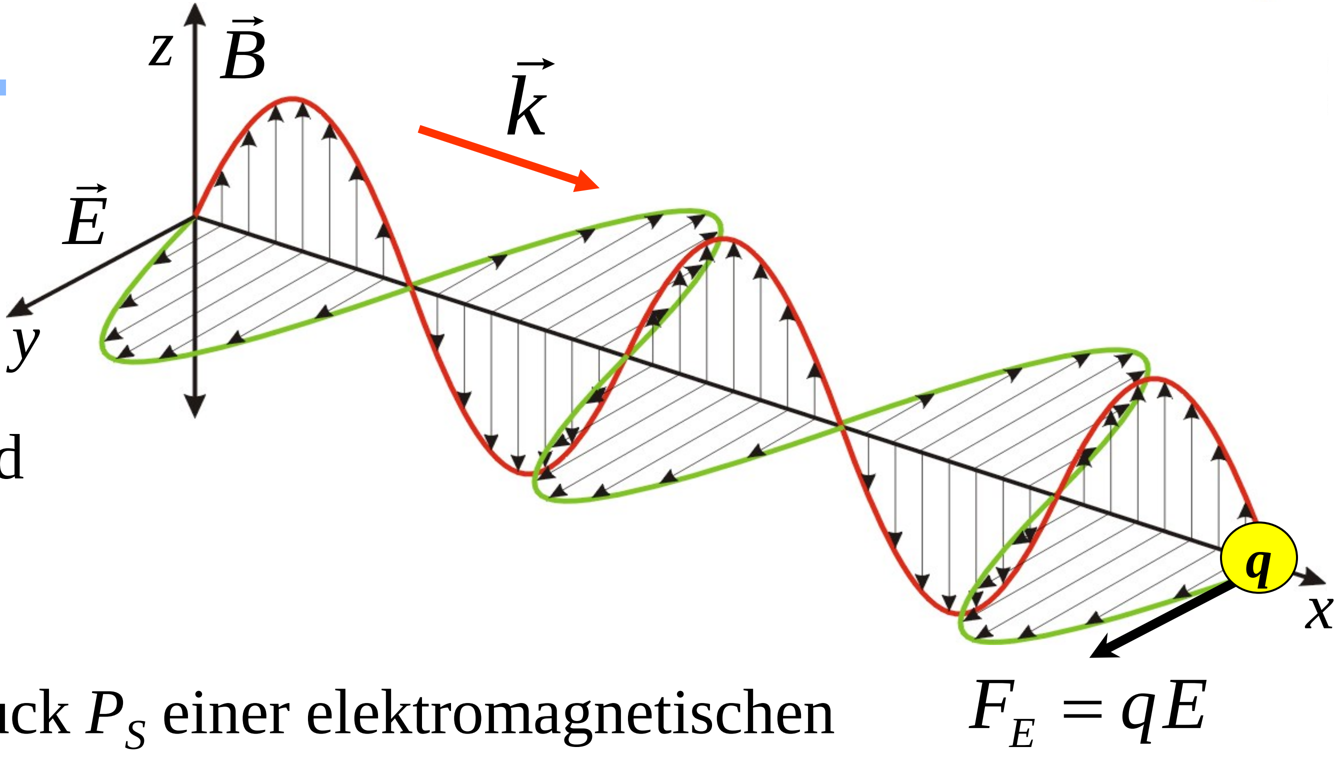
Der auf das Teilchen wirkende Kraftstoß ist gleich dem Impuls p_x, der von der Welle auf das Teilchen übertragen wird:

$$p_x = \int_0^{\Delta t} F_{L,x} dt = \int_0^{\Delta t} \frac{q^2 E B}{m} t\, dt = \frac{q^2 E B}{2m} (\Delta t)^2$$

Wegen $B = E/c$ ergibt sich:

$$p_x = \frac{q^2 E B}{2m} (\Delta t)^2 = \frac{1}{c} \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} (\Delta t)^2 = \frac{W}{c}$$

Der von der elektromagnetischen Welle übertragene Impuls ist also gleich der übertragenen Energie W dividiert durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit c.



Die Intensität I einer Welle ist die übertragene Energie pro Zeit und Fläche.
Wegen $p = W/c$ ist I/c also ein Impuls pro Zeit und Fläche, also eine Kraft pro Fläche $\Rightarrow$ Druck !

Daher ist der Strahlungsdruck P_S einer elektromagnetischen Welle:

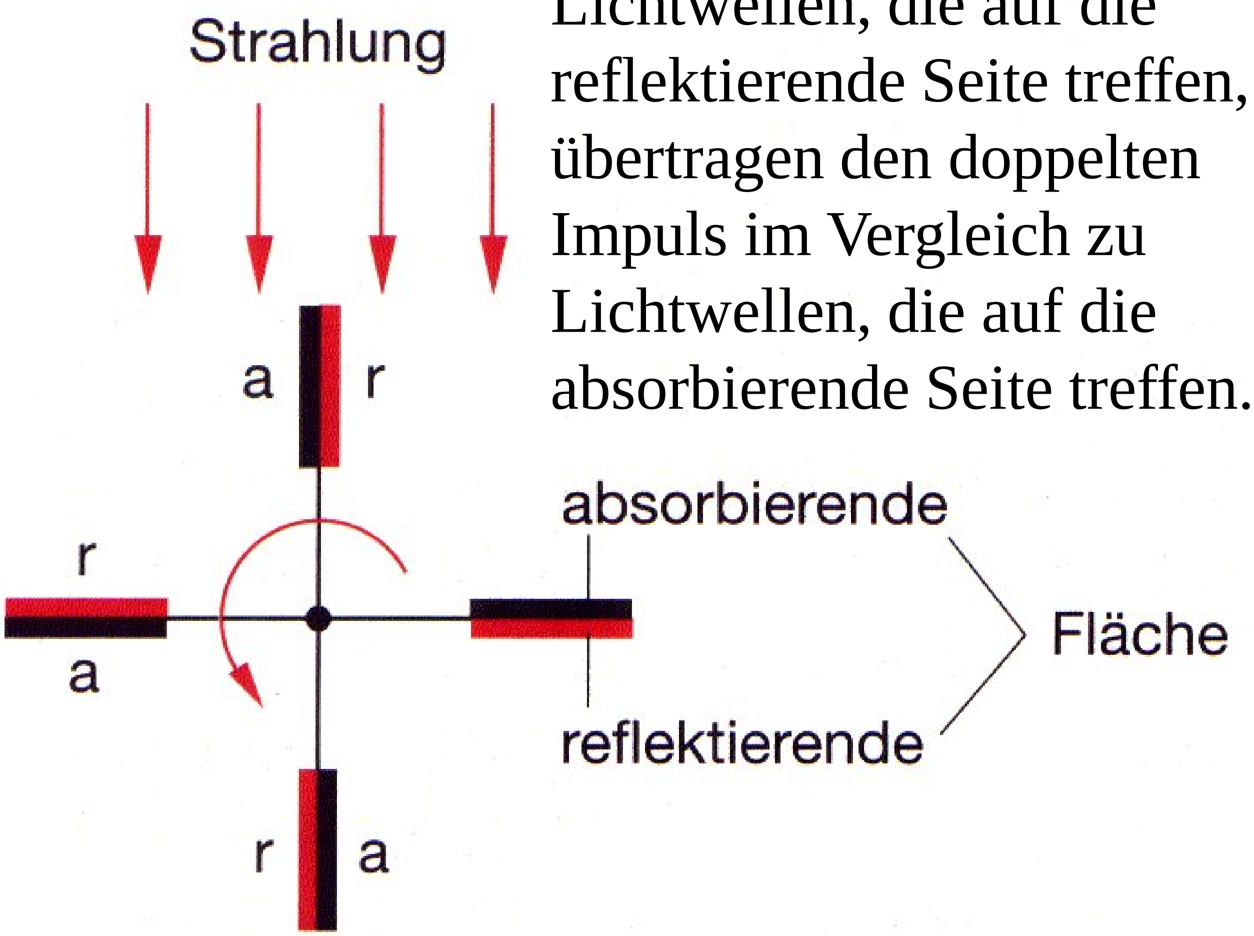
$$\boxed{P_S = \frac{I}{c} = \frac{1}{c}\left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle_t = \left\langle w \right\rangle_t}$$

Beispiel 2: Der Strahlungsdruck einer ebenen harmonischen elektromagnetischen Welle.

$$\vec{E} = \hat{y} E_0 \cos(\omega t - kx) \quad \vec{B} = \hat{z} B_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$I = E_0 B_0 / 2\mu_0 \Rightarrow P_S = E_0 B_0 / 2\mu_0 c$$

Beispiel 3: Die Funktionsweise eines Radiometers



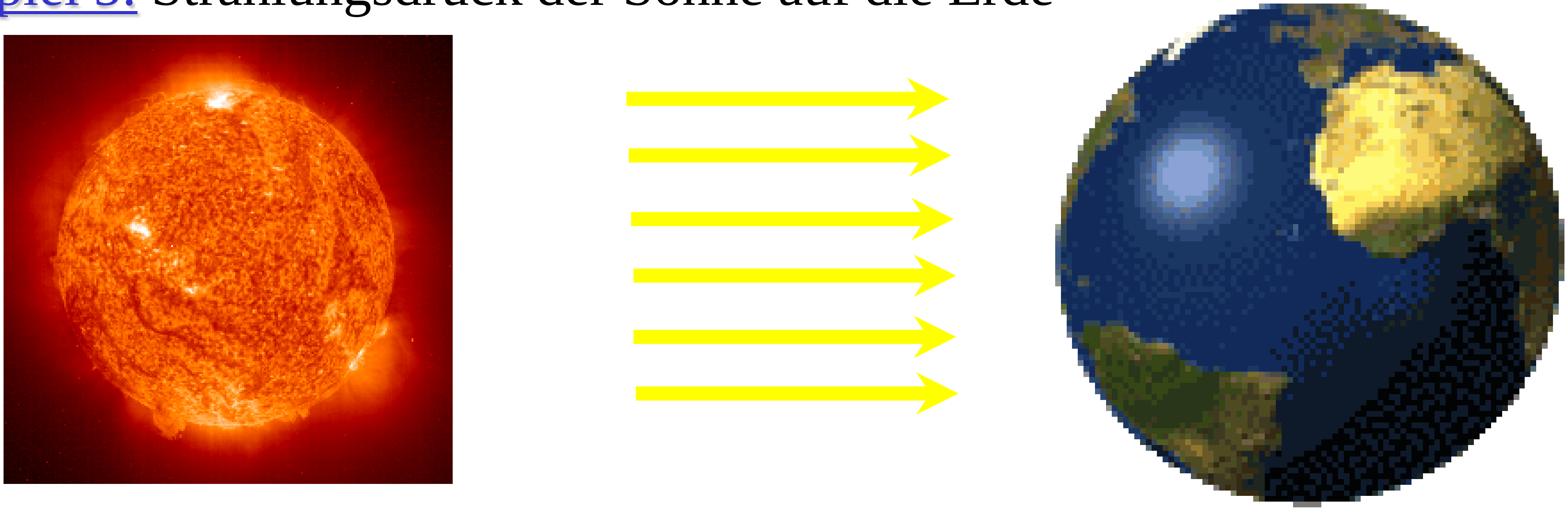
Lichtwellen, die auf die reflektierende Seite treffen, übertragen den doppelten Impuls im Vergleich zu Lichtwellen, die auf die absorbierende Seite treffen.

In der Praxis dreht sich das Radiometer aber genau anders herum! Warum?

Beispiel 4: Der „Schweif“ von Kometen wird durch den Strahlungsdruck (und durch den Sonnenwind) von der Sonne weggedrückt.

Abb. 7.13. Photographie des Kometen Mrkos, 1957 d. Mit freundlicher Genehmigung der Hale Observatories

Beispiel 5: Strahlungsdruck der Sonne auf die Erde



Die mittlere Intensität der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche ist:

$$I \approx 1400 \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2} \Rightarrow P_S \approx \frac{1400}{3 \cdot 10^8} \frac{\text{Watt}}{\text{m/s}\,\text{m}^2} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Dies ist im Vergleich zum Luftdruck $P_L \approx 1000$ hPa $= 10^5$ N/m^2 minimal.

Auf die ganze Erde wirkt dann die Kraft:

$$F = P_S \, \pi R_{\text{Erde}}^2 \approx 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 3.14 \cdot (6400\text{km})^2$$

$$\approx 6.4 \cdot 10^8 \,\text{N} \approx 65000 \text{ Tonnen} \times g \quad !!!$$