

Inhalt der Vorlesung B1

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Einleitung

Ladungen & Elektrostatische Felder

Elektrischer Strom

Magnetostatik

Elektrodynamik: Die Maxwell'schen Gleichungen

Wechselstromnetzwerke

Elektromagnetische Wellen & Strahlung

5. Optik

Licht als elektromagnetische Welle

Geometrische Optik

Optische Abbildungen

Wellenoptik

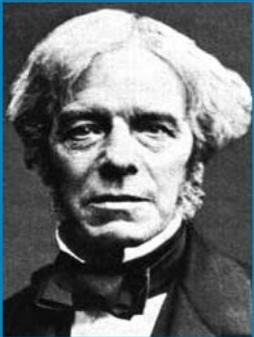


Zusammenfassende Darstellung aller Maxwell-Gleichungen

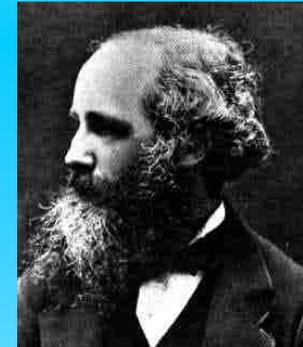
$$(1) \quad \oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(O)} \rho dV$$



$$(2) \quad \oiint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

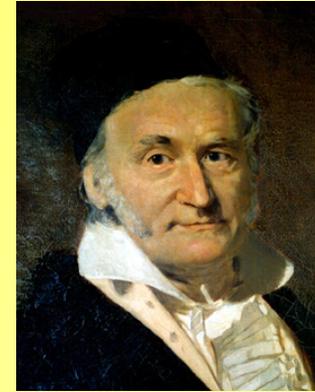


$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



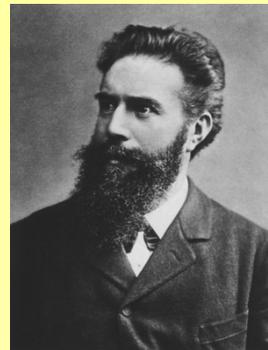
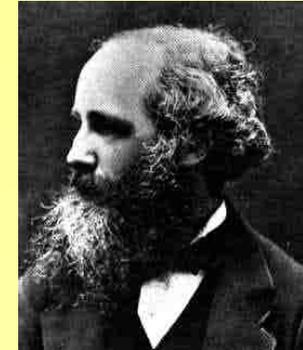
Differenzielle Form der Maxwell-Gleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

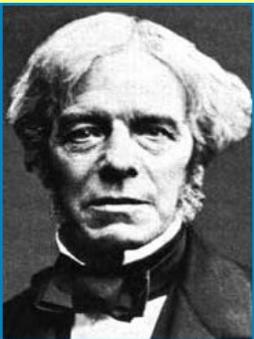


$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$





Ladungserhaltung & Maxwell-Gleichungen

Die 4. Maxwell'sche Gleichung lautet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wenn auf beiden Seiten die Divergenz berechnet wird, dann folgt:

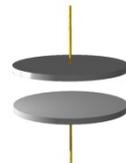
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Für jedes Vektorfeld gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

Damit folgt sofort:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right)$$



$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right)$$

Wegen der ersten Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

folgt für die rechte Seite der obigen Gleichung:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung, die die Ladungserhaltung eines abgeschlossenen Systems widerspiegelt. Damit ist gezeigt, dass die Ladungserhaltung bereits in den Maxwell-Gleichungen enthalten ist.



Elektrische und magnetische Felder in Materie

Bisher wurden aus der Elektronendichte
und der Stromdichte

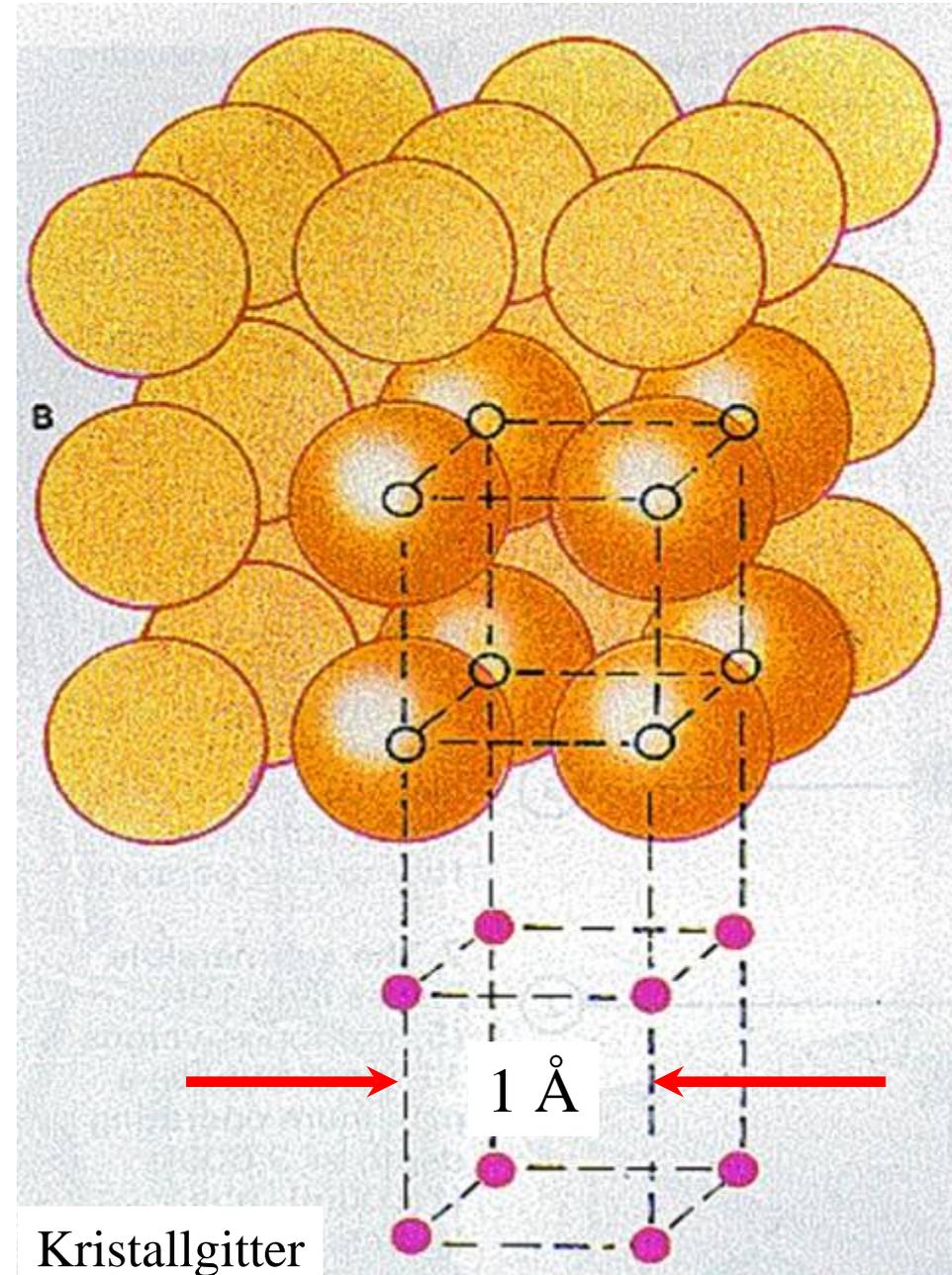
$$\rho(\vec{r}, t) \quad \text{und} \quad \vec{j}(\vec{r}, t)$$

die elektrischen und magnetischen
Felder

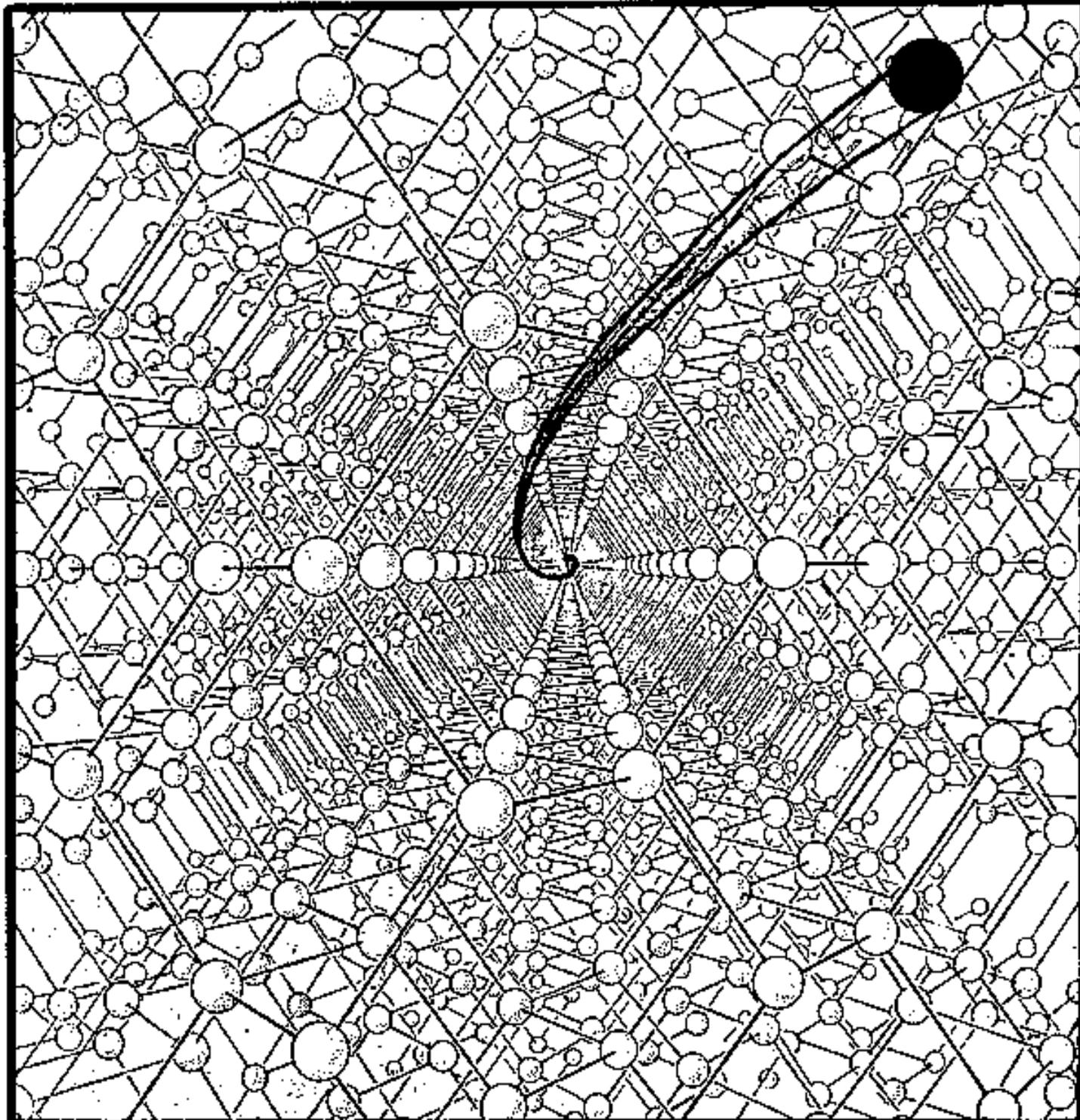
$$\vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{r}, t)$$

mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen
bestimmt. Diese gelten im Prinzip bis
hinab zu atomaren Dimensionen, also
bis etwa:

$$d_{\text{Atom}} \approx 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$$



Die auf atomaren Dimensionen stark variierenden lokalen Felder um die einzelnen Atome werden von einem durch den Kristall fliegenden geladenen Teilchen „gesehen“ (das Teilchen kann sogar durch die Potentiale stabil geführt werden \Rightarrow „Channeling“).



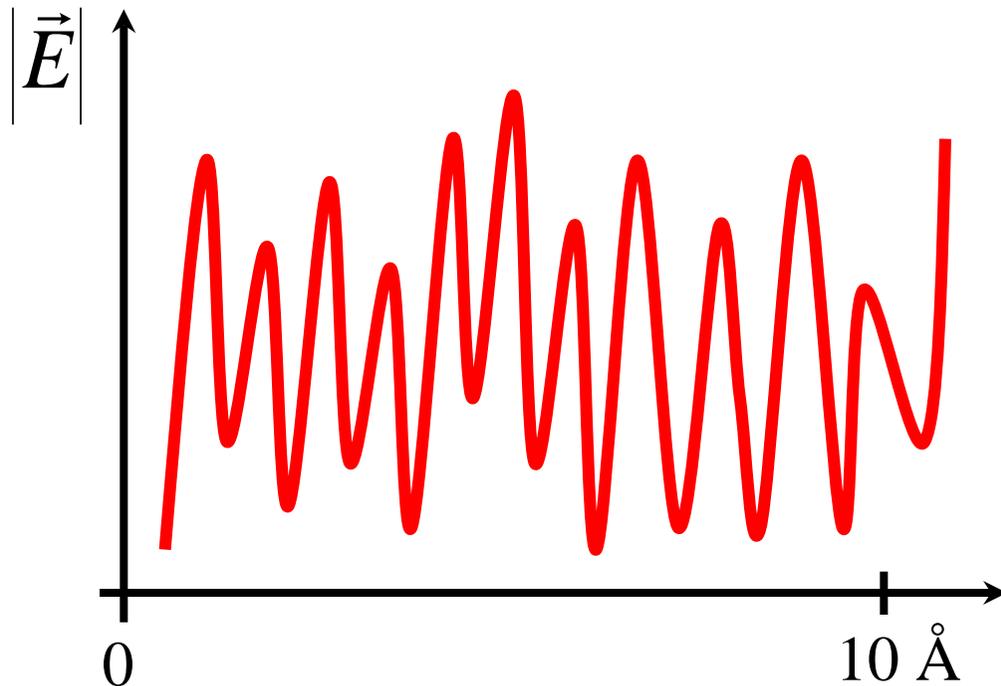


Die Ladungs- und Stromdichten sind in atomaren Dimensionen also starken Schwankungen unterworfen, d.h.

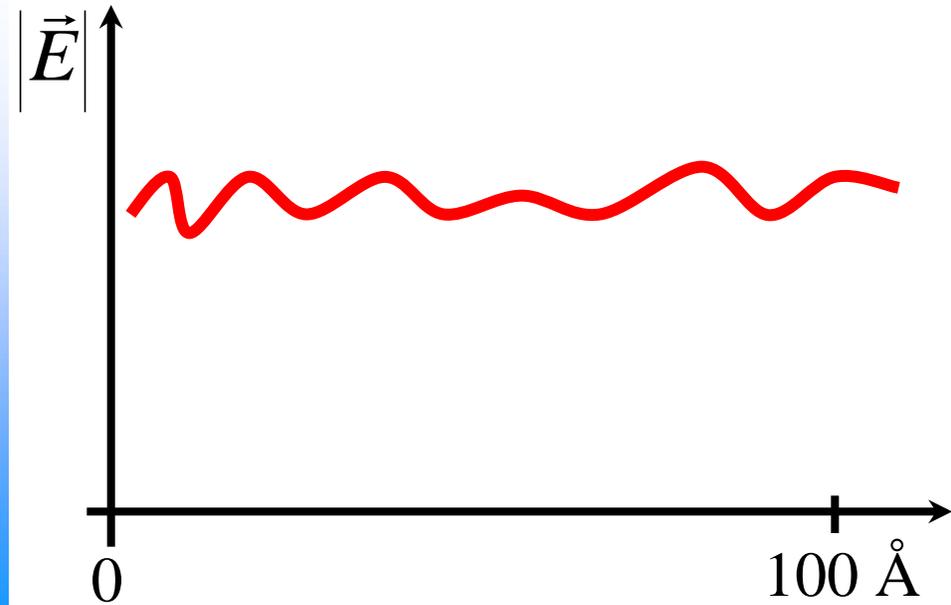
$$\rho_{\text{Atom}}(\vec{r}, t), \quad \vec{j}_{\text{Atom}}(\vec{r}, t)$$

sind sehr stark ortsabhängig. Dies kann folgendermaßen veranschaulicht werden:

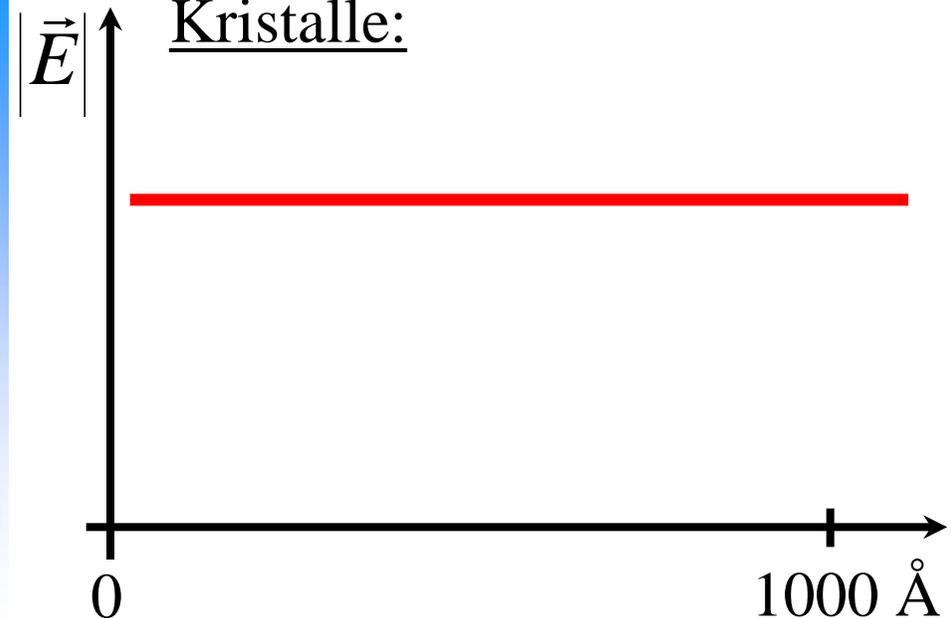
Atomare Struktur:

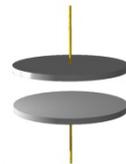


Riesenmoleküle, Cluster:



Kristalle:





Die Maxwell-Gleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

gelten aber für *alle* Felder, Ladungen und Ströme. Sie gelten also sowohl für die *makroskopischen* „von Außen“ vorgegebenen, als auch für die *mikroskopischen* Ladungsverteilungen und Ströme.

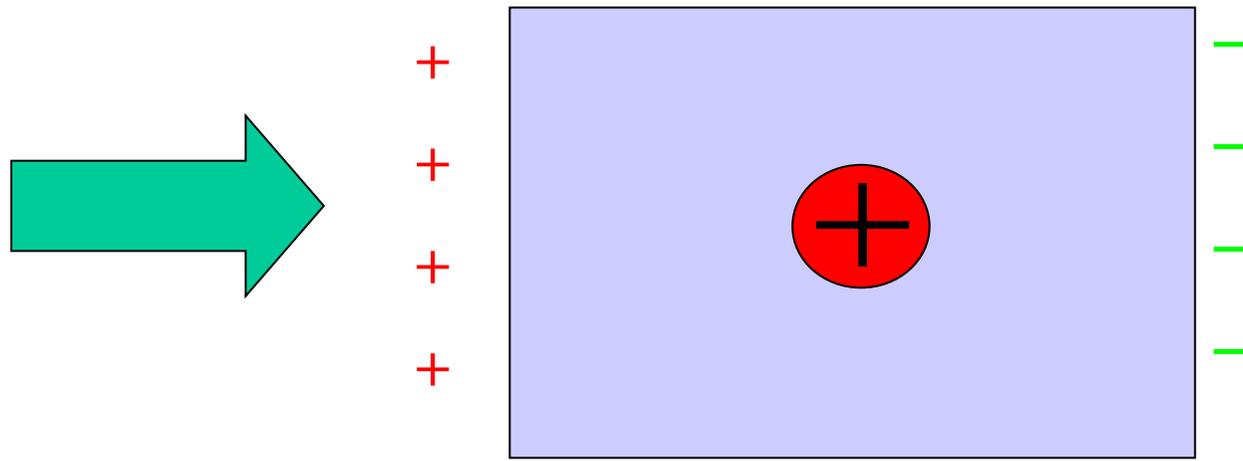
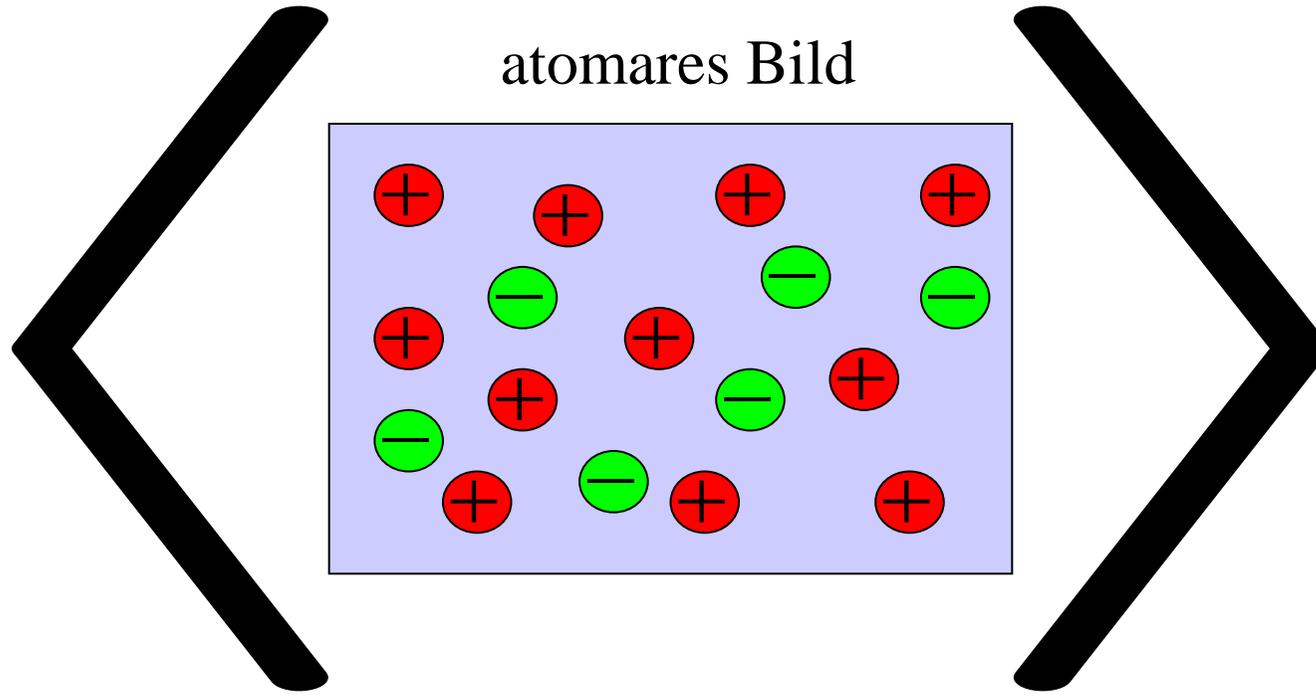
In Materie befinden sich aber ungefähr 10^{23} Teilchen, so dass eine exakte Feldberechnung an jedem Ort nicht sinnvoll erscheint, sondern „gemittelte“ Größen betrachtet werden müssen. Die Maxwell-Gleichungen lauten dann:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \langle \vec{E} \rangle = -\frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \langle \vec{B} \rangle = \mu_0 \left(\langle \vec{j} \rangle + \epsilon_0 \frac{\partial \langle \vec{E} \rangle}{\partial t} \right)$$

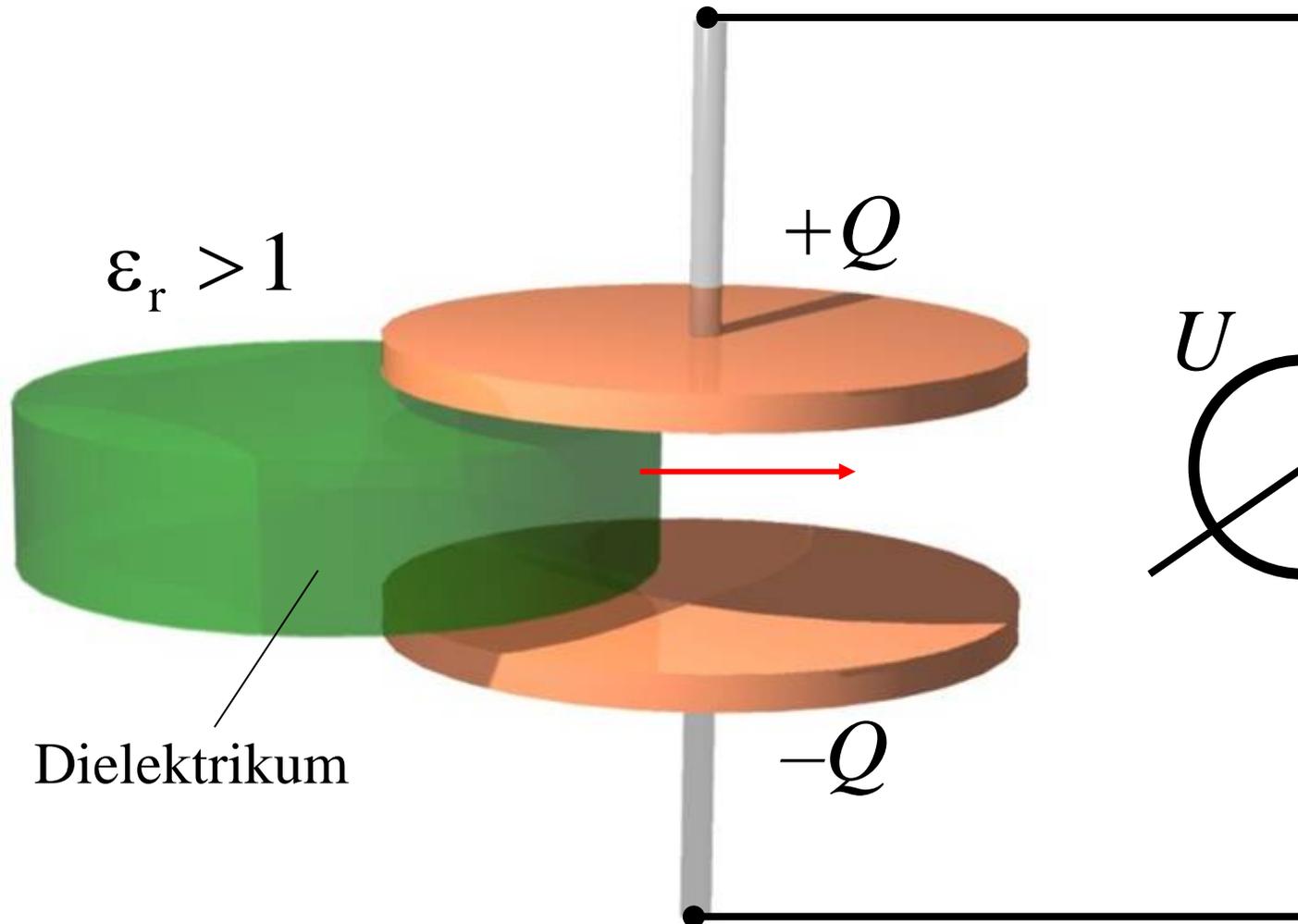


makroskopisches
Bild
(Ladung + Dipol +
höhere Multipole)



Das elektrische Feld in Materie

Versuch: Dielektrikum im Kondensator



Durch Einbringen eines Materials zwischen die Platten erhöht sich die Kapazität des Kondensators.

$$C = \frac{Q}{U}$$



Wir definieren die Dielektrizitätskonstante ϵ_r eines Mediums durch den folgenden Zusammenhang:

$$\epsilon_r = \frac{C_{\text{Dielek.}}}{C_{\text{Vakuum}}}$$

Dabei ist $C_{\text{Dielek.}}$ die Kapazität eines Plattenkondensators, der mit dem Medium zwischen den Platten aufgefüllt wurde, und C_{Vakuum} die Kapazität ohne Medium zwischen den Platten. Es ist immer $\epsilon_r \geq 1$.

Für die Kapazität C eines Kondensators mit der Fläche A und dem Plattenabstand d und einem Medium mit der

Dielektrizitätskonstanten ϵ_r zwischen den Platten gilt daher:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

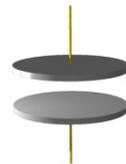
Die Kapazität des Kondensators vergrößert sich also um den Faktor ϵ_r , d.h. es kann bei gleicher Spannung wegen $C = Q/U$ mehr Ladung auf den Kondensatorplatten gespeichert werden.

Es stellt sich heraus, dass die Dielektrizitätskonstante ϵ_r eines Mediums stark Materialabhängig ist. Wir werden im Folgenden sehen, dass ϵ_r mit der Polarisierung des Materials zusammenhängt.

Tabelle 21.1 Dielektrizitätszahlen und Durchschlagsfestigkeiten einiger Stoffe

Material	Dielektrizitätszahl ϵ_r	Durchschlagsfestigkeit/kV · mm ⁻¹
Bakelit	4,9	24
Glas	5,6	14
Glimmer	5,4	10 – 100
Luft	1,00059	3
Neopren	6,9	12
Papier	3,7	16
Paraffin	2,1 – 2,5	10
Plexiglas	3,4	40
Polystyrol	2,55	24
Porzellan	7	5,7
Transformatorenöl	2,24	12
Wasser (20 °C)	80	

$$\epsilon_r = \frac{C_{\text{Dielek.}}}{C_{\text{Vakuum}}}$$



Wir betrachten jetzt die elektrischen Felder im Kondensator und werden aus deren Größe auf die vorhandenen Ladungen zurückschließen. Die elektrischen Felder im Kondensator bei gleicher Ladung Q auf den Platten sind:

Ohne Dielektrikum:
$$E_{\text{Vak}} = \frac{U_{\text{Vak}}}{d} = \frac{Q}{d C_{\text{Vak}}}$$

Mit Dielektrikum:
$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{d C} = \frac{Q}{d \epsilon_r C_{\text{Vak}}} = \frac{U_{\text{Vak}}}{\epsilon_r d} = \frac{E_{\text{Vak}}}{\epsilon_r} < E_{\text{Vak}}$$

⇒ Das Feld E und die Spannung U werden also um den Faktor $1/\epsilon_r$ durch das Dielektrikum reduziert. Wegen des Gauß'schen Satzes

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ges}}}{\epsilon_0}$$

muß dann auch die effektive Gesamtladung Q_{ges} um den gleichen Faktor reduziert sein, also

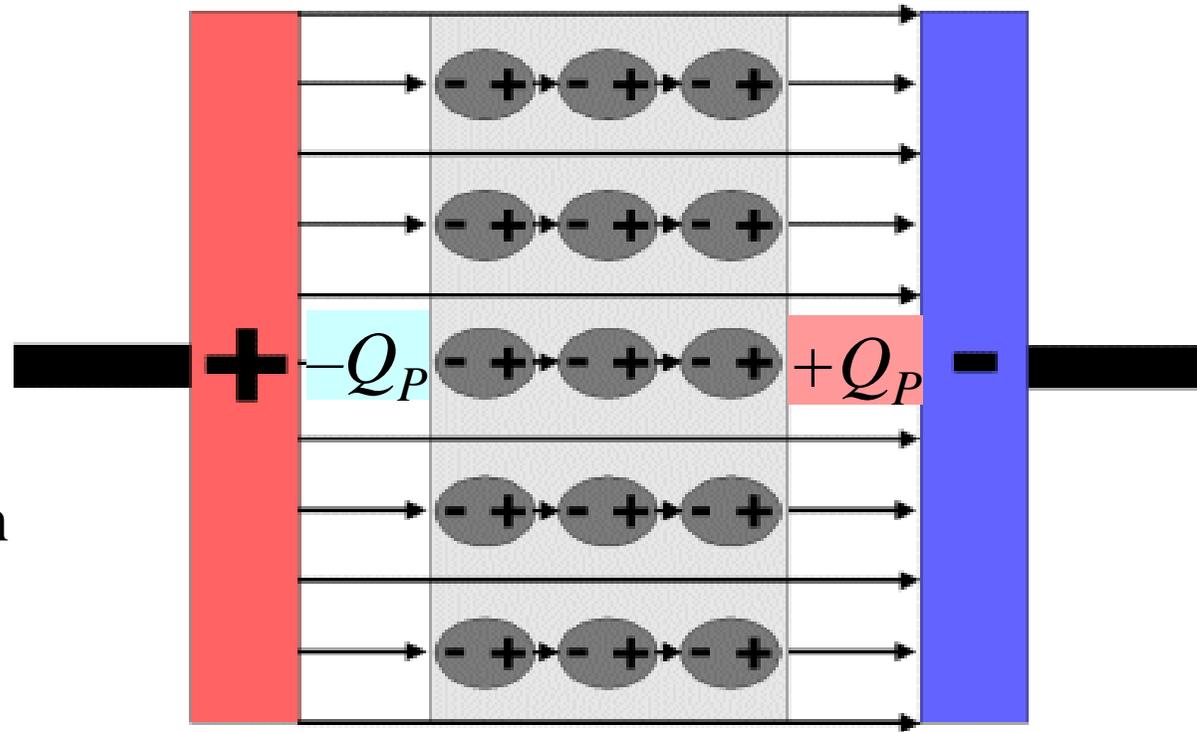
$$Q_{\text{ges}} = \frac{Q}{\epsilon_r}$$



Die Differenz zwischen der aufgebrauchten Ladung Q und der effektiven Gesamtladung Q_{ges} ist dann:

$$Q_P = Q - Q_{\text{ges}} = Q - \frac{Q}{\epsilon_r} = Q \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$$

Diese Ladung ist die sog. *Polarisationsladung*, die durch das elektrische Feld im Dielektrikum erzeugt wird. Das Feld der Polarisationsladungen kompensiert zum Teil das Feld der Ladungen auf den Kondensatorplatten.





Die 1. Maxwell-Gleichung (Gauß'scher Satz) gilt für *alle* umschlossenen Ladungen, während beispielsweise ein Galvanometer nur die „wahren Ladungen“ mißt. Es wäre daher praktisch, eine Maxwell-Gleichung für die „wahren Ladungen“ Q auf den Platten zu haben. Hierfür muß ein neues Feld folgendermaßen definiert werden:

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

Dabei handelt es sich um das Feld der *dielektrischen Verschiebungsdichte*. Mit der 1. Maxwell-Gleichung folgt jetzt:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ges}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q_P}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oiint \frac{\vec{D}}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q_P}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_r \left(Q - Q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \right)$$

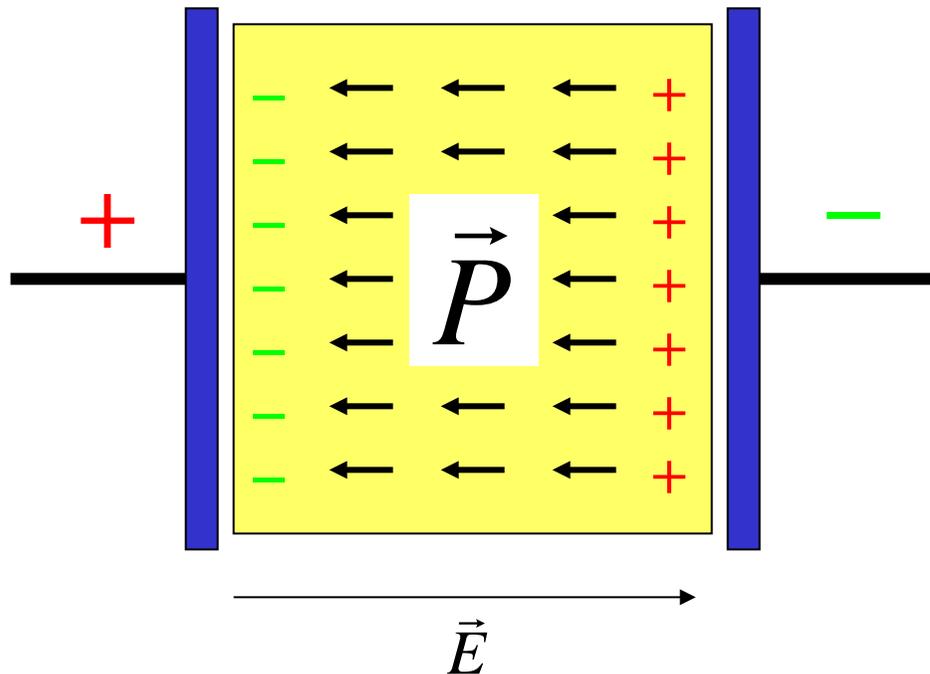
Zusammenfassen der Terme ergibt:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Die „Quellen“ des D -Feldes sind also die „wahren Ladungen“ Q , die Polarisationsladungen Q_P sind in der Definition des D -Feldes berücksichtigt.



Am Kondensator liegt also jetzt die folgende Situation vor:



Durch die Polarisation des Dielektrikums entsteht ein Feld \vec{P} , welches dem von Außen angelegten Feld \vec{E} entgegenwirkt.

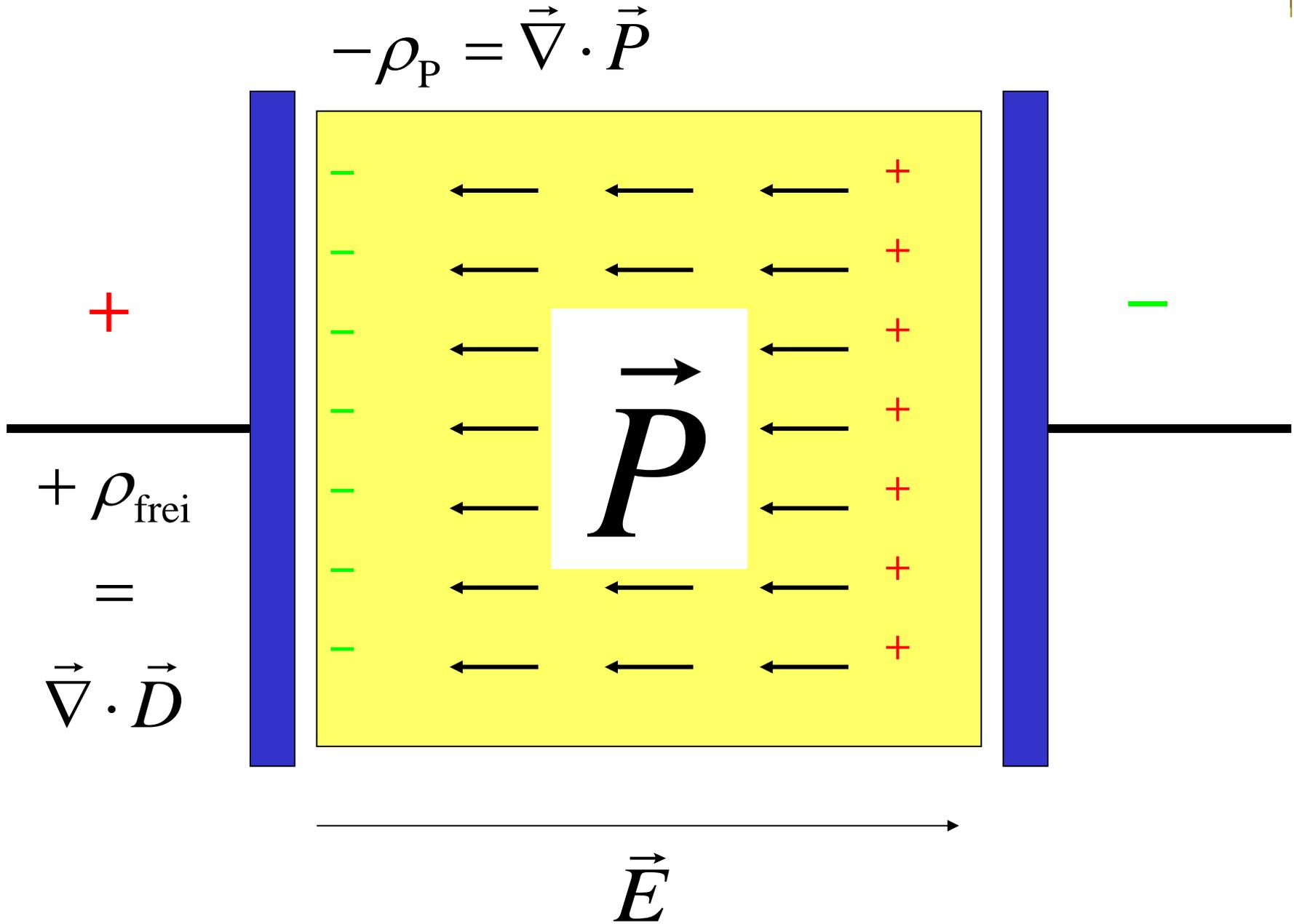
Dieses Feld läßt sich durch die Ladungsdichte ρ_P der Polarisationsladungen nach der 1. Maxwell'schen Gleichung folgendermaßen ausdrücken:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_P$$

Dann läßt sich die 1. Maxwell'sche Gleichung für das gesamte Feld schreiben als:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ges}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{frei}} + \rho_P}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_{\text{frei}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right)$$





$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{frei}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P})$$

Mit $\rho_{\text{frei}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$

folgt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{P}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} - \vec{D} + \vec{P}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Das Polarisationsfeld ist häufig proportional zum äußeren Feld, d.h.

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \alpha \vec{E} \\ &= (\varepsilon_0 + \alpha) \vec{E} \end{aligned}$$

Die Größe α ist die *Polarisierbarkeit* des Mediums.

Andererseits gilt für das Feld der dielektrischen Verschiebungsdichte:

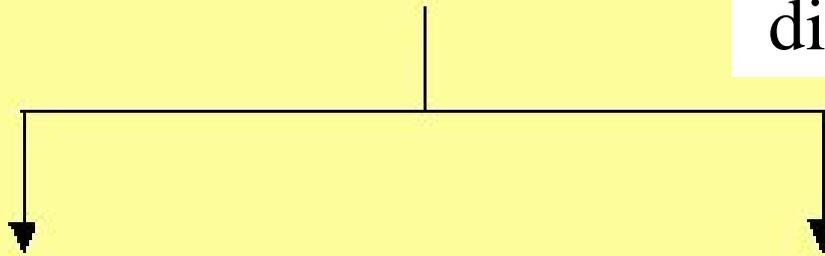
$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

Damit folgt für die Dielektrizitätskonstante der Zusammenhang:

$$\varepsilon_r = 1 + \alpha / \varepsilon_0 = 1 + \chi_e$$

Die Dielektrizitätskonstante eines Mediums ist mit seiner Polarisierbarkeit verknüpft, χ_e ist die *Suszeptibilität*. 19

Polarisation



Orientierungspolarisation:

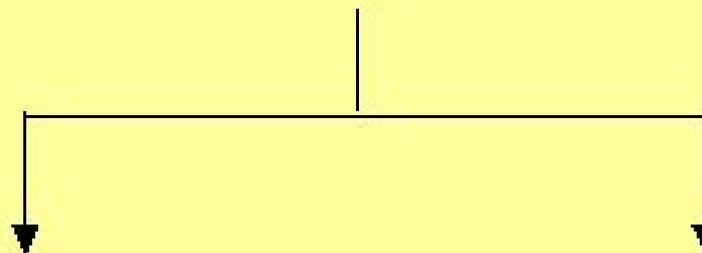
Tritt nur bei Molekülen auf,
die ein *permanentes*
Dipolmoment besitzen

Tritt nicht bei Atomen auf

Verschiebungspolarisation:

Tritt bei *allen* Molekülen auf

Tritt auch bei Atomen auf



Ionenpolarisation:

Verschiebung von unterschiedlich geladenen Ionen relativ zueinander

Elektronenpolarisation:

Verschiebung von Elektronen relativ zu positiv geladenen Atomkernen

Polarisation

Atomare Mechanismen der dielektrischen Polarisation

Orientierungspolarisation:

Tritt nur bei Molekülen auf,
die ein *permanentes*
Dipolmoment besitzen

Tritt nicht bei Atomen auf

Verschiebungspolarisation:

Tritt bei *allen* Molekülen auf

Tritt auch bei Atomen auf

Ionenspolarisation:

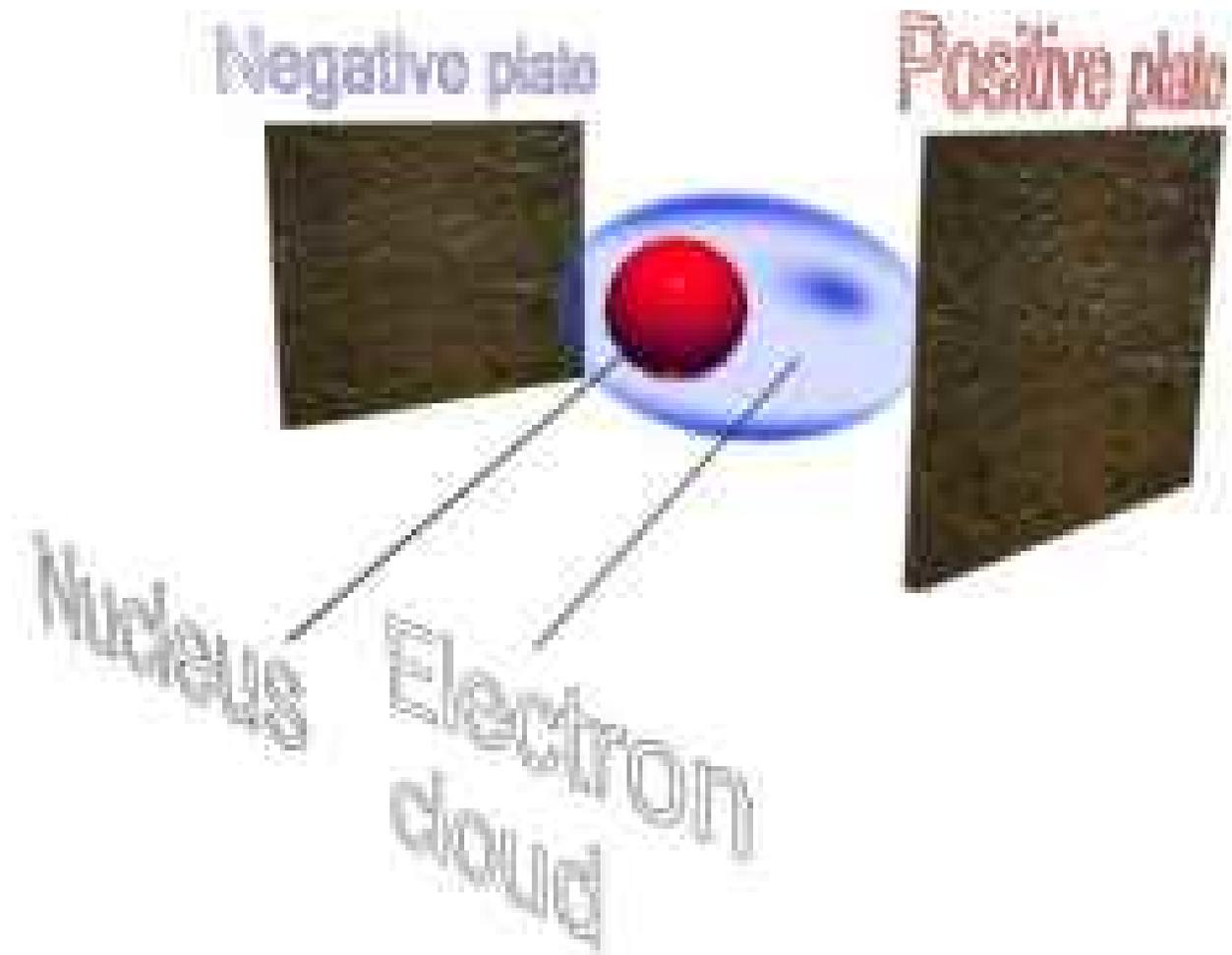
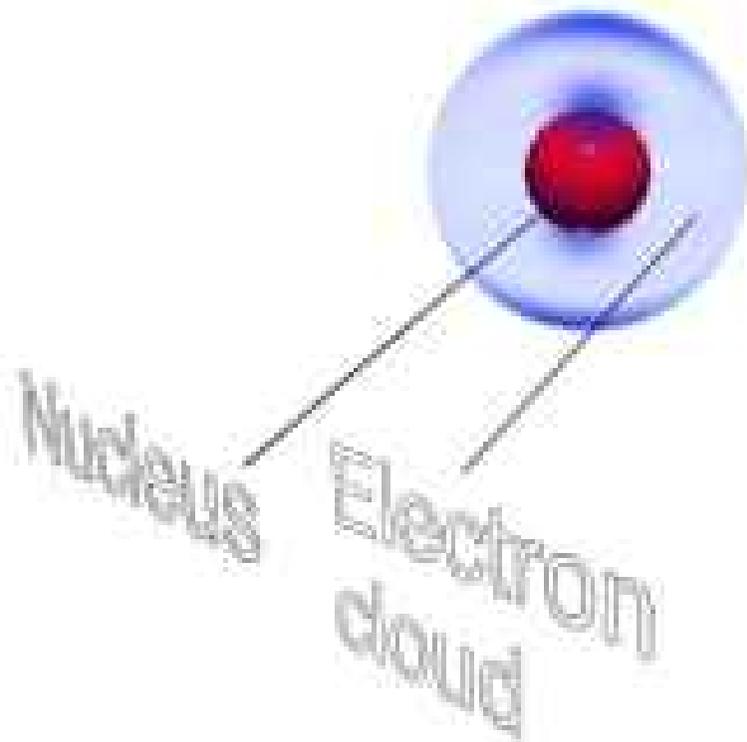
Verschiebung von unterschiedlich geladenen Ionen relativ zueinander

Elektronenspolarisation:

Verschiebung von Elektronen relativ zu positiv geladenen Atomkernen



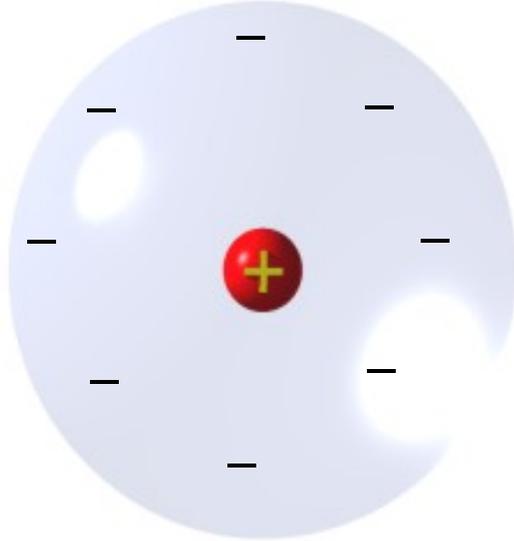
Verschiebungspolarisation



Der negative Ladungsschwerpunkt verschiebt sich in einem äußeren Feld.

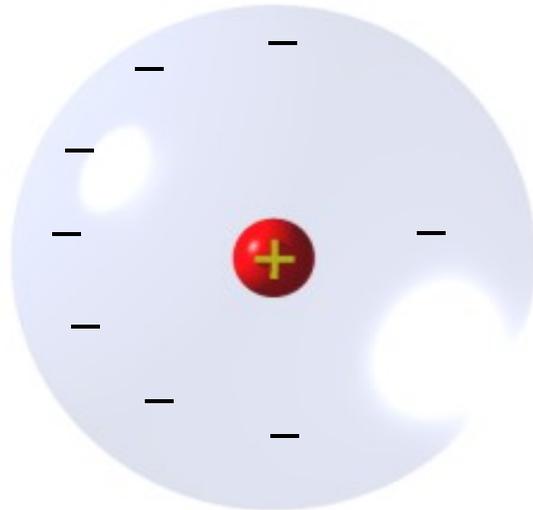


Unpolarisiertes Atom

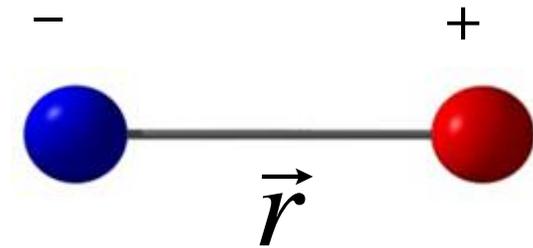


$$|\vec{E}| = 0$$

polarisiertes Atom



$$|\vec{E}| \neq 0$$



elektrischer
Dipol



Verschiebungspolarisation
bei Kristallen. Die positiven
Ionen werden durch ein
äußeres Feld verschoben.

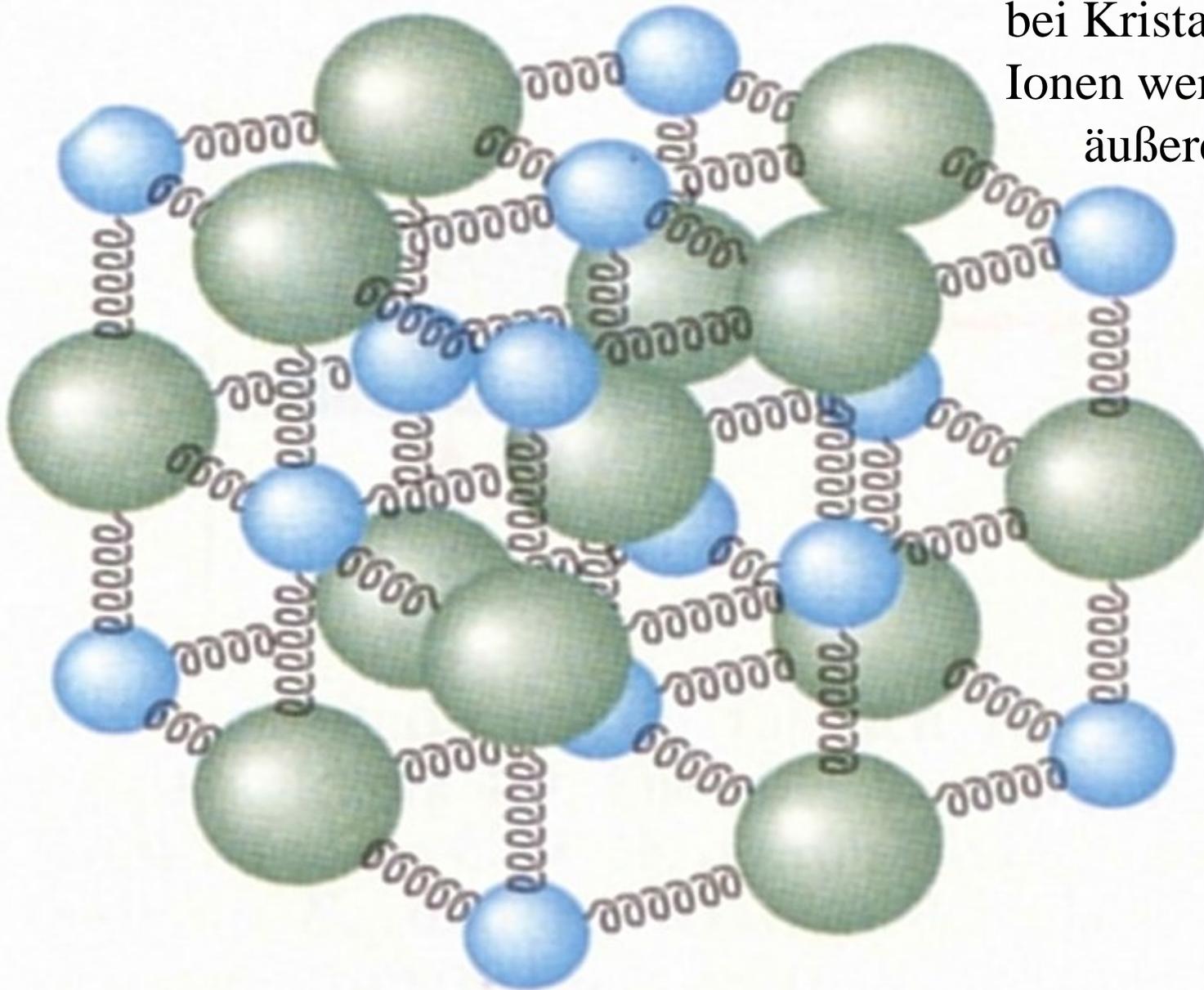


Tabelle 13.1: Elektronische Polarisierbarkeiten einiger Ionen in 10^{-24} cm^3 .

		He	Li ⁺	Be ²⁺	B ³⁺	C ⁴⁺
Pauling		0,201	0,029	0,008	0,003	0,0013
JS			0,029			
	O ²⁻ F ⁻	Ne	Na ⁺	Mg ²⁺	Al ³⁺	Si ⁴⁺
Pauling	3,88 1,04	0,390	0,179	0,094	0,052	0,0165
JS-(TKS)	(2,4) 0,858		0,290			
	S ²⁻ Cl ⁻	Ar	K ⁺	Ca ²⁺	Sc ³⁺	Ti ⁴⁺
Pauling	10,2 3,66	1,62	0,83	0,47	0,286	0,185
JS-(TKS)	(5,5) 2,947		1,133	(1,1)		(0,19)
	Se ²⁻ Br ⁻	Kr	Rb ⁺	Sr ²⁺	Y ³⁺	Zr ⁴⁺
Pauling	10,5 4,77	2,46	1,40	0,86	0,55	0,37
JS-(TKS)	(7) 4,091		1,679	(1,6)		
	Te ²⁻ I ⁻	Xe	Cs ⁺	Ba ²⁺	La ³⁺	Ce ⁴⁺
Pauling	14,0 7,10	3,99	2,42	1,55	1,04	0,73
JS-(TKS)	(9) 6,116	---	2,743	(2,5)		

Werte von L. Pauling, Proc. Roy. Soc. (London) **A114**, 181 (1927); S.S. Jaswal und T.B. Sharma, J. Phys. Chem. Solids **34**, 509 (1973); J. Tessmann, A. Kahn und W. Shockley, Phys. Rev. **92**, 890 (1953). Die TKS-Polarisierbarkeiten gelten bei der Frequenz der Natrium D-Linien. Die Werte sind in CGS-Einheiten angegeben; um sie in SI-Einheiten zu erhalten, multipliziert man sie mit $1/9 \cdot 10^{-15}$.

Polarisation

Atomare Mechanismen der dielektrischen Polarisation

Orientierungspolarisation:

Tritt nur bei Molekülen auf,
die ein *permanentes
Dipolmoment* besitzen

Tritt nicht bei Atomen auf

Verschiebungspolarisation:

Tritt bei *allen* Molekülen auf

Tritt auch bei Atomen auf

Ionenpolarisation:

Verschiebung von unterschiedlich geladenen Ionen relativ zueinander

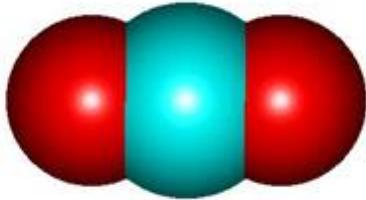
Elektronenpolarisation:

Verschiebung von Elektronen relativ zu positiv geladenen Atomkernen

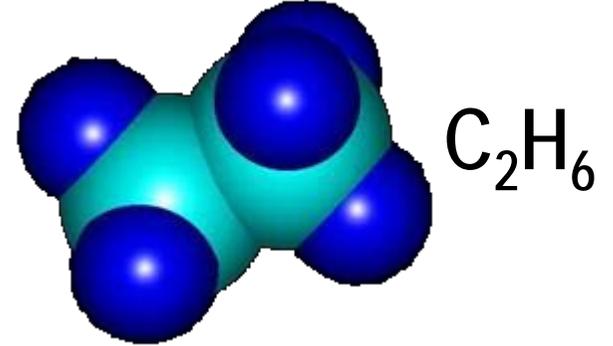
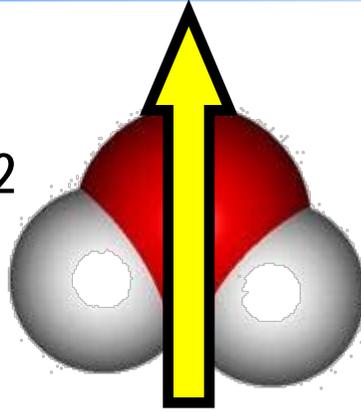


CO

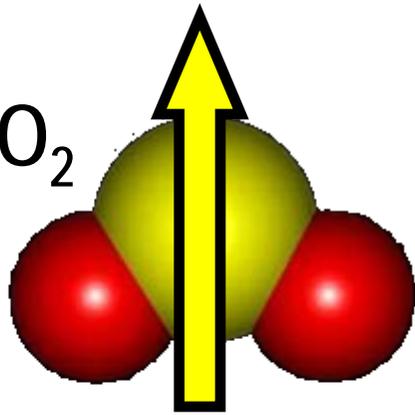
2



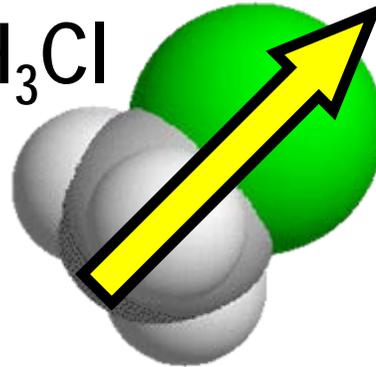
H₂
O



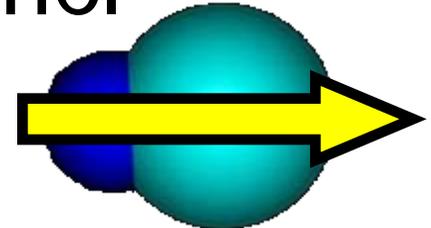
SO₂



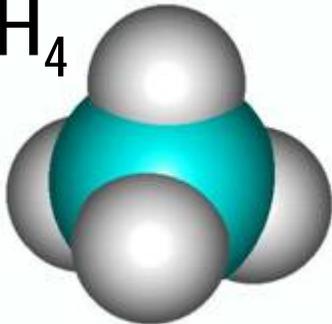
CH₃Cl



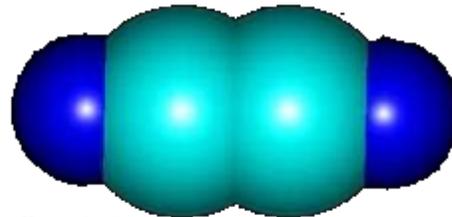
HCl



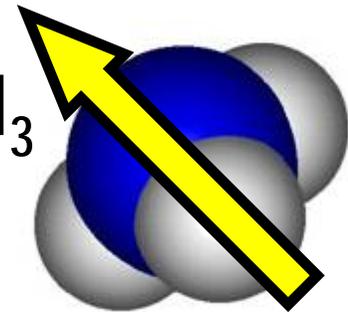
CH₄



C₂H₂

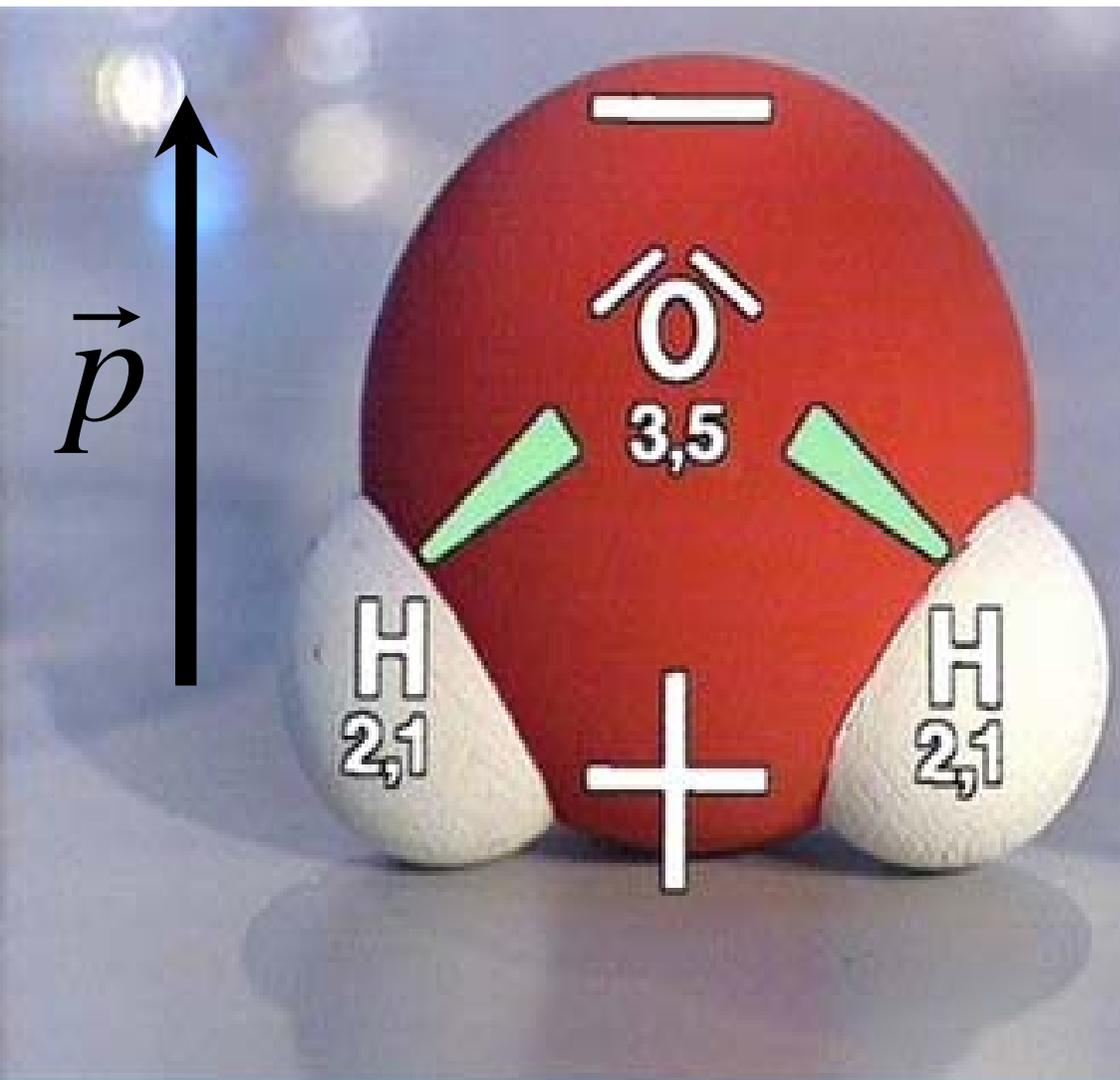


NH₃





Wasser als permanenter Dipol



Wasserdipol

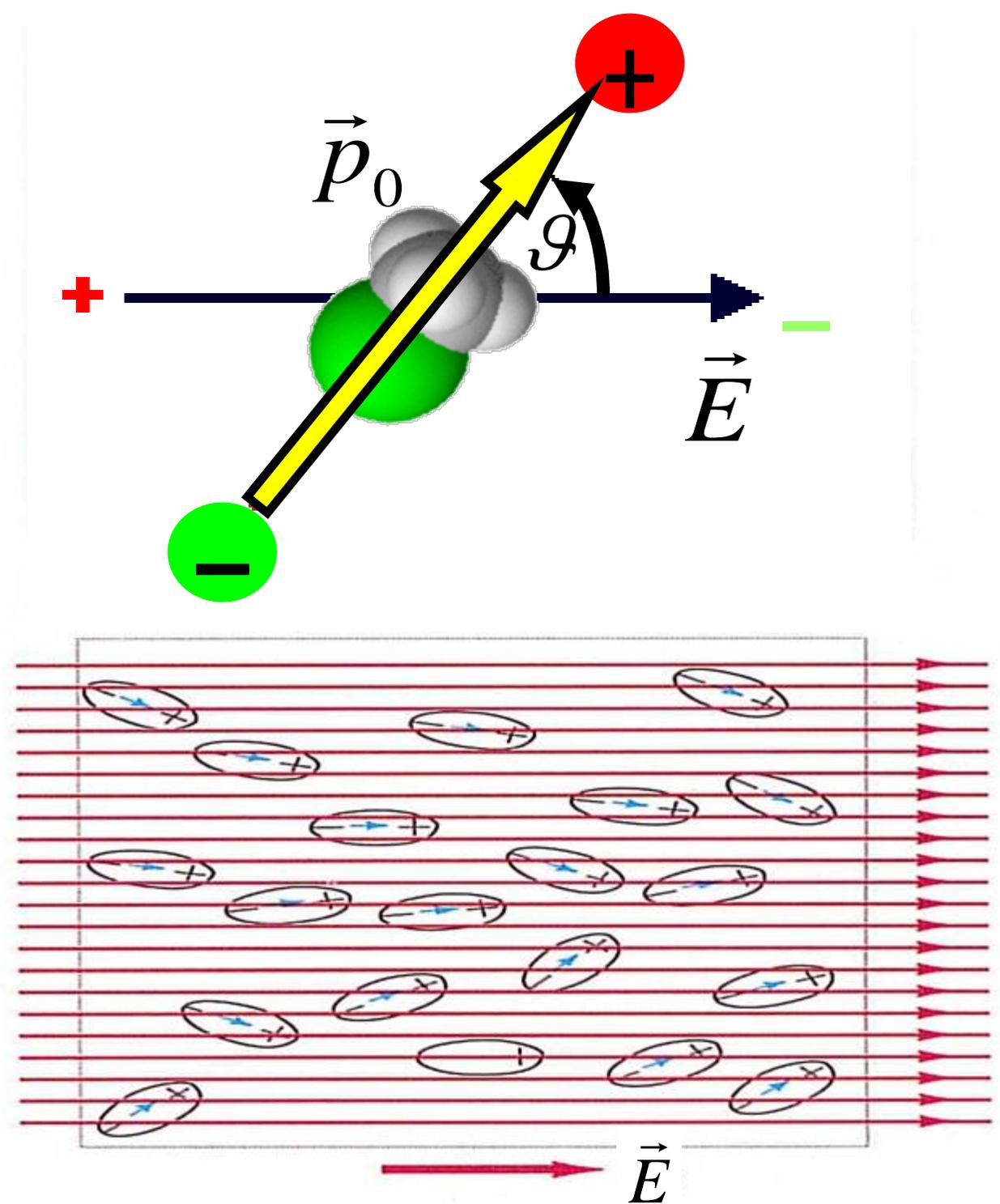
H 2,1	Elektronegativität						He
Li 1,0	Be 1,5	B 2,0	C 2,5	N 3,0	O 3,5	F 4,0	Ne
Na 0,9	Mg 1,2	Al 1,5	Si 1,8	P 2,1	S 2,5	Cl 3,0	Ar
K 0,8	Ca 1,0	Ga 1,6	Ge 1,8	As 2,0	Se 2,4	Br 2,8	Kr
Rb 0,8	Sr 1,0	In 1,7	Sn 1,8	Sb 1,9	Te 2,1	I 2,5	Xe
Cs 0,7	Ba 0,9	Tl 1,8	Pb 1,8	Bi 1,9	Po 2,0	At 2,2	Rn



Permanente Dipolmomente einiger Substanzen

Stoff	$p_0 \cdot 10^{-18} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{5/2} \text{ s}^{-1}$	Stoff	$p_0 \cdot 10^{-18} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{5/2} \text{ s}^{-1}$
H ₂	0	CO	0,1
N ₂	0	CO ₂	0
O ₂	0	CCl ₄	0
Ar	0	H ₂ O	1,9
HCl	1,03	NH ₃	1,44
HBr	0,76	CH ₃ Cl	1,86
HJ	0,38		

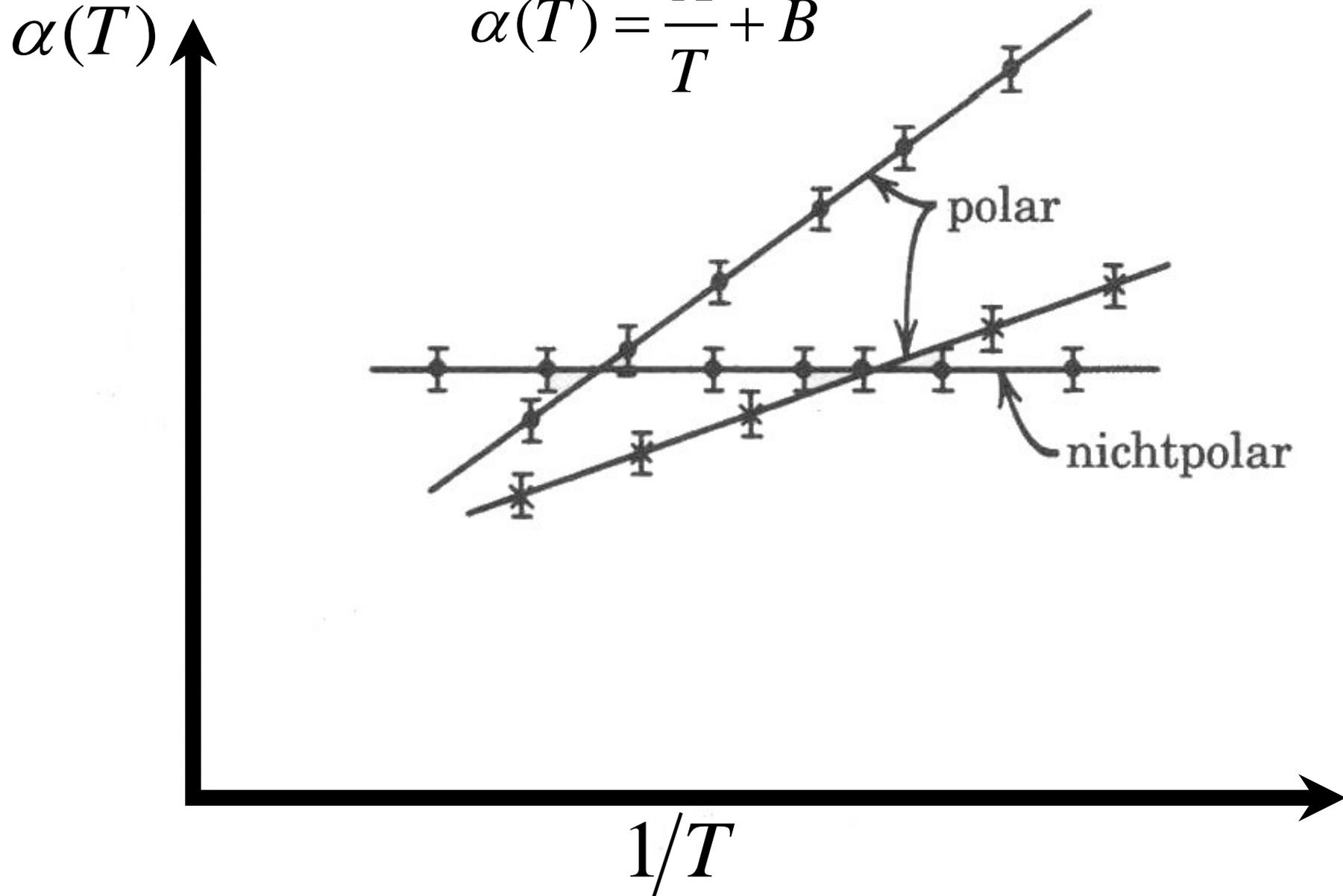
Permanente
Dipole
richten sich
im
elektrischen
Feld aus !

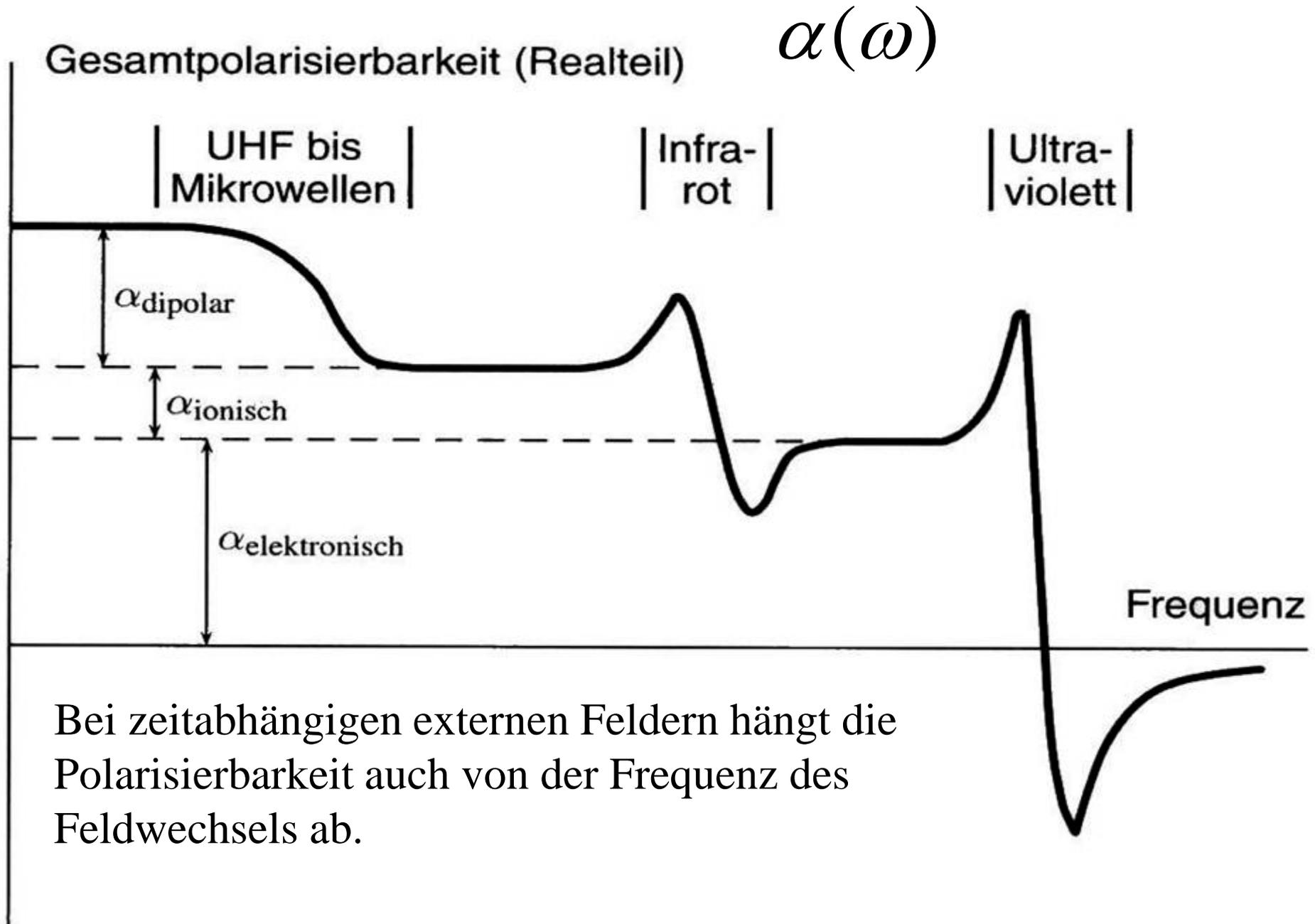




Die Polarisierbarkeit α hängt von der Temperatur ab. Es gilt:

$$\alpha(T) = \frac{A}{T} + B$$





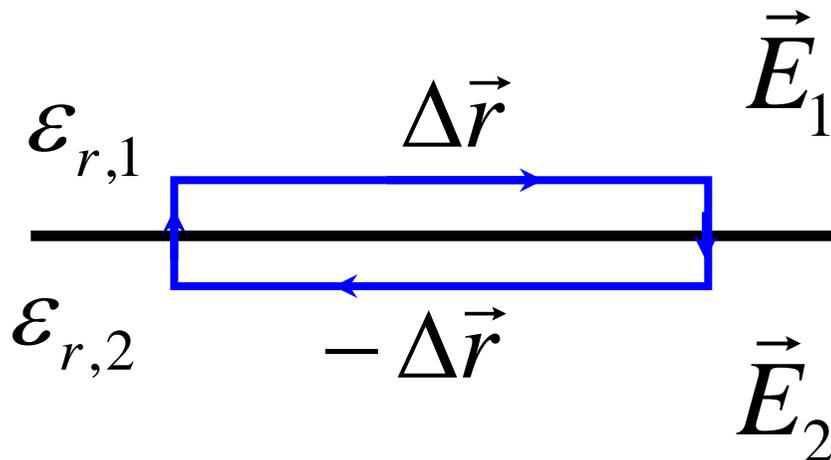


Das elektrische Feld an Grenzflächen

Es soll nun das Verhalten des elektrischen Feldvektors an einer Grenzfläche zweier Medien mit den Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_{r,1}$ und $\epsilon_{r,2}$ bestimmt werden.

(i) Tangentiale Komponente:

Wir betrachten den folgenden, rechteckigen Weg innerhalb der beiden Medien, wobei die beiden senkrechten Wegstücke infinitesimal klein sein sollen:



Dann gilt im Fall der Elektrostatik für das Integral über diesen geschlossenen Weg:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{1,\square} \cdot \Delta\vec{r} + \vec{E}_{2,\square} \cdot (-\Delta\vec{r}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{E}_{1,\square} - \vec{E}_{2,\square}) \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

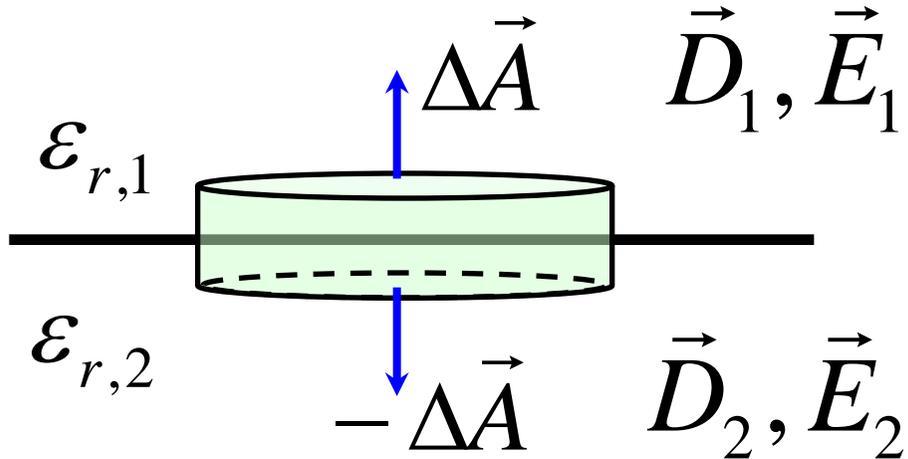
$$\Rightarrow \vec{E}_{1,\square} = \vec{E}_{2,\square}$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist an der Grenzfläche zweier Medien stetig.



(ii) Senkrechte Komponente:

Wir betrachten nun die folgende zylinderförmige „Dose“ innerhalb der beiden Medien, wobei die Höhe der Dose infinitesimal klein sein soll.



Dann gilt wegen der 1. Maxwell'schen Gleichung für das geschlossene Oberflächenintegral über das Feld der dielektrischen Verschiebung im Fall, dass sich keine freien Ladungen an der Grenzfläche befinden:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D}_{1,\perp} \cdot \Delta\vec{A} + \vec{D}_{2,\perp} \cdot (-\Delta\vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{D}_{1,\perp} - \vec{D}_{2,\perp}) \cdot \Delta\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D}_{1,\perp} = \vec{D}_{2,\perp}$$

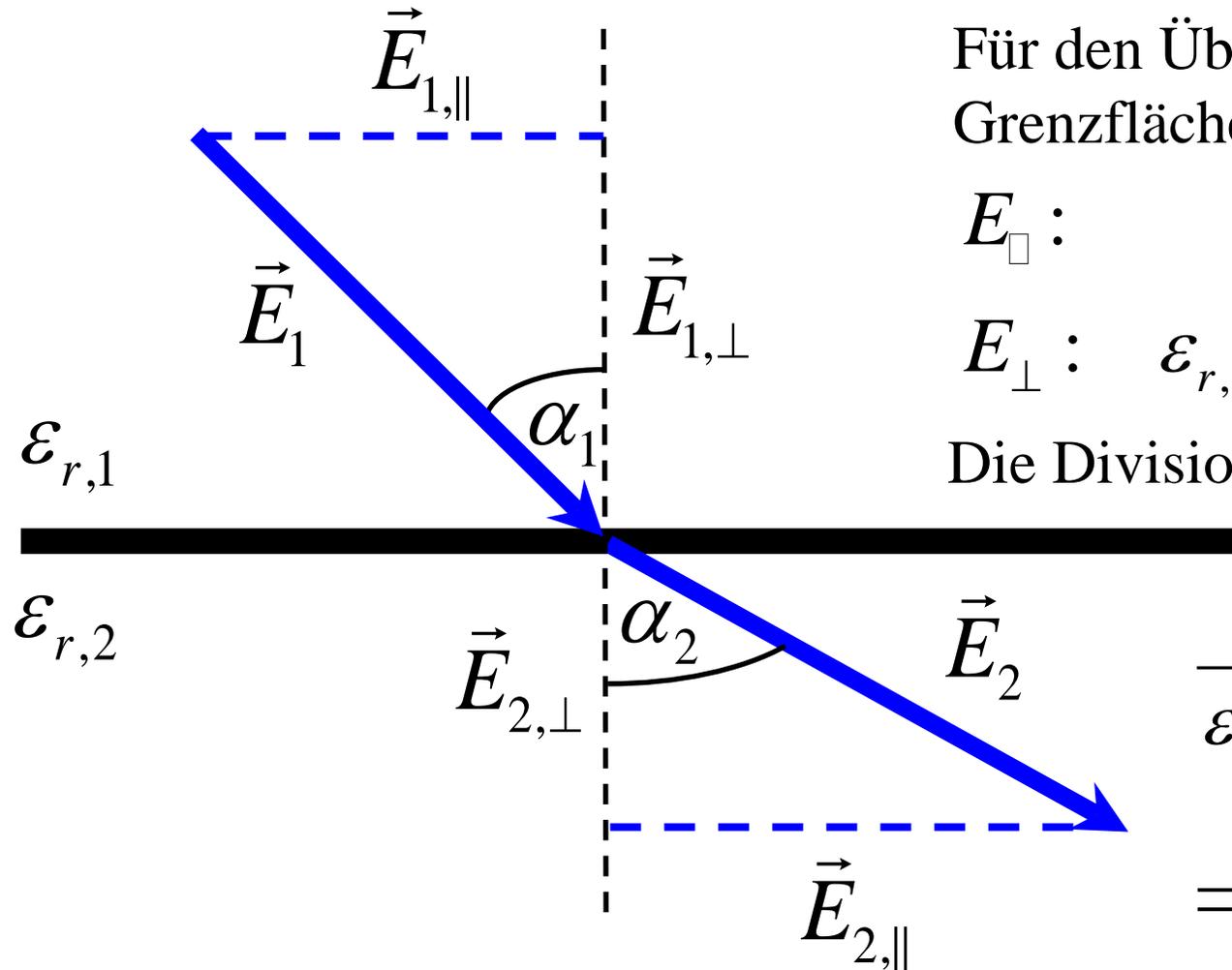
Wegen

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

folgt daraus:

$$\epsilon_{r,1} \vec{E}_{1,\perp} = \epsilon_{r,2} \vec{E}_{2,\perp}$$

Die senkrechte Komponente des elektrischen Feldes macht an der Grenzfläche zweier Medien einen Sprung.



Für den Übergang des Feldes an einer Grenzfläche gilt dann:

$$E_{\parallel} : \quad E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$$

$$E_{\perp} : \quad \varepsilon_{r,1} E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon_{r,2} E_2 \cos \alpha_2$$

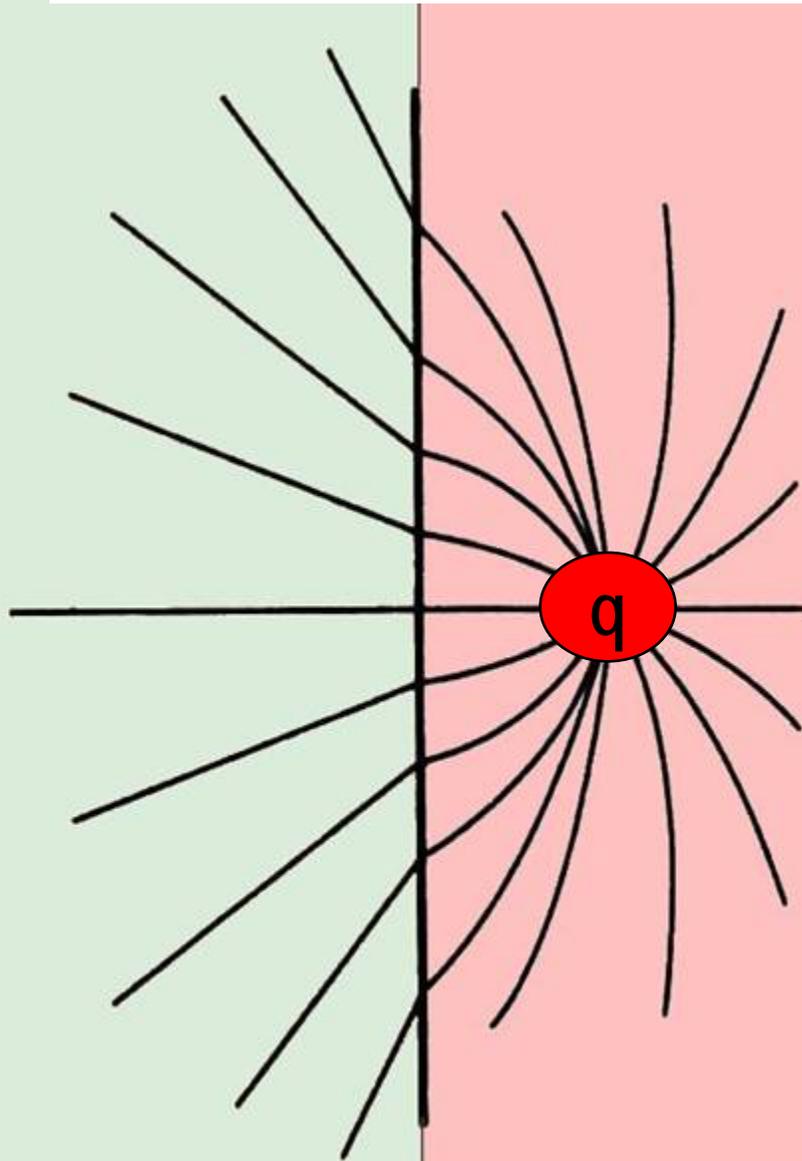
Die Division beider Gleichungen ergibt:

$$\frac{1}{\varepsilon_{r,1}} \tan \alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_{r,2}} \tan \alpha_2$$

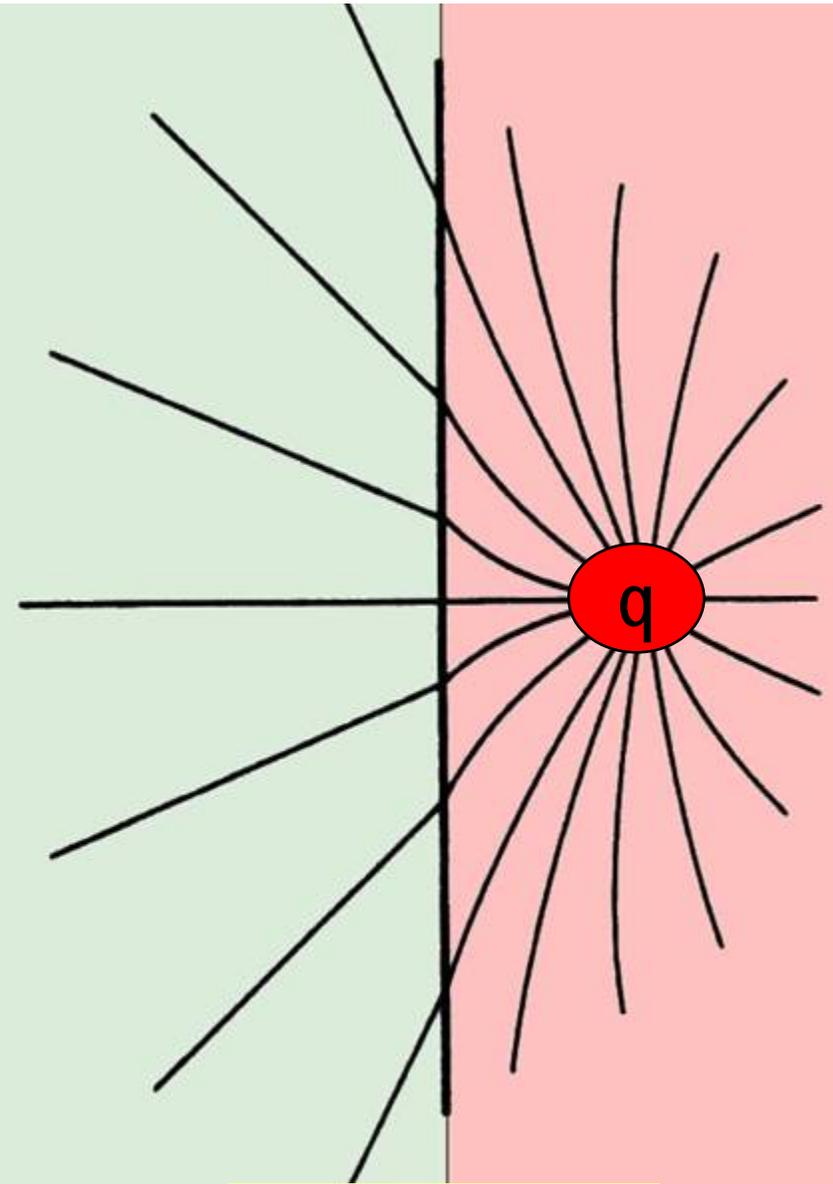
$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r,1}}{\varepsilon_{r,2}}$$

Dies ist das Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien beim Übergang zwischen zwei Medien.

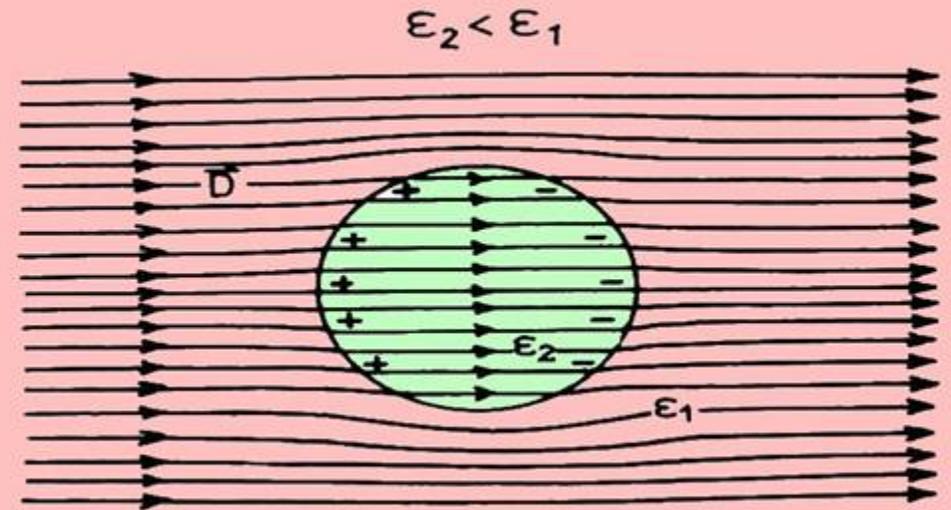
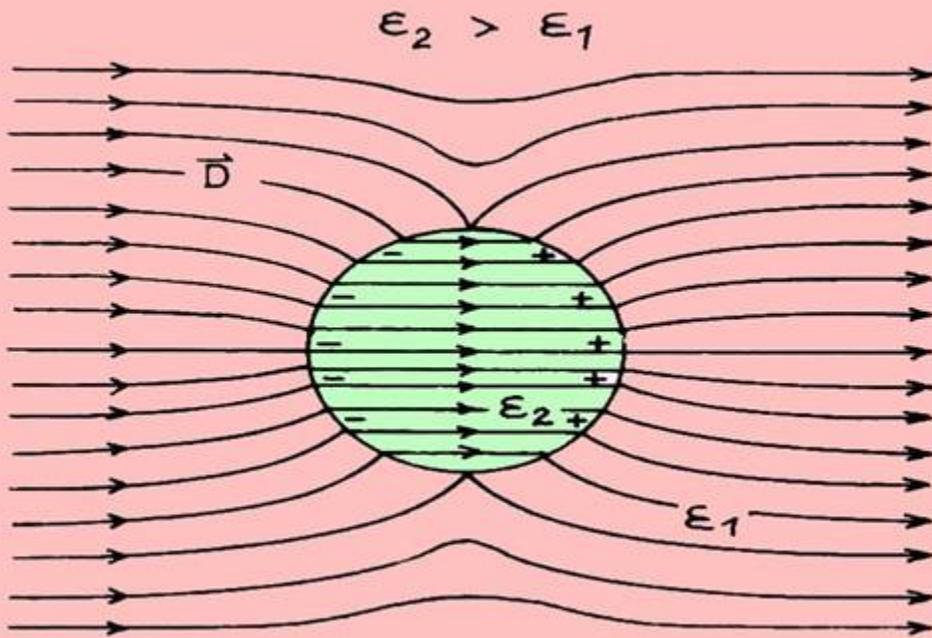
Feld einer Punktladung vor einer Grenzfläche, die zwei Medien trennt:



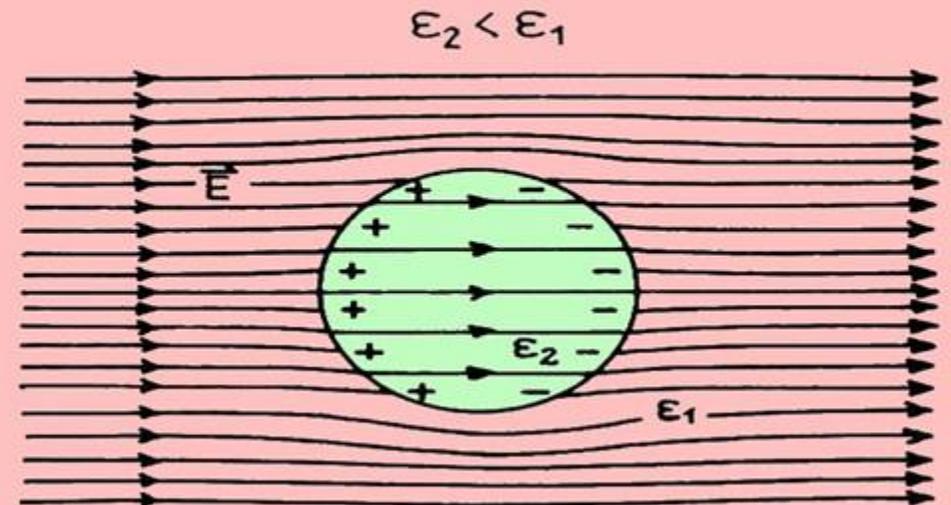
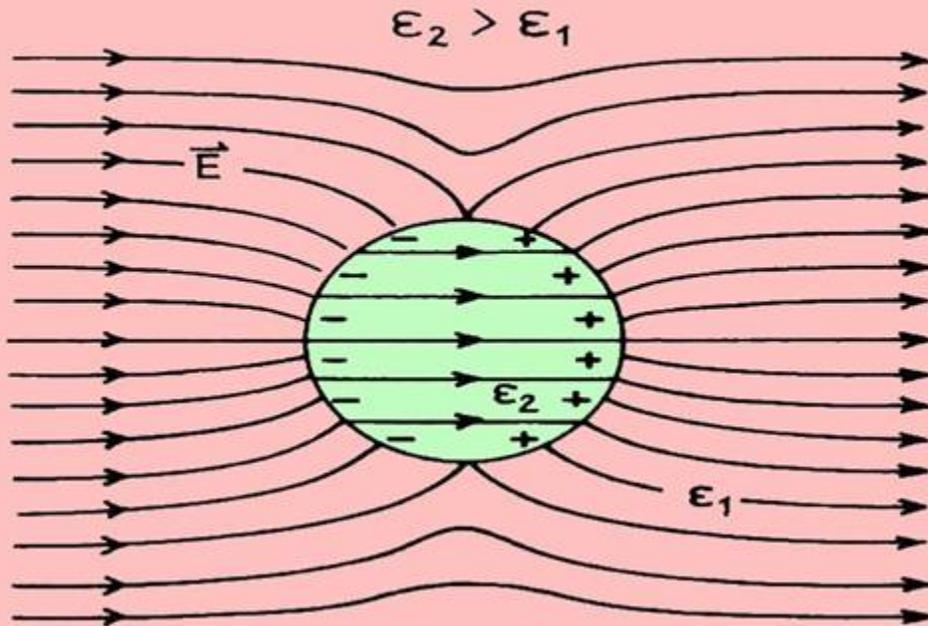
$$\epsilon_r^{(2)} > \epsilon_r^{(1)}$$



$$\epsilon_r^{(2)} < \epsilon_r^{(1)}$$



Dielektrische Kugel in einem elektrischen Feld



Das magnetische Feld in Materie

Wie im Fall des elektrischen Feldes gilt das Ampère'sche Gesetz für *alle* Ströme:

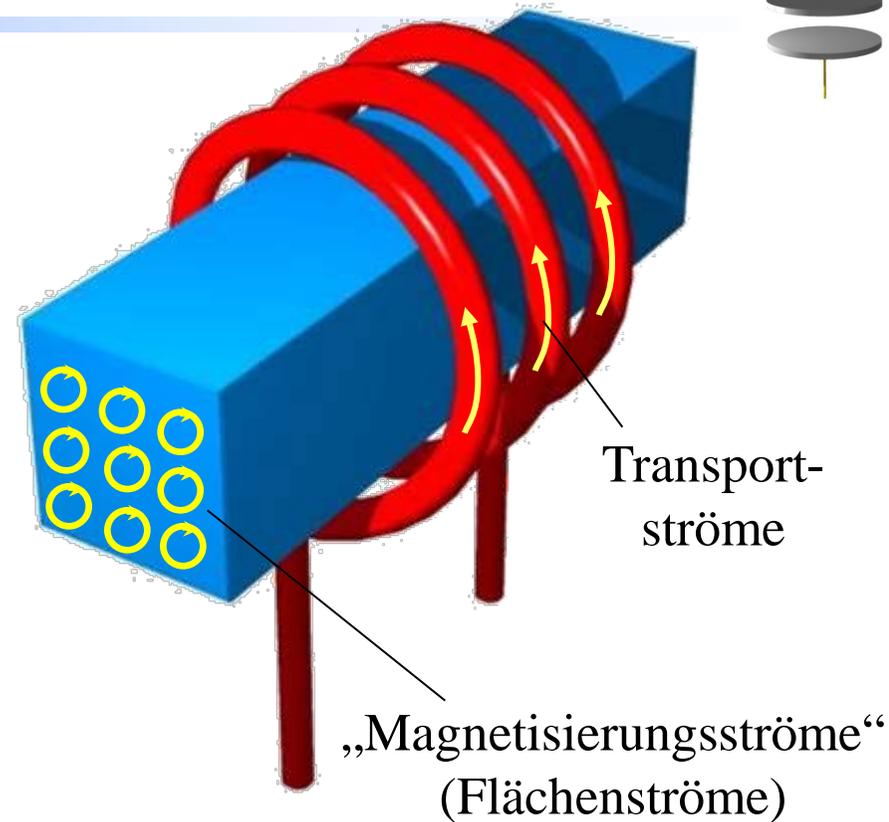
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Dabei gibt es zwei prinzipiell unterschiedliche Arten von Strömen, d.h.:

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{Trans.}} + \vec{j}_{\text{Mag.}}$$

Transportstrom
(von außen aufgeprägt, Spule usw.)

Mikroskopische
Ströme in
Anwesenheit des
Magnetfeldes



Die mikroskopischen Ströme bestimmen das magnetische Verhalten eines Stoffes. Man definiert das Feld der Magnetisierung durch:

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{\text{Mag.}}$$



Einsetzen in das Ampère'sche Gesetz ergibt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{\text{Trans.}} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_{\text{Trans.}}$$

Nun wird durch

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

ein neues Feld definiert, dessen Ursache die makroskopischen Transportströme sind, denn es ist jetzt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{Trans.}}$$

Ohne mikroskopische Ströme gilt also:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Häufig findet man experimentell, dass die Magnetisierung proportional zu dem durch die Transportströme erzeugten Feld ist, also:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Dabei ist χ_m die sog. „*magnetische Suszeptibilität*“. Sie ist eine Materialkonstante und beschreibt das Bestreben der magnetischen Dipole, sich im Feld auszurichten. Damit folgt:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$



$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

Die Permeabilität μ_r eines Materials hängt also direkt mit der Suszeptibilität χ_m über $\mu_r = 1 + \chi_m$ zusammen.

Experimentell findet man, dass es Stoffe gibt mit:

$\chi_m > 0$: paramagnetische Stoffe
(Al, Pt, O₂)

$\chi_m < 0$: diamagnetische Stoffe
(H₂O, Cu, Bi)

Die Permeabilität μ_r kann also größer oder kleiner als Eins sein, im Gegensatz zur Dielektrizitätskonstante ϵ_r , für die immer $\epsilon_r > 1$ gilt.

Material	$\chi_m \cdot 10^6$	μ_r
H ₂ O	-9	0.999991
Cu	-7.4	0.999993
Bi	-153	0.999847
Al	21.2	1.000021
Pt	264	1.000264
O ₂ (flüssig)	3620	1.003620



diamagnetisch
(Lenz'sche Regel)



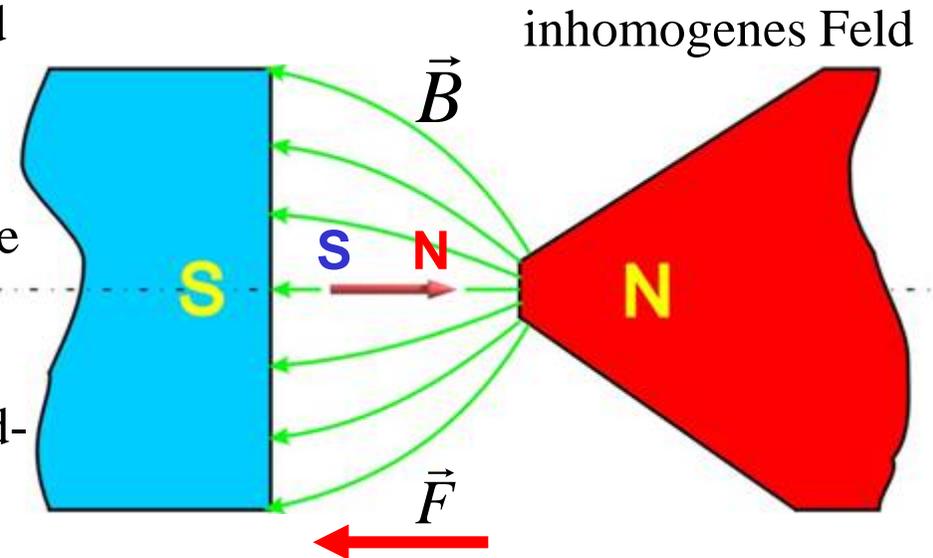
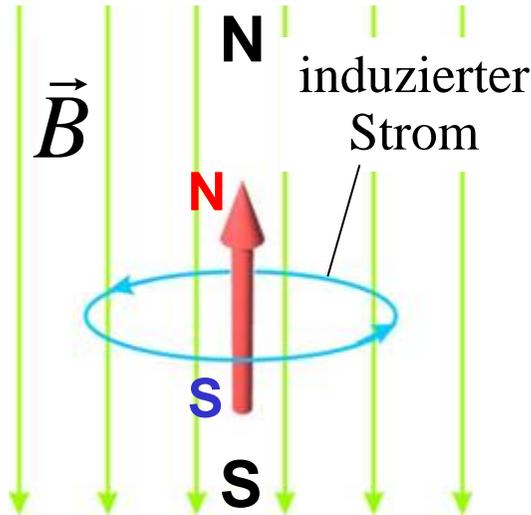
paramagnetisch
(Dipolmoment)



(i) Diamagnetismus:

Das Dipolmoment wird durch das äußere Feld induziert (Lenz'sche Regel)

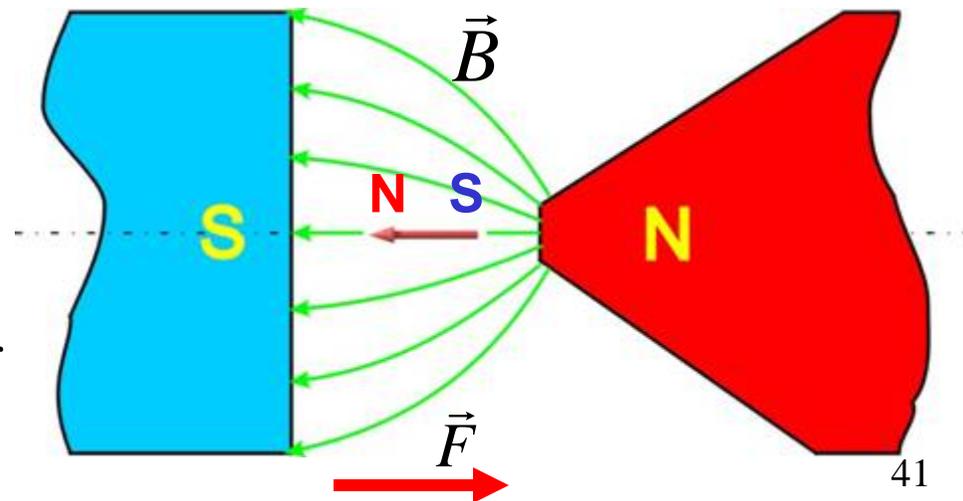
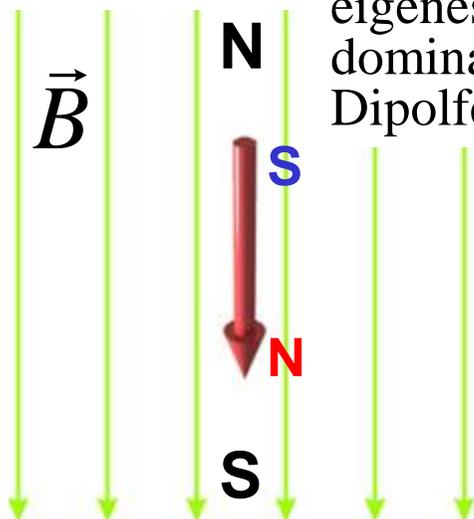
Diamagnetische Stoffe werden im inhomogenen Feld in den Bereich kleinerer Feldstärke gedrängt



(ii) Paramagnetismus:

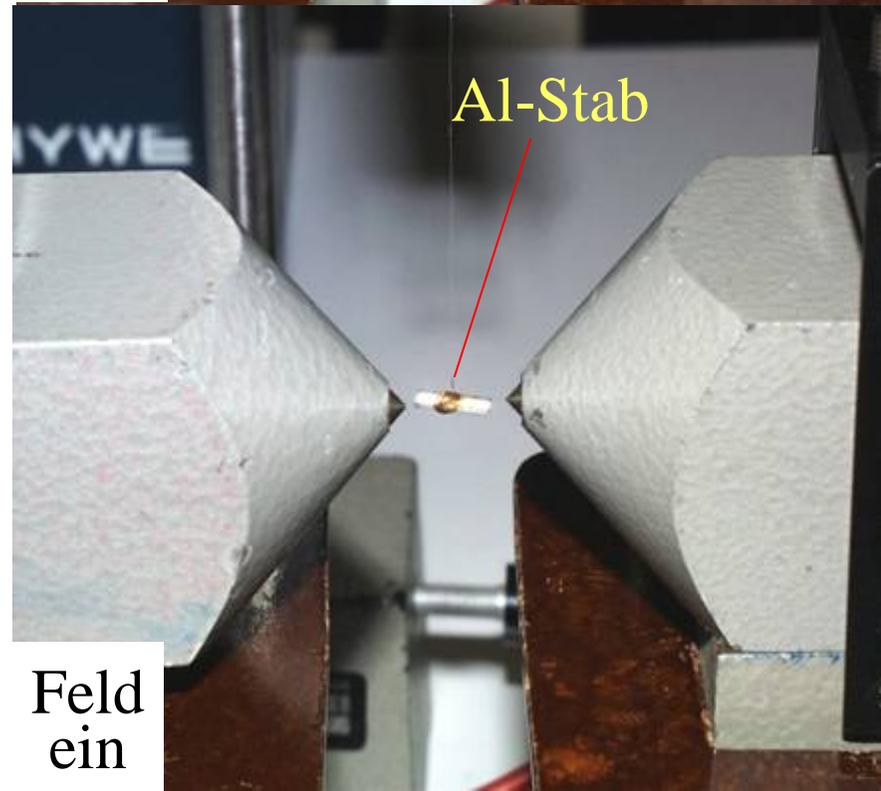
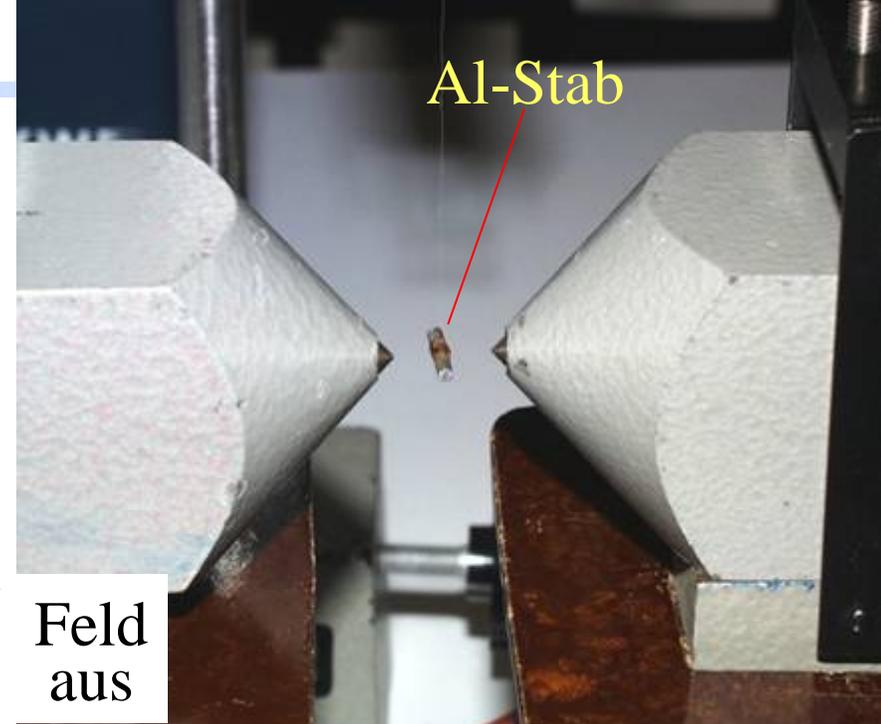
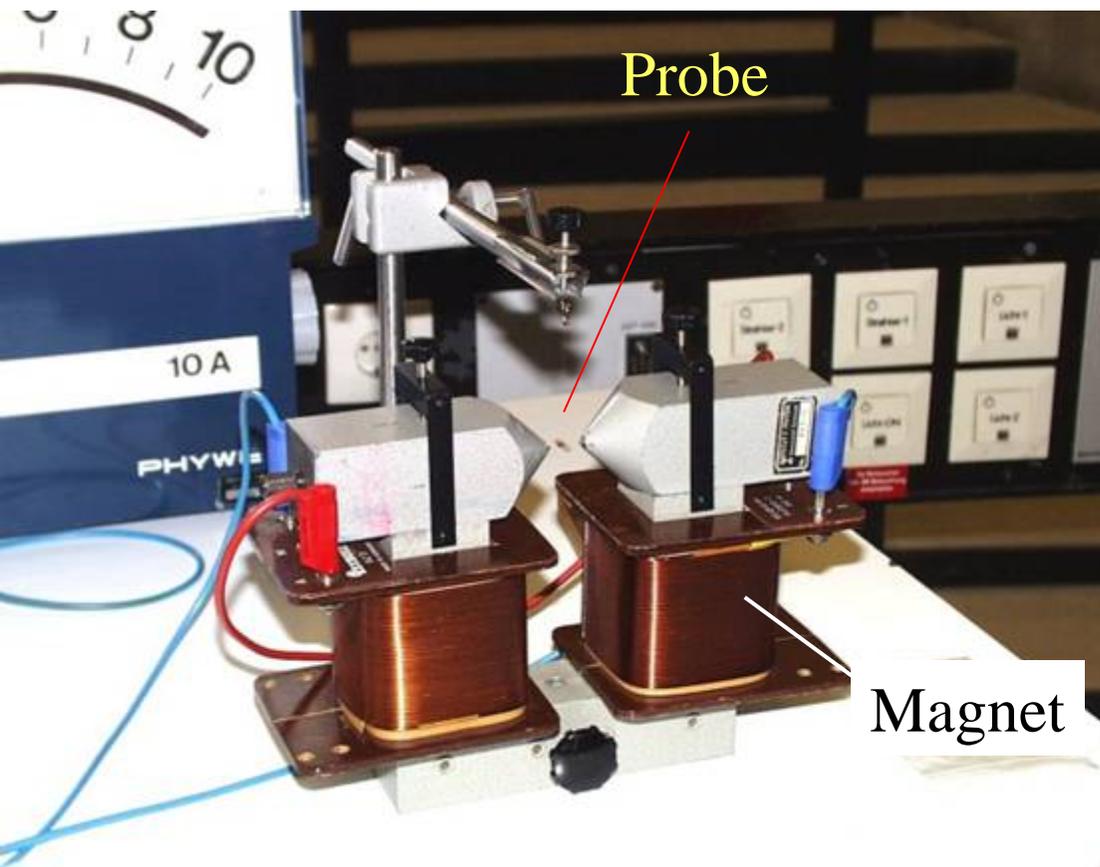
eigenes dominantes Dipolfeld

Paramagnetische Stoffe werden in den Bereich höherer Feldstärke gezogen.



Versuch 3: Dia- und Paramagnetismus

Paramagnetische Stoffe richten sich im inhomogenen Magnetfeld in Richtung des Feldes aus, diamagnetische Stoffe dagegen quer zu den Feldlinien. Die Probe hängt leicht drehbar an einem dünnen Faden.

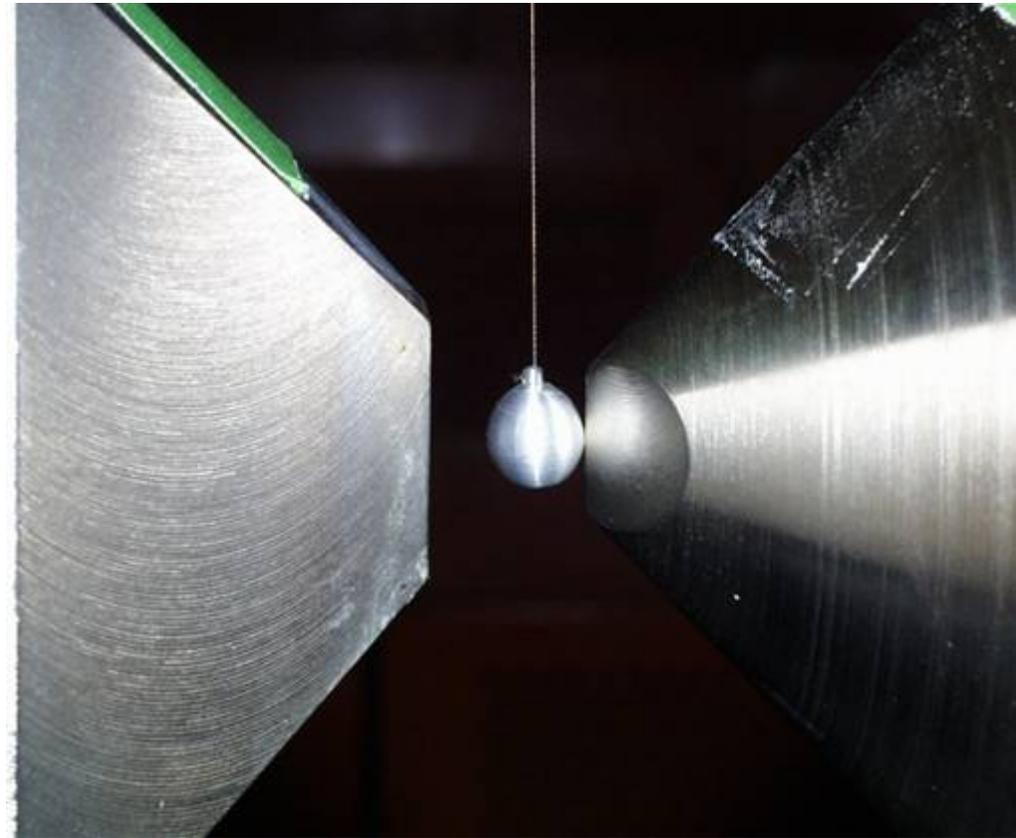
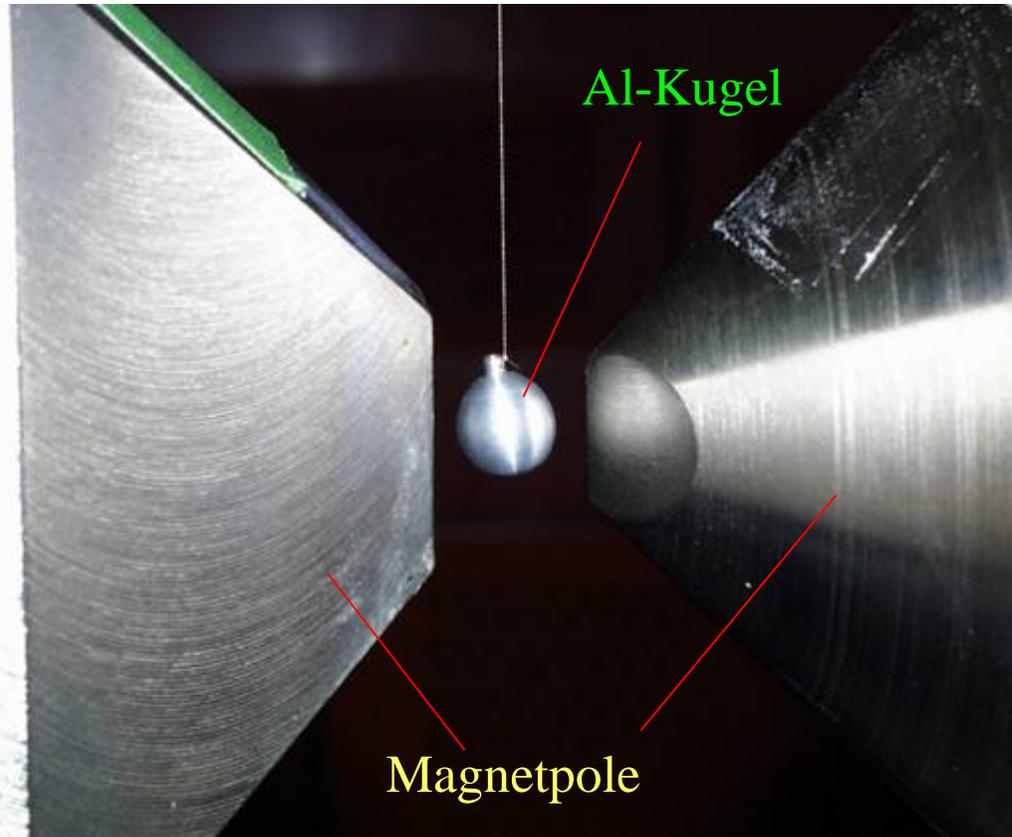




Versuch 4: Dia- und Paramagnet im inhomogenen Feld

Magnetfeld aus: Die paramagnetische Al-Kugel hängt frei am Faden

Magnetfeld ein: Die Kugel wird in den Bereich dichter Feldlinien gezogen.



Bei einem diamagnetischen Stoff (z.B. Glaskugel) wirkt die Kraft in entgegengesetzter Richtung, die Kugel wird aus dem Bereich dichter Feldlinien verdrängt.



Bei *ferromagnetischen* Substanzen wie Eisen, Cobalt oder Nickel ist $\chi_m, \mu_r \gg 1$ (etwa 5000 bei Eisen). Außerdem ist der Zusammenhang

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

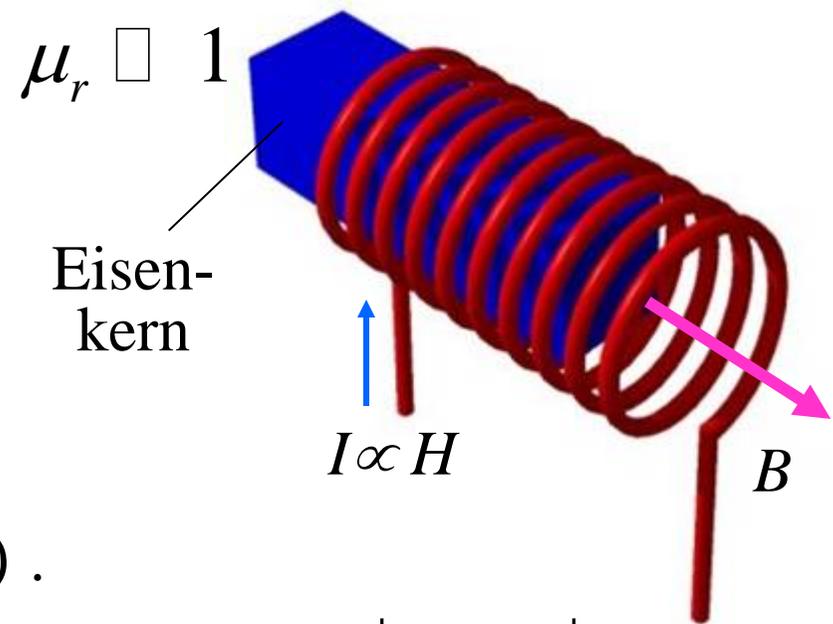
nicht mehr linear, d.h. μ_r ist eine Funktion des äußeren Feldes $\mu_r = \mu_r(\vec{H})$.

Es gilt also:

$$\vec{B}(\vec{H}) = \mu_r(\vec{H}) \mu_0 \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \mu_r(\vec{H}) = \frac{|\vec{B}(\vec{H})|}{\mu_0 |\vec{H}|}$$

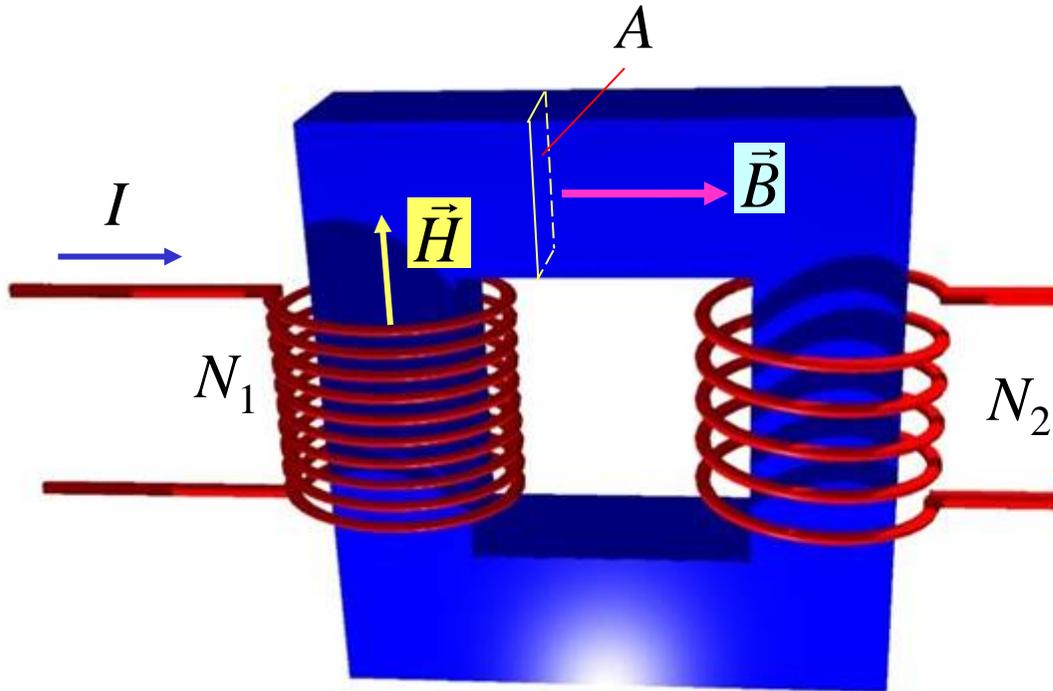
Der Zusammenhang zwischen \vec{B} und \vec{H} ist für Eisen sehr kompliziert. Bei einer Spule der Länge l mit N Windungen, durch die ein Strom I fließt, und die einen Eisenkern besitzt, hatten wir bereits gefunden:

$$B = \mu_r(H) \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow H = \frac{N}{l} I \propto I$$





Dieser Zusammenhang soll jetzt zur Messung von $\mu_r(\vec{H})$ ausgenutzt werden.



Der Wechselstrom $I(t)$ erzeugt das Feld $H(t)$ in der Spule N_1 :

$$|\vec{H}(t)| = H(t) = \frac{N_1 I(t)}{l} \propto I(t)$$

Dabei ist l die Feldlinienlänge im Eisen.

Das im Eisenkern erregte Magnetfeld ist:

$$B(t) = \mu_r(H) \mu_0 H(t)$$

In der Spule N_2 wird eine Spannung

$$U(t) = -N_2 A \frac{dB(t)}{dt}$$

induziert. Das gesuchte Magnetfeld folgt daraus durch Integration:

$$B(t) = -\frac{1}{N_2 A} \int U(t) dt$$

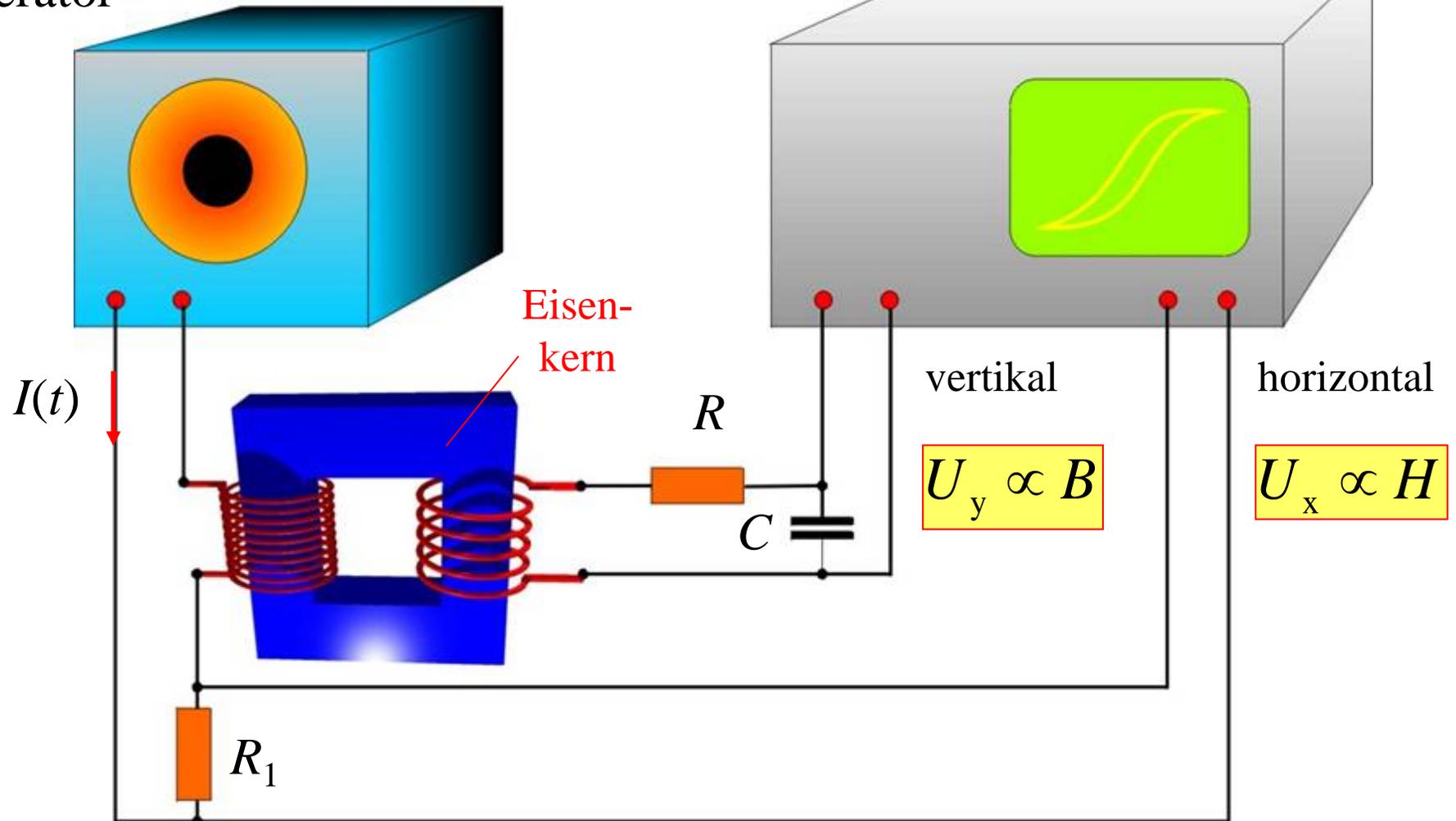
Elektronisch kann eine solche Integration der Spannung mit einem RC-Glied vorgenommen werden.



Versuch 5: Bestimmung von $\mu_r(H)$ für Eisen

Wechselstrom-
generator

Oszillograph

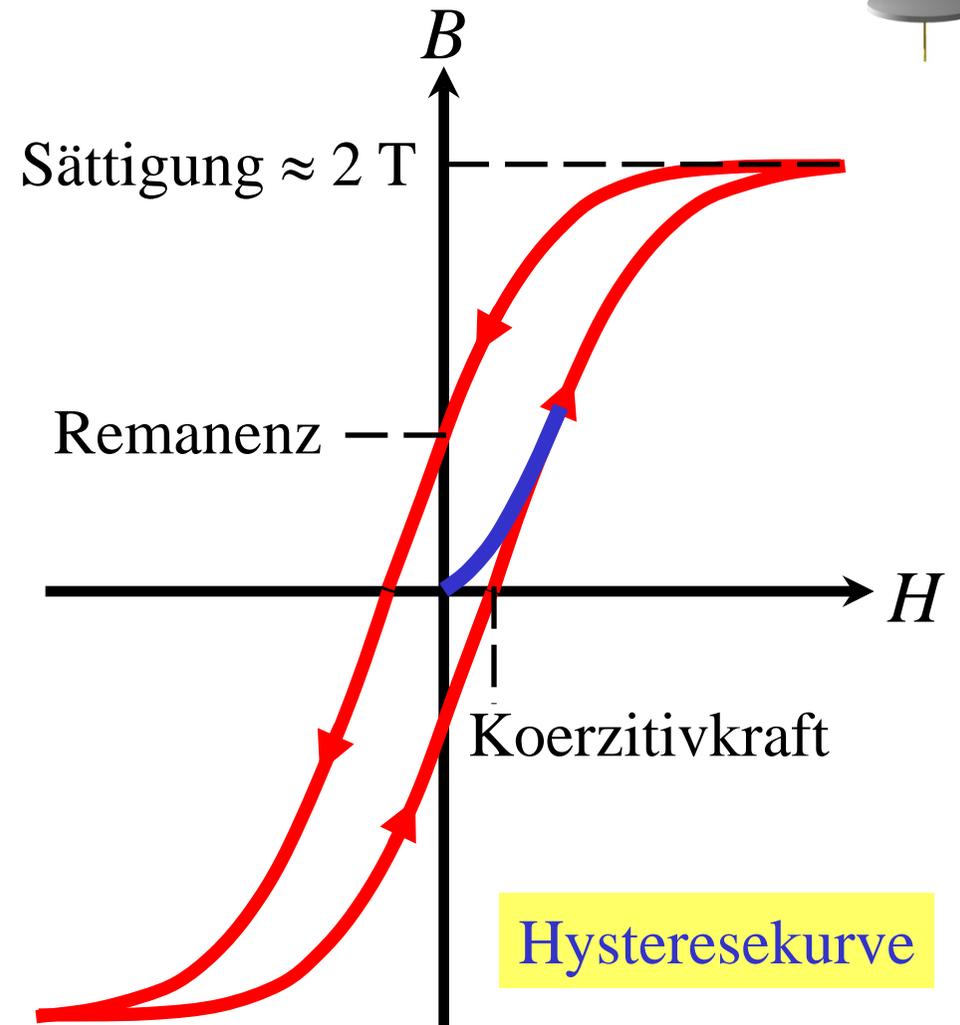
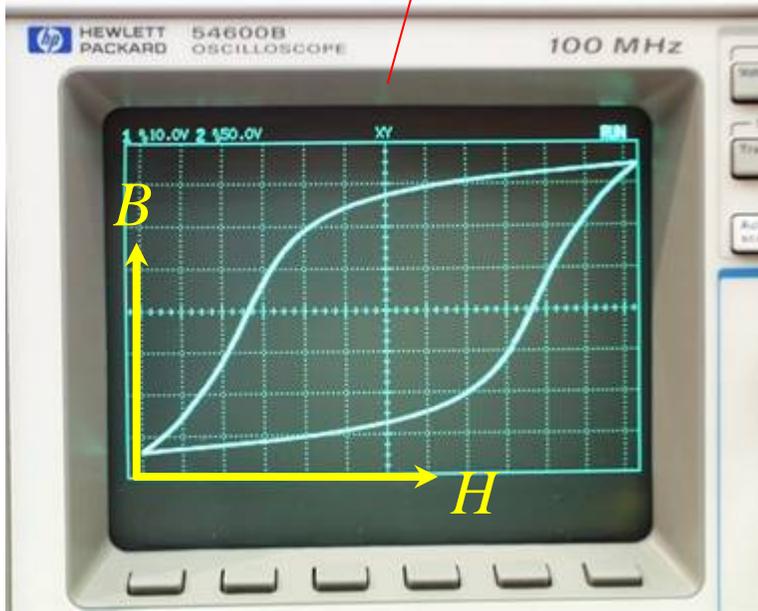
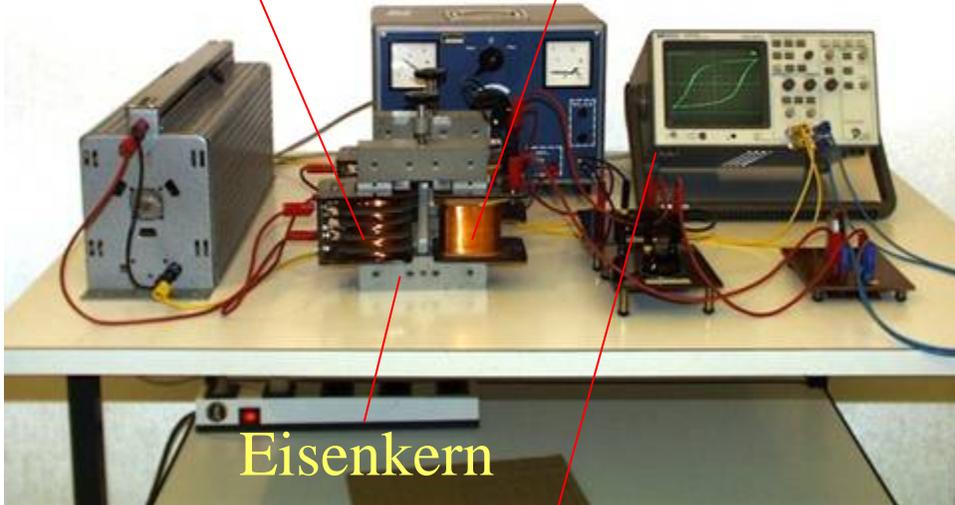




Erregungsspule

Meßspule

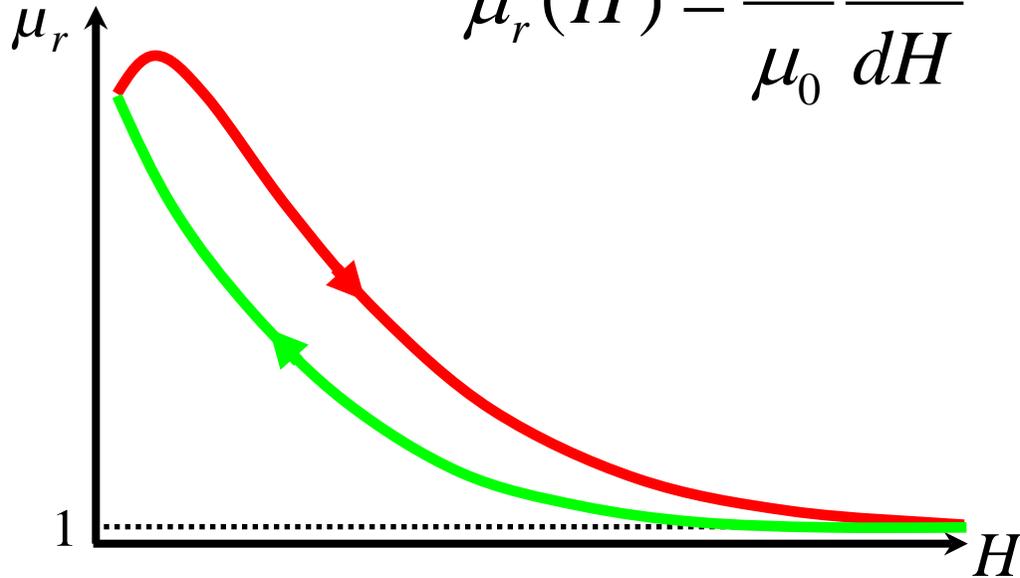
Eisenkern



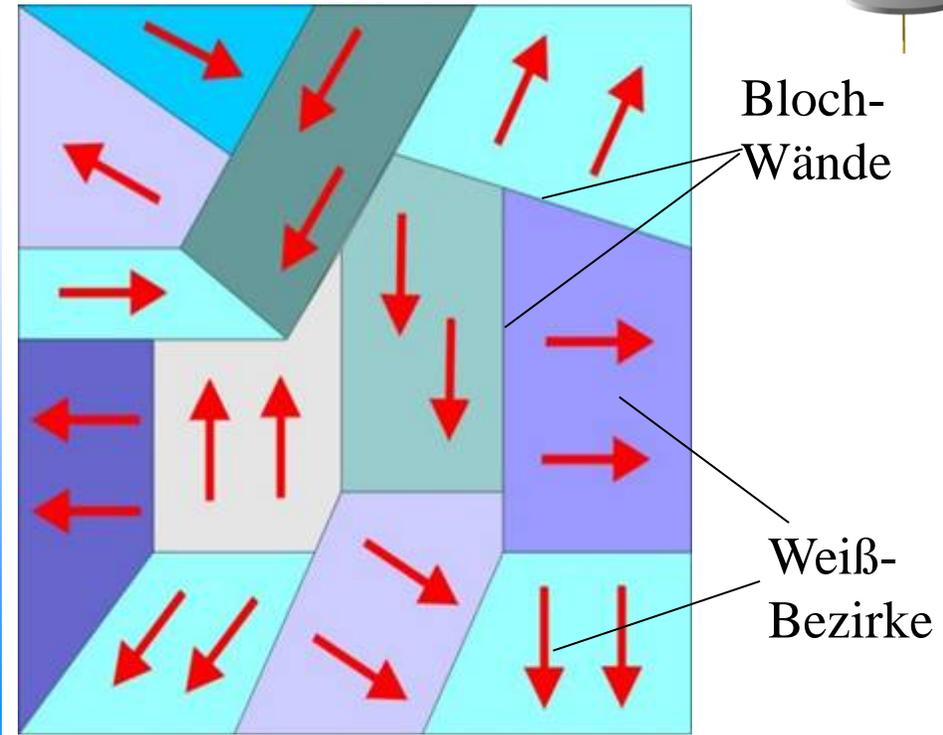
Bei Eisen ist der Zusammenhang von H und B sehr stark nichtlinear und zeigt eine *Hysterese*.

Qualitativ erhält man den Verlauf der relativen Permeabilität aus der Hysterese nach:

$$\mu_r(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$



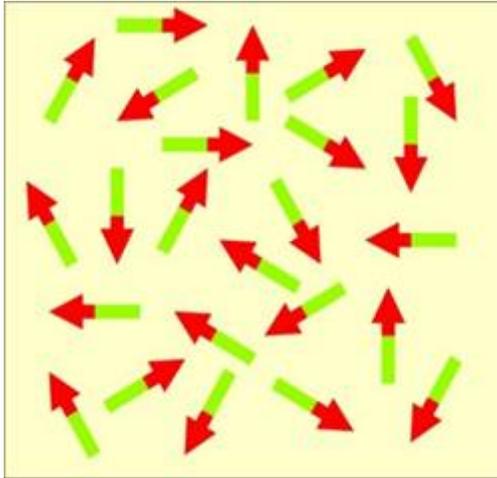
Jedes ferromagnetische Material besteht aus Bereichen mit permanenten magnetischen Momenten, die man als „Weiß'sche Bezirke“ bezeichnet. Sie sind durch „Bloch'sche Wände“ getrennt.



Durch ein äußeres Magnetfeld können die Weiß'schen Bezirke in eine Vorzugsrichtung gebracht werden. Das geht solange, bis alle Bezirke in Richtung des erregenden Feldes zeigen. Dann ist die magnetische „Sättigung“ des Materials erreicht.

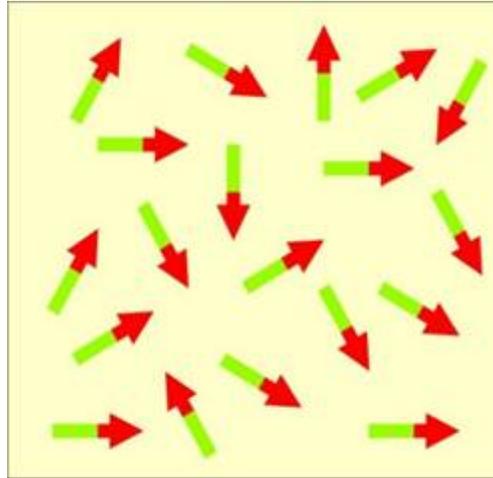


$$H = 0 \Rightarrow B = 0$$



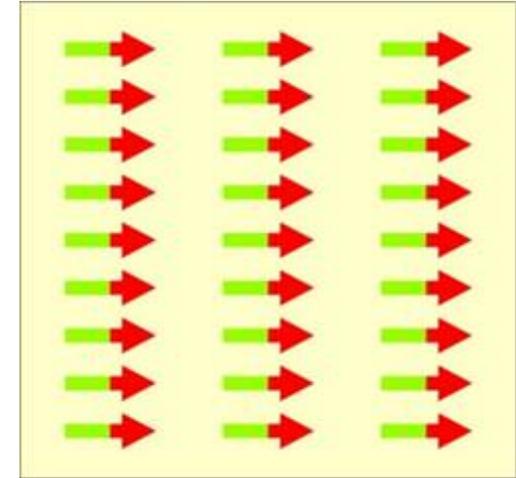
Alle Richtungen der Weiß'schen Bezirke sind mit gleicher Wahrscheinlichkeit vertreten. Der ferromagnetische Körper hat nach außen kein Magnetfeld.

$$H > 0 \Rightarrow B \propto H$$



Durch das äußere Magnetfeld werden die Weiß'schen Bezirke teilweise in Richtung dieses Feldes orientiert und zwar umso stärker, je stärker das Feld ist.

$$H \rightarrow \infty \Rightarrow B \approx \text{const.}$$

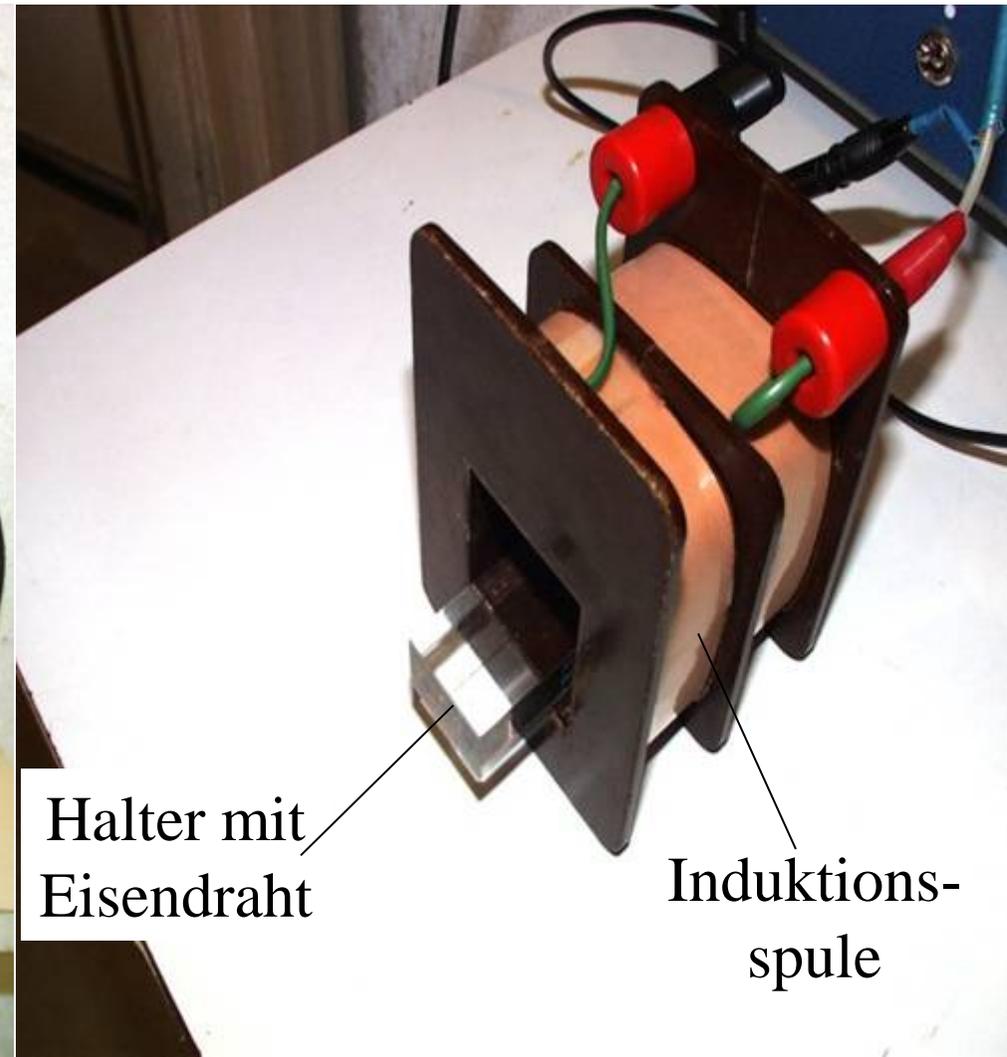
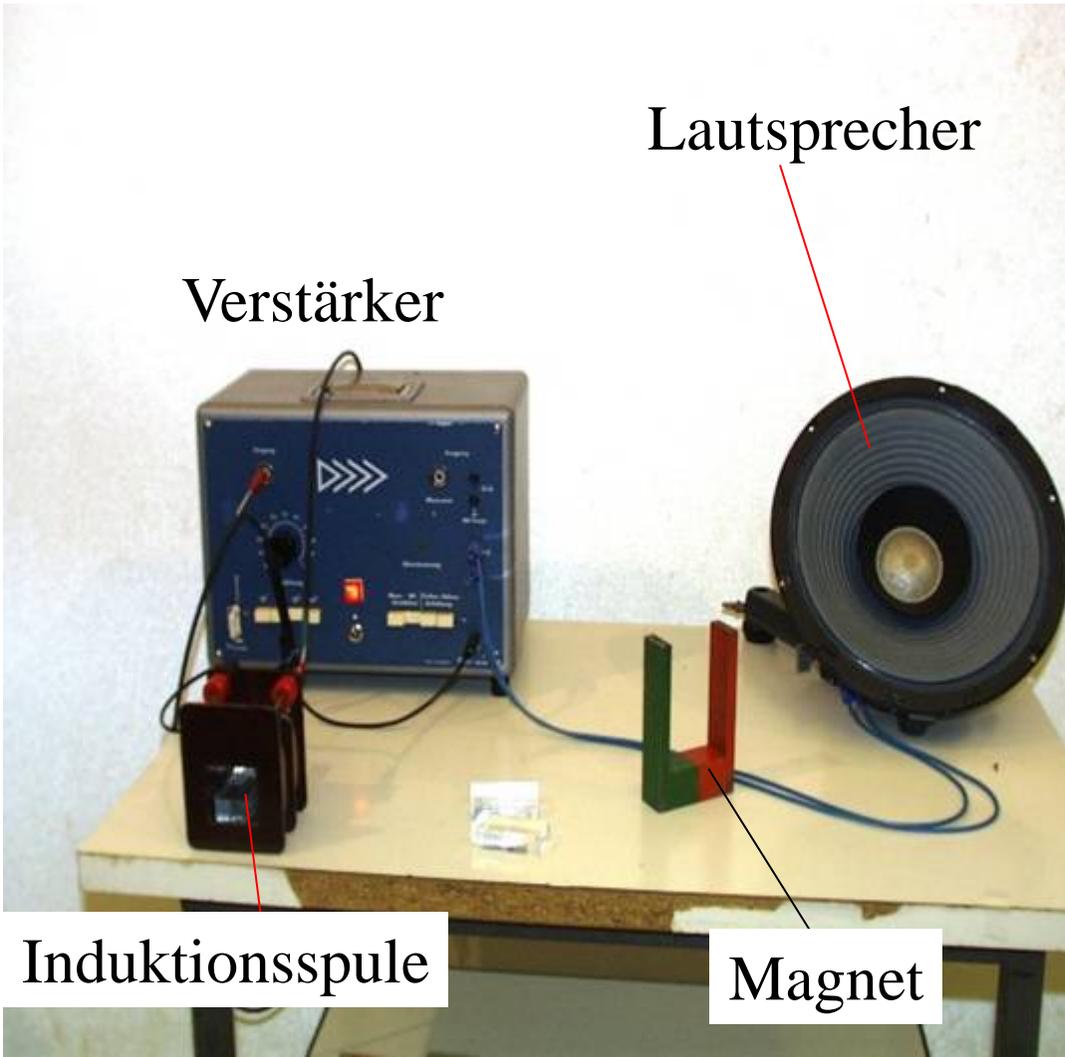


Bei einem extrem starken Feld sind alle Bezirke ausgerichtet. Dann bewirkt eine weitere Erhöhung von H (fast) keine Zunahme mehr von B . Es ist die Sättigung erreicht.



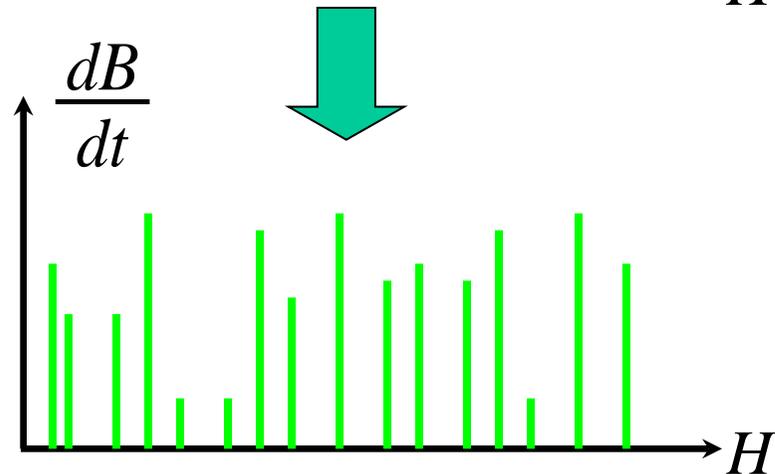
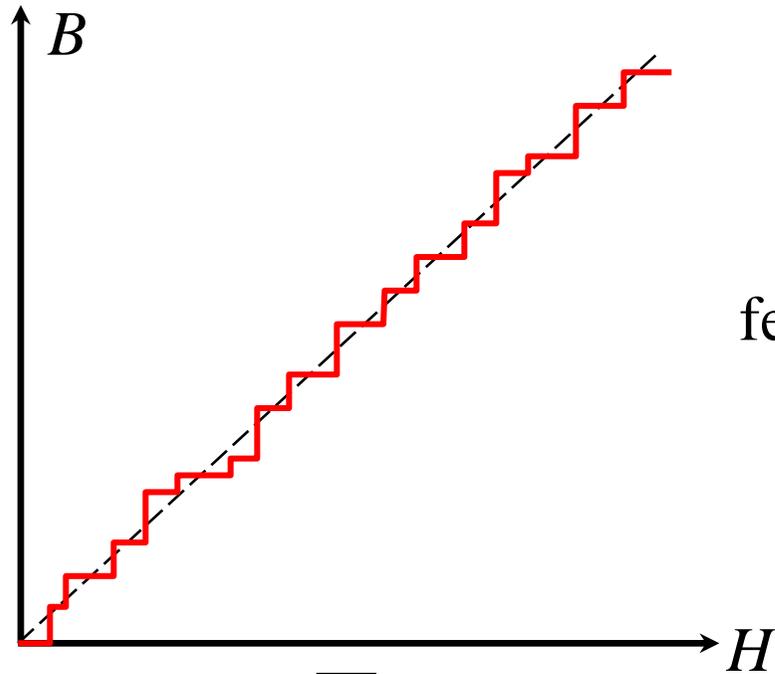
Versuch 6: Der Barkhausen-Effekt

Die Ursache für das Hystereseverhalten ist das verzögerte Umklappen der Weiß'schen Bezirke, die wie kleine Dipolmagnete wirken. Das Umklappen kann man akustisch hörbar machen (*Barkhausen-Effekt*).

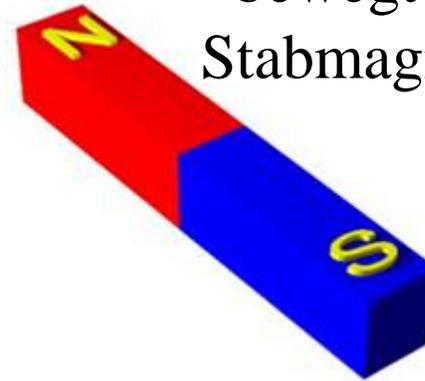




Das Umklappen der Weiß'schen Bezirke erfolgt sprunghaft:



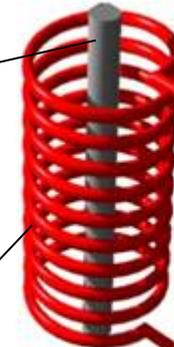
bewegter
Stabmagnet



Anordnung des
Experiments zum
Barkhauseneffekt:

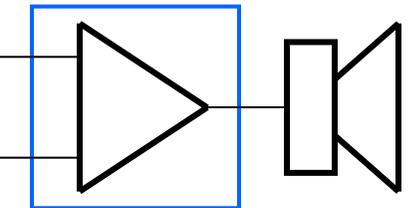
ferromagnetischer
Stab

Induktions-
spule



$$U_{\text{ind}} \propto \frac{dB}{dt}$$

Verstärker



Lautsprecher

Beim Umklappen gibt es kleine Sprünge in der Feldstärke, die in der Spule Spannungsimpulse induzieren. Man hört das als „Knistern“ im Lautsprecher.



Das magnetische Feld an Grenzflächen

(i) Senkrechte Komponente:

Die 2. Maxwell'sche Gleichung lautet:

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Anwenden auf die „infinitesimale Dose“ rechts ergibt:

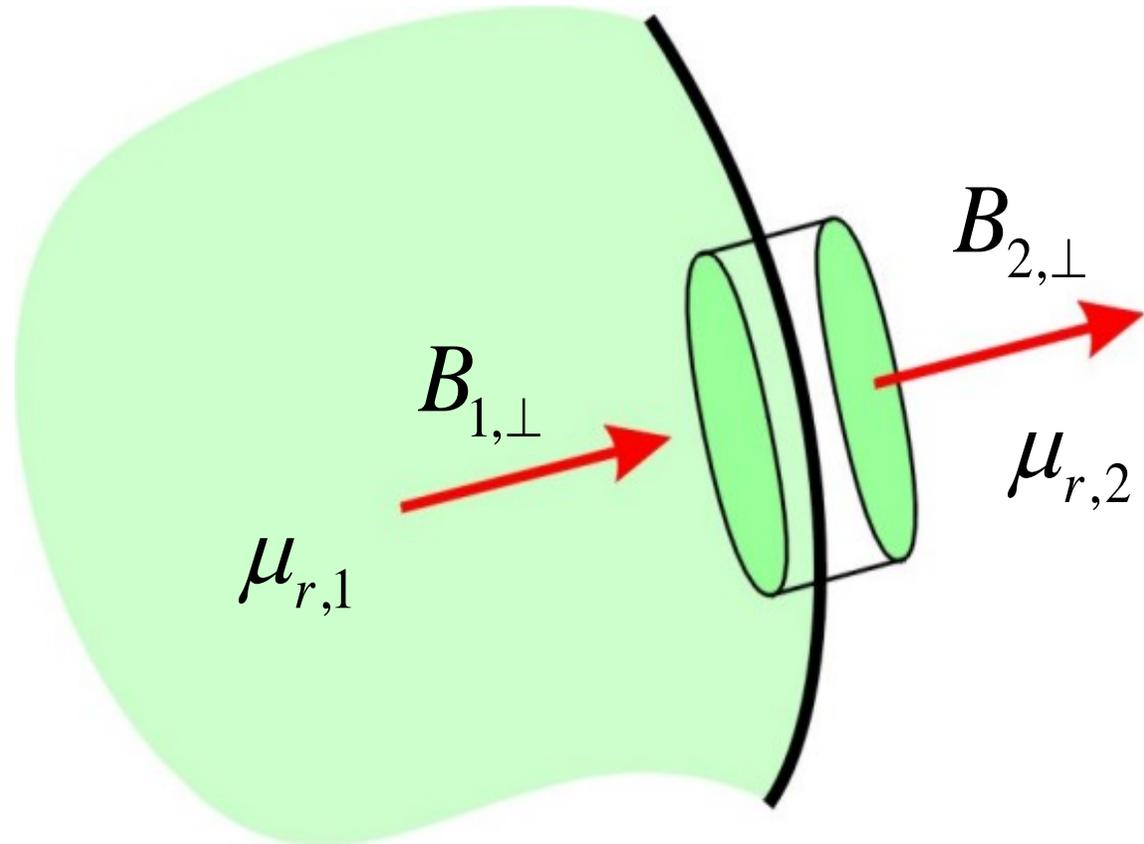
$$\oiint_{\text{Dose}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Dose

$$= B_{1,\perp} \Delta A + B_{2,\perp} (-\Delta A) = 0$$

$$\Rightarrow B_{1,\perp} \Delta A = B_{2,\perp} \Delta A \Rightarrow B_{1,\perp} = B_{2,\perp}, \quad \mu_{r,1} H_{1,\perp} = \mu_{r,2} H_{2,\perp}$$

Die senkrechte Komponente des B -Feldes ist an einer Grenzfläche stetig.





(ii) Tangentiale Komponente:

Da an der Grenzfläche keine äußeren Ströme fließen, liefert das Ampère'sche Gesetz für den Weg entlang des „infinitesimalen Rechtecks“:

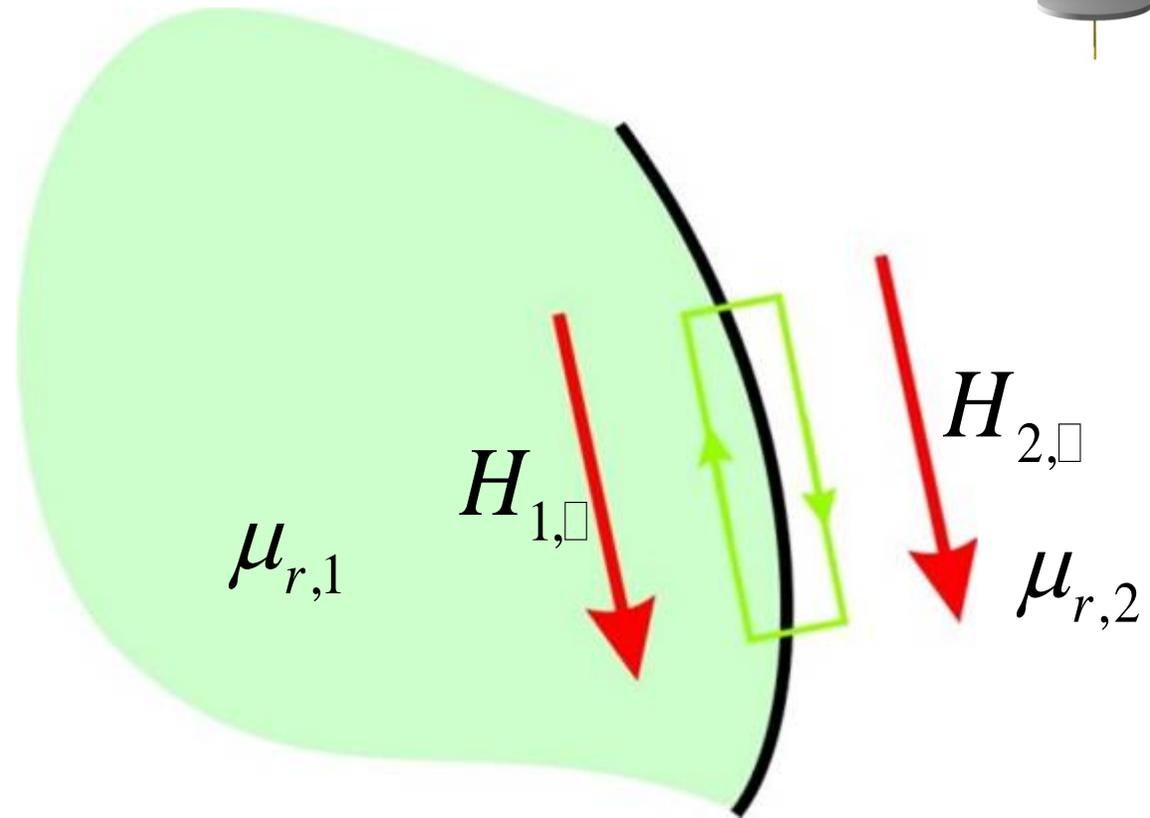
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$$

Also folgt:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = H_{1,\square} \Delta r + H_{1,\square} (-\Delta r) = 0 \Rightarrow H_{1,\square} \Delta r = H_{2,\square} \Delta r$$

$$\Rightarrow H_{1,\square} = H_{2,\square} \Rightarrow \frac{B_{1,\square}}{\mu_{r,1}} = \frac{B_{2,\square}}{\mu_{r,2}}$$

Die tangentielle Komponente des B -Feldes macht an einer Grenzfläche einen Sprung.





Die Maxwell-Gleichungen in Materie



$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$$

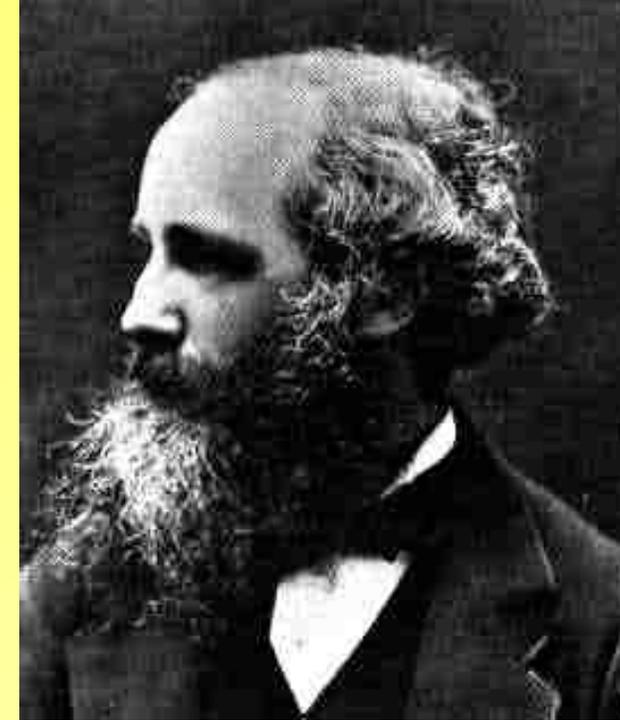


$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$





Wir wollen jetzt die 4. Maxwell'sche Gleichung umschreiben auf die D - und H -Felder für die freien Ladungen und Ströme. Es war:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$$

Weiterhin ist die gesamte Stromdichte gegeben durch

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{Trans.}} + \vec{j}_{\text{Mag.}} + \vec{j}_{\text{Pol.}} = \vec{j}_{\text{Trans.}} + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \vec{j}_{\text{Pol.}}$$

wobei $\vec{j}_{\text{Pol.}}$ die Stromdichte ist, die durch die Polarisationsladungen verursacht wird. Einsetzen in die 4. Maxwell-Gleichung ergibt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{Trans.}} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} + \mu_0 \vec{j}_{\text{Pol.}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)}_{=\vec{H}} = \vec{j}_{\text{Trans.}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \underbrace{\left(\vec{j}_{\text{Pol.}} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right)}_{=?}$$



$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{Trans.}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \left(\vec{j}_{\text{Pol.}} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right)$$

Für die Ladungsdichte ρ_P der Polarisationsladungen gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_P \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t}$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltung) ist aber auch:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{Pol.}} + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{Pol.}} = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t}$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{Pol.}} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{Pol.}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{j}_{\text{Pol.}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{j}_{\text{Pol.}} = 0$$

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}} \quad \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Zusammenstellung der
Maxwell-Gleichungen
in Materie
(differentielle Form)

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{Trans.}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(1) \quad \oiint_O \vec{D} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{frei}}}{\epsilon_0}$$

Zusammenstellung der
Maxwell-Gleichungen
in Materie
(integrale Form)

$$(2) \quad \oiint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$(3) \quad \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

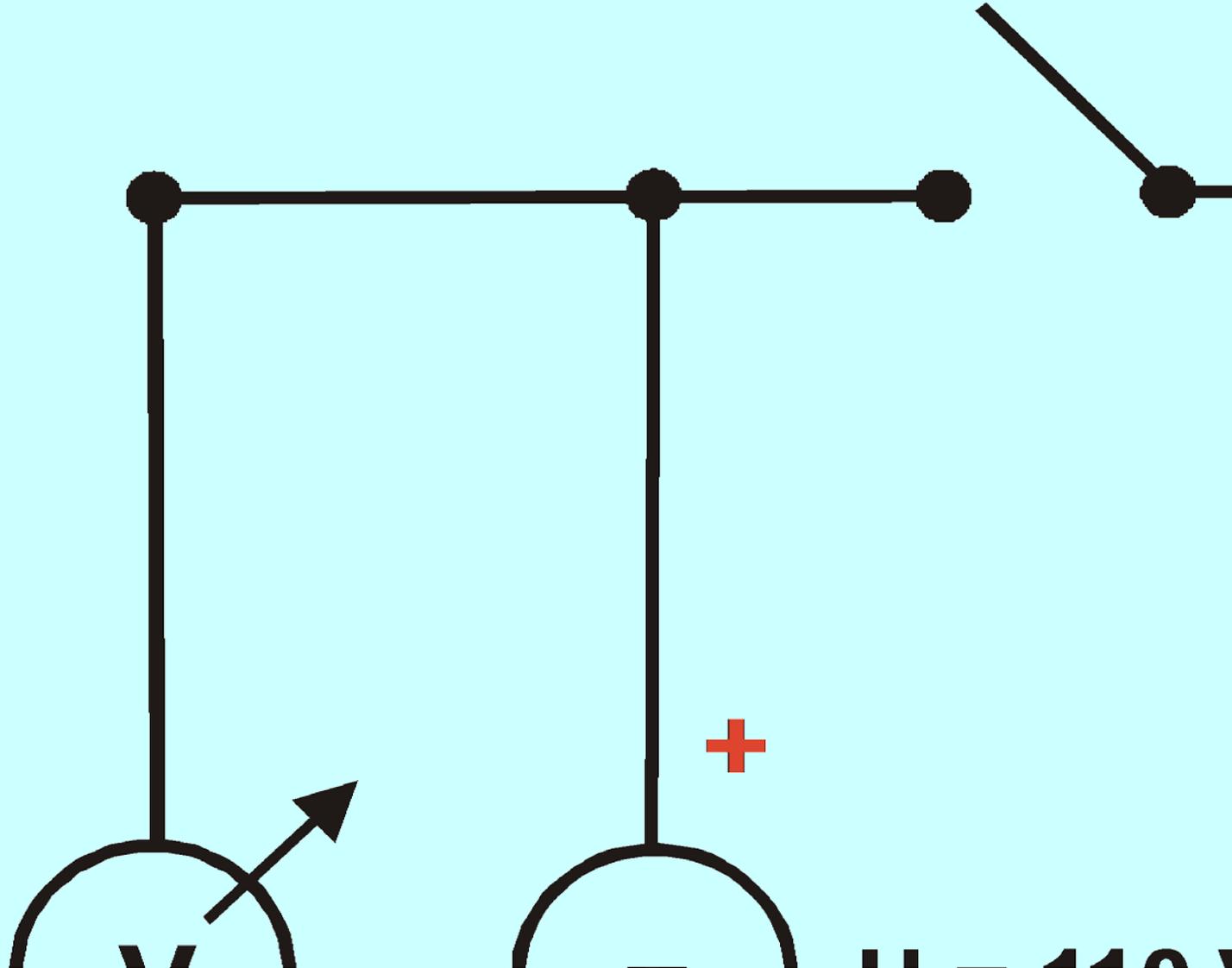
$$(4) \quad \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\text{Trans.}} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

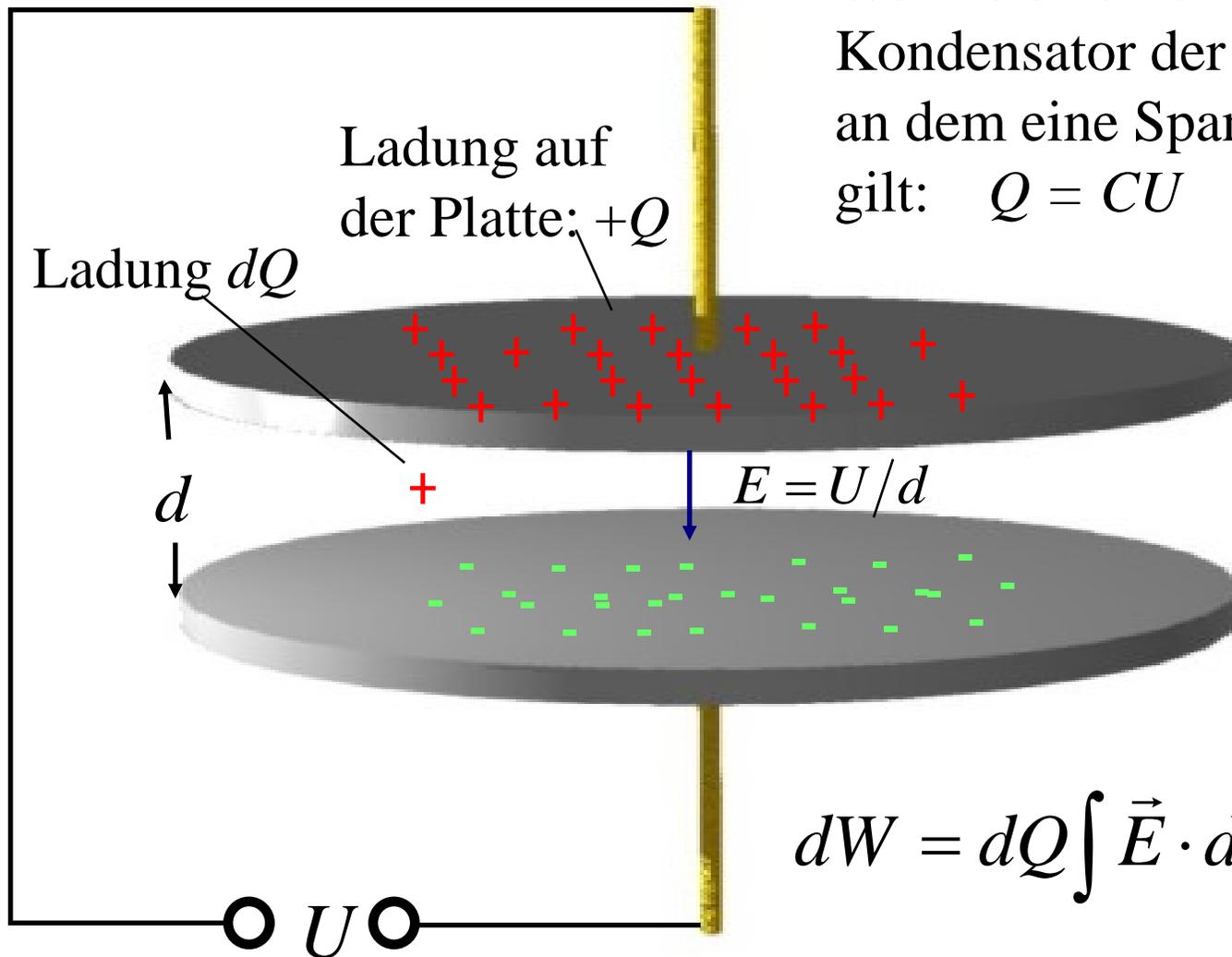


Die im elektromagnetischen Feld gespeicherte Energie

(i) Gespeicherte Energie im elektrischen Feld

Versuch 7: Entladung eines Kondensators





Wenn sich eine Ladung Q auf einem Kondensator der Kapazität C befindet, an dem eine Spannung U anliegt, dann gilt: $Q = CU$

Die Arbeit dW die notwendig ist, um eine Ladung dQ zu der Ladung Q auf der Platte hinzuzufügen ist:

$$dW = dQ \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = dQ \frac{U}{d} d = U dQ$$

$$\Rightarrow dW = \frac{Q}{C} dQ$$



Wenn der Kondensator auf die Gesamtladung Q_{ges} aufgeladen wird, dann ergibt die Integration für die gesamte aufzuwendende „Aufladearbeit“:

$$W = \int_0^{Q_{\text{ges}}} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2C} Q_{\text{ges}}^2$$

Wegen $Q = CU$ folgt daraus:

$$W = \frac{1}{2} CU^2$$

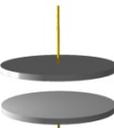
Diese Energie ist im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert.

Dieses Ergebnis kann stark verallgemeinert werden. Mit der Formel für die Kapazität eines Plattenkondensators folgt:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \left(\epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \right) (Ed)^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \underbrace{(Ad)}_{\text{Kondensator-} \\ &\quad \text{volumen } V} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 V \end{aligned}$$

Für die Energiedichte w_E , d.h. die Energie pro Volumen, des elektrischen Feldes in einem Plattenkondensator gilt also:

$$w_E = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$$



Dieses Ergebnis gilt ganz allgemein, da jeder Raumbereich „infinitesimal eben“ ist. Daher gilt für die Energiedichte w_E in einem beliebigen elektrischen Feld:

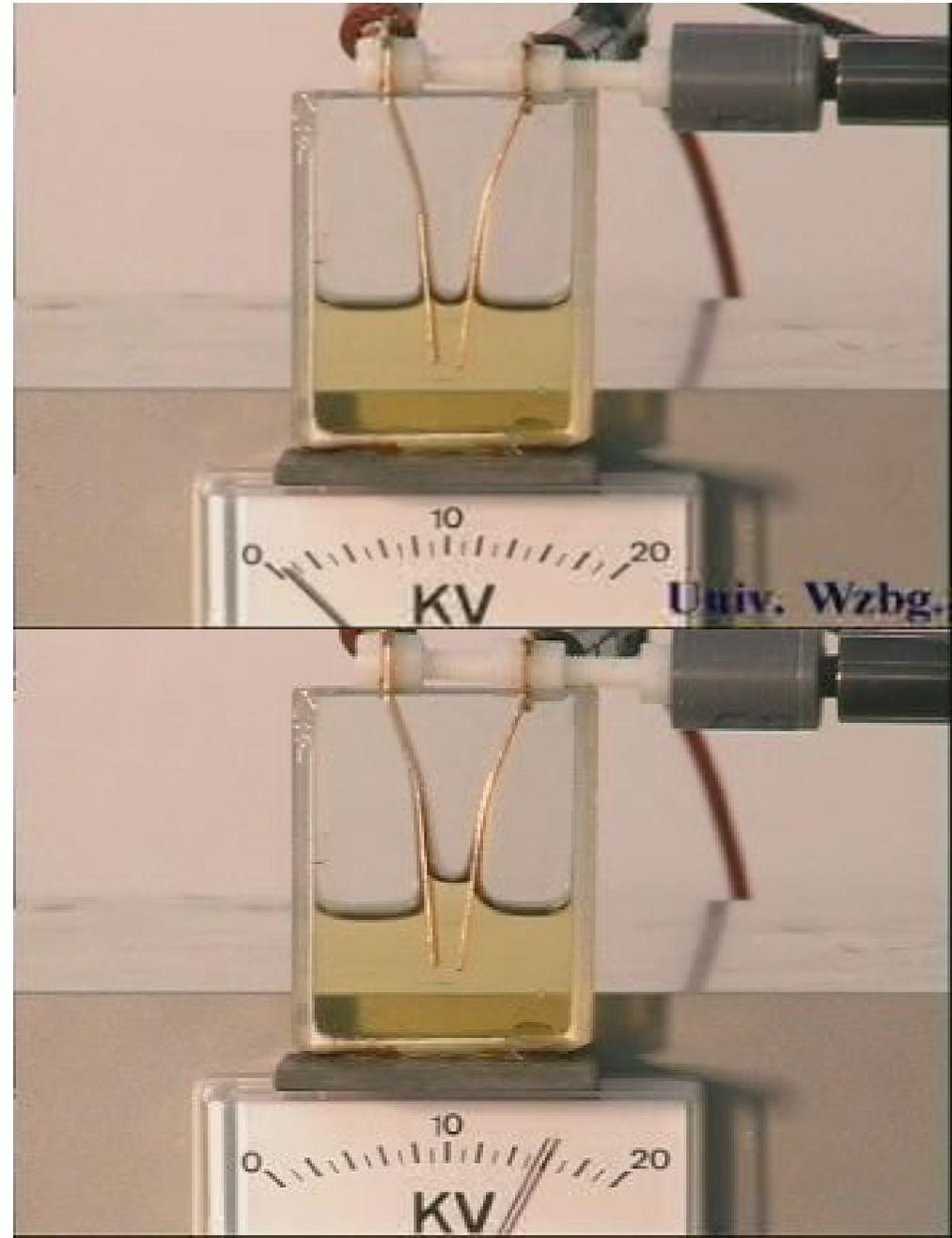
$$w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$$

Dies kann mit dem Feld der dielektrischen Verschiebung auch geschrieben werden als:

$$w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} D E$$

In einem Raumbereich mit Dielektrikum ist wegen $\epsilon_r > 1$ die Energiedichte höher als außerhalb.

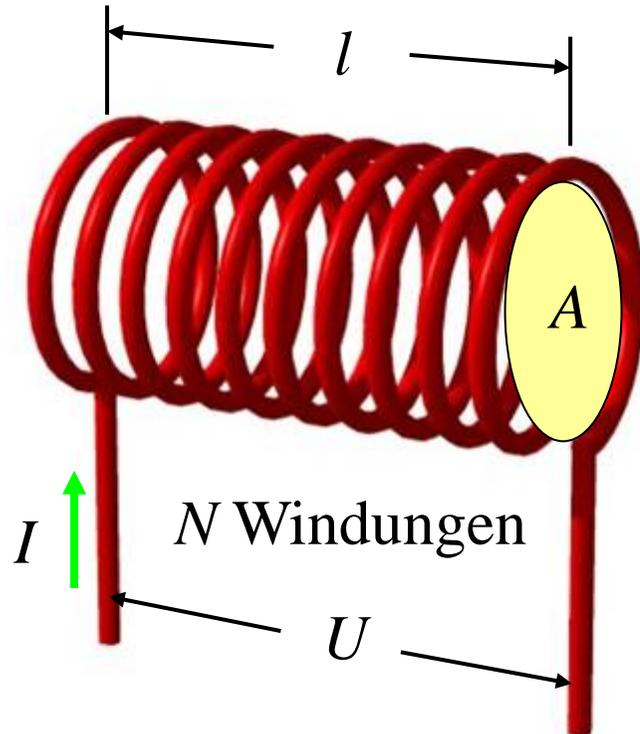
Versuch 8: Flüssigkeit im Kondensator





(ii) Gespeicherte Energie im magnetischen Feld

Wir betrachten die folgende Spule:



Das Magnetfeld im Innern der Spule ist:

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{N I}{l}$$

Wenn sich der Strom zeitlich ändert, dann wird eine Spannung U induziert:

$$U = -N A \frac{dB}{dt}$$

$$= - \underbrace{\mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l}}_{=L \text{ (Selbst) Induktivität einer Spule}} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Die Leistung P ist:

$$P = \frac{dW}{dt} = U I = L \frac{dI}{dt} I$$

$$\Rightarrow dW = L I dI$$



Aus

$$dW = LI \, dI$$

folgt durch Integration sofort für die in der Spule gespeicherten Arbeit bzw. Energie:

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

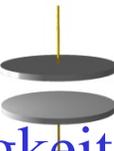
Diese Energie ist im magnetischen Feld der Spule gespeichert.

Dieses Ergebnis kann wie im Fall der elektrischen Feldes wieder stark verallgemeinert werden. Mit der Formel für die Induktivität einer stromdurchflossenen Spule folgt:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \left(\mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \right) I^2 \\ &= \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} \left((\mu_r \mu_0)^2 \frac{N^2 I^2}{l^2} \right) \underbrace{(Al)}_{\text{Spulenvolumen } V} \\ &= \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} \underbrace{\left(\mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} \right)^2}_{\text{Magnetfeld } B \text{ im Inneren einer Spule}} V = \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} B^2 V \end{aligned}$$

Für die Energiedichte w_B , d.h. die Energie pro Volumen, des magnetischen Feldes innerhalb einer Spule gilt:

$$w_B = \frac{W}{V} = \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} B^2$$



Dieses Ergebnis gilt wieder ganz allgemein, da jeder Raumbereich „infinitesimal eben“ ist. Daher gilt für die Energiedichte w_B in einem beliebigen magnetischen Feld:

$$w_B = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2\mu_r\mu_0} B^2$$

Dies kann auch wieder mit dem H -Feld ausgedrückt werden. Wegen

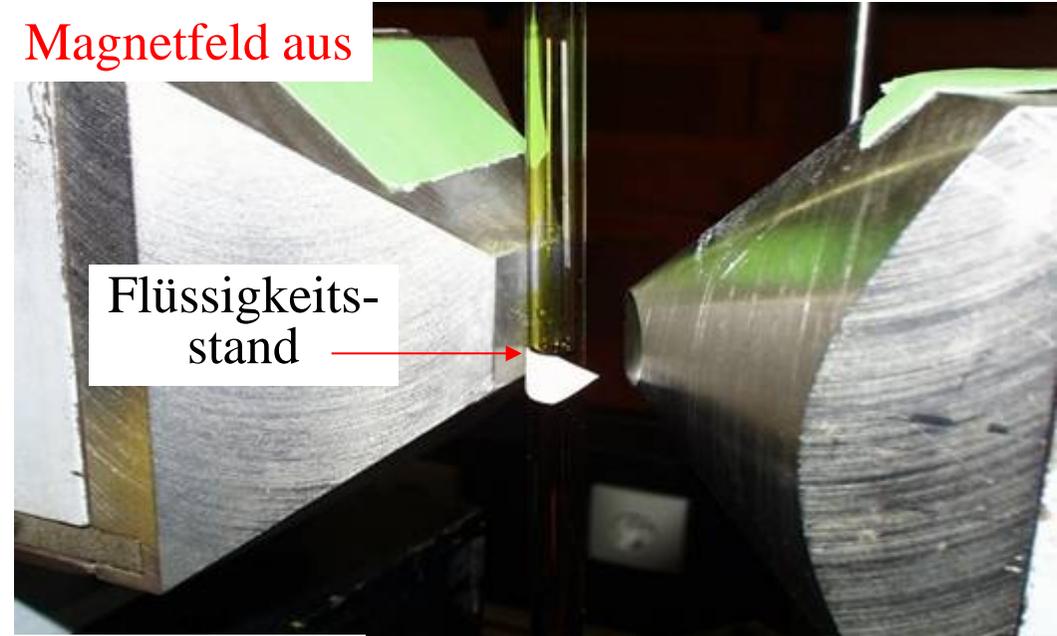
$$B = \mu_r\mu_0 H$$

folgt:

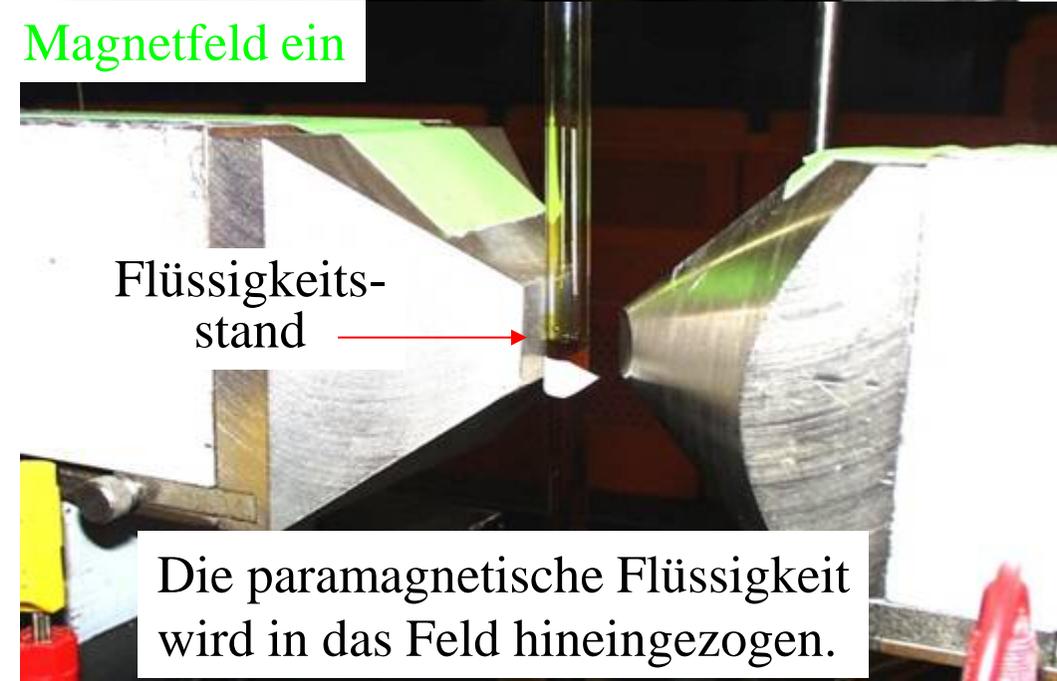
$$w_B = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} H B$$

Versuch 9: Paramagnetische Flüssigkeit

Magnetfeld aus



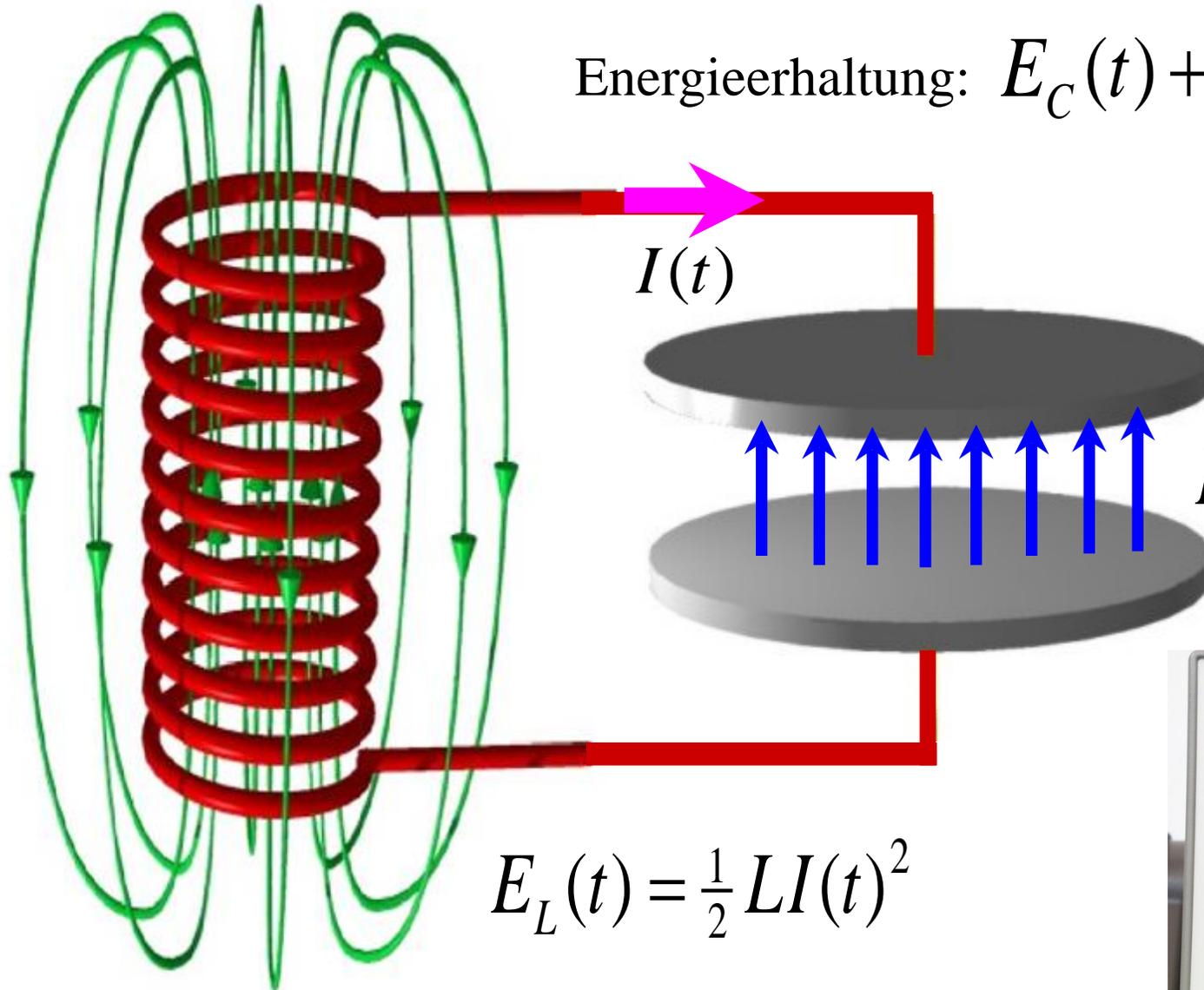
Magnetfeld ein





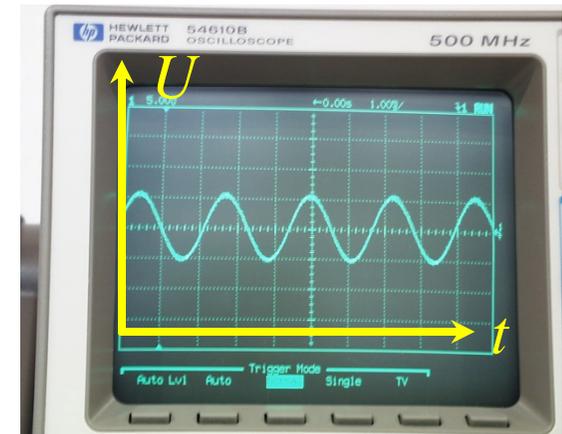
Die im elektrischen und magnetischen Feld gespeicherte Energie kann ineinander umgewandelt werden. Für den Schwingkreis gilt beispielsweise:

$$\text{Energieerhaltung: } E_C(t) + E_L(t) = E$$



$$E_C(t) = \frac{1}{2} C U(t)^2$$

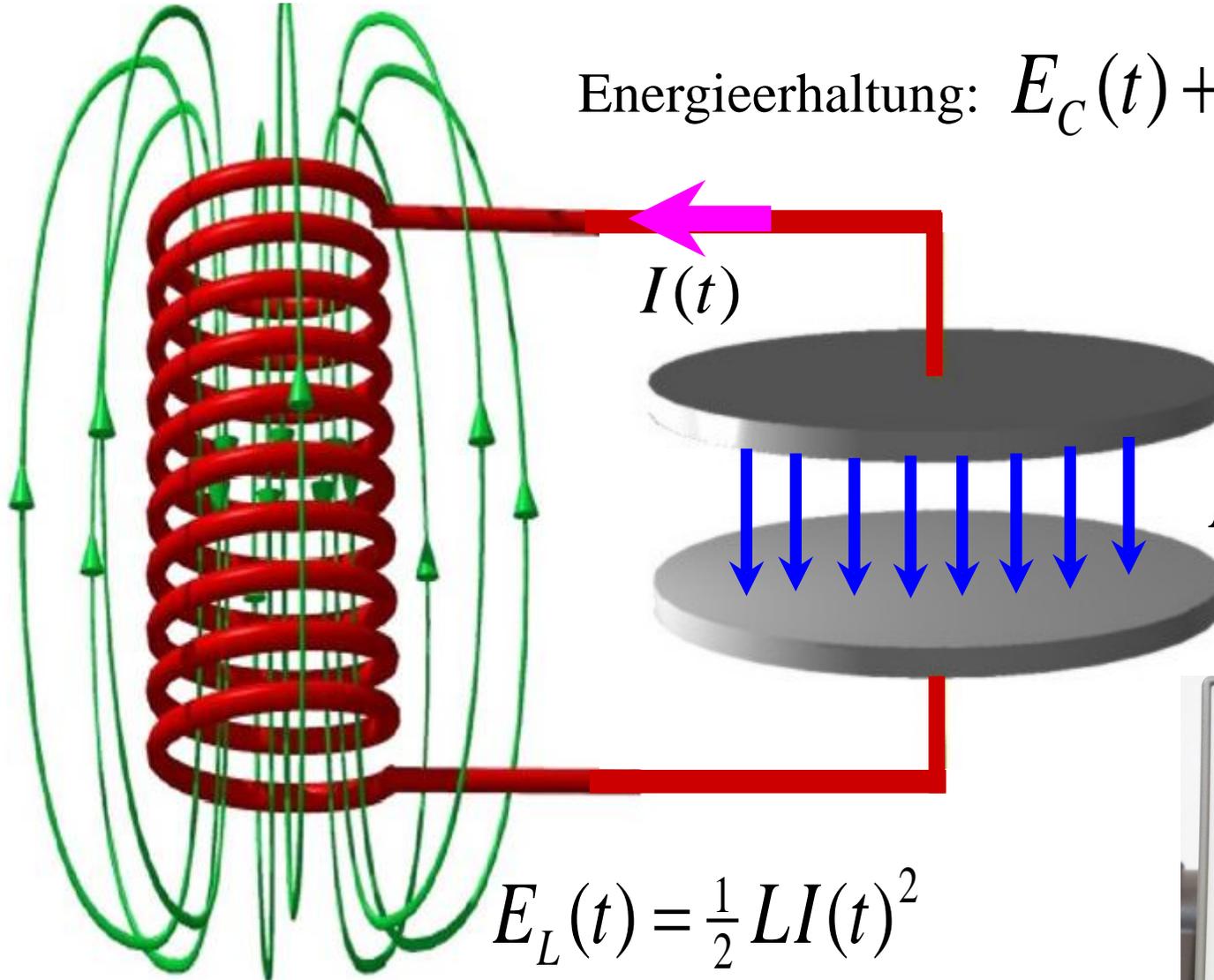
$$E_L(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2$$



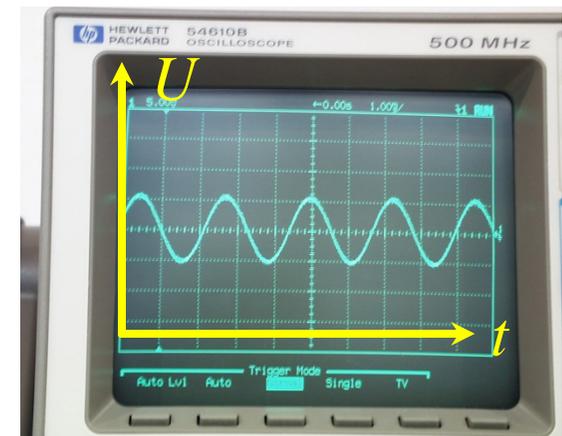


Die im elektrischen und magnetischen Feld gespeicherte Energie kann ineinander umgewandelt werden. Für den Schwingkreis gilt beispielsweise:

$$\text{Energieerhaltung: } E_C(t) + E_L(t) = E$$



$$E_C(t) = \frac{1}{2} CU(t)^2$$





Die Energieerhaltung liefert:

$$E_C(t) + E_L(t) = E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} C U^2 + \frac{1}{2} L I^2 = E$$

Wegen

$$Q = CU \text{ und } I = \frac{dQ}{dt}$$

folgt nun:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 = E$$

Differenzieren dieser Gleichung ergibt:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{C} 2Q \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2} L 2 \frac{dQ}{dt} \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

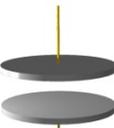
$$\Rightarrow \frac{1}{C} Q + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \omega^2 Q(t) = 0$$

Dabei wurde die Frequenz $\omega^2 = 1/LC$ eingeführt. Dies ist die DGL des harmonischen Oszillators für die Funktion $Q(t)$ und damit auch für $I(t)$ und $U(t)$.

Aus der Energieerhaltung kann also, genauso wie in der Mechanik, die zeitliche Entwicklung des Systems hergeleitet werden.



Inhalt der Vorlesung B1

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Einleitung

Ladungen & Elektrostatische Felder

Elektrischer Strom

Magnetostatik

Elektrodynamik: Die Maxwell'schen Gleichungen

Wechselstromnetzwerke

Elektromagnetische Wellen & Strahlung

5. Optik

Licht als elektromagnetische Welle

Geometrische Optik

Optische Abbildungen

Wellenoptik

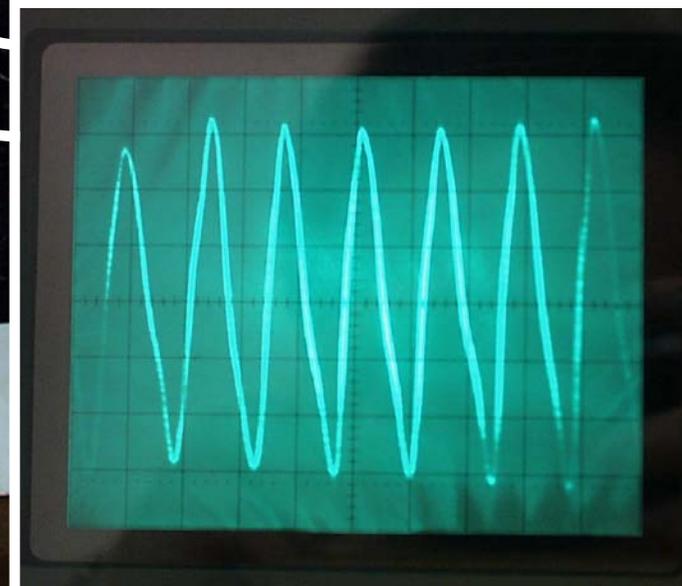
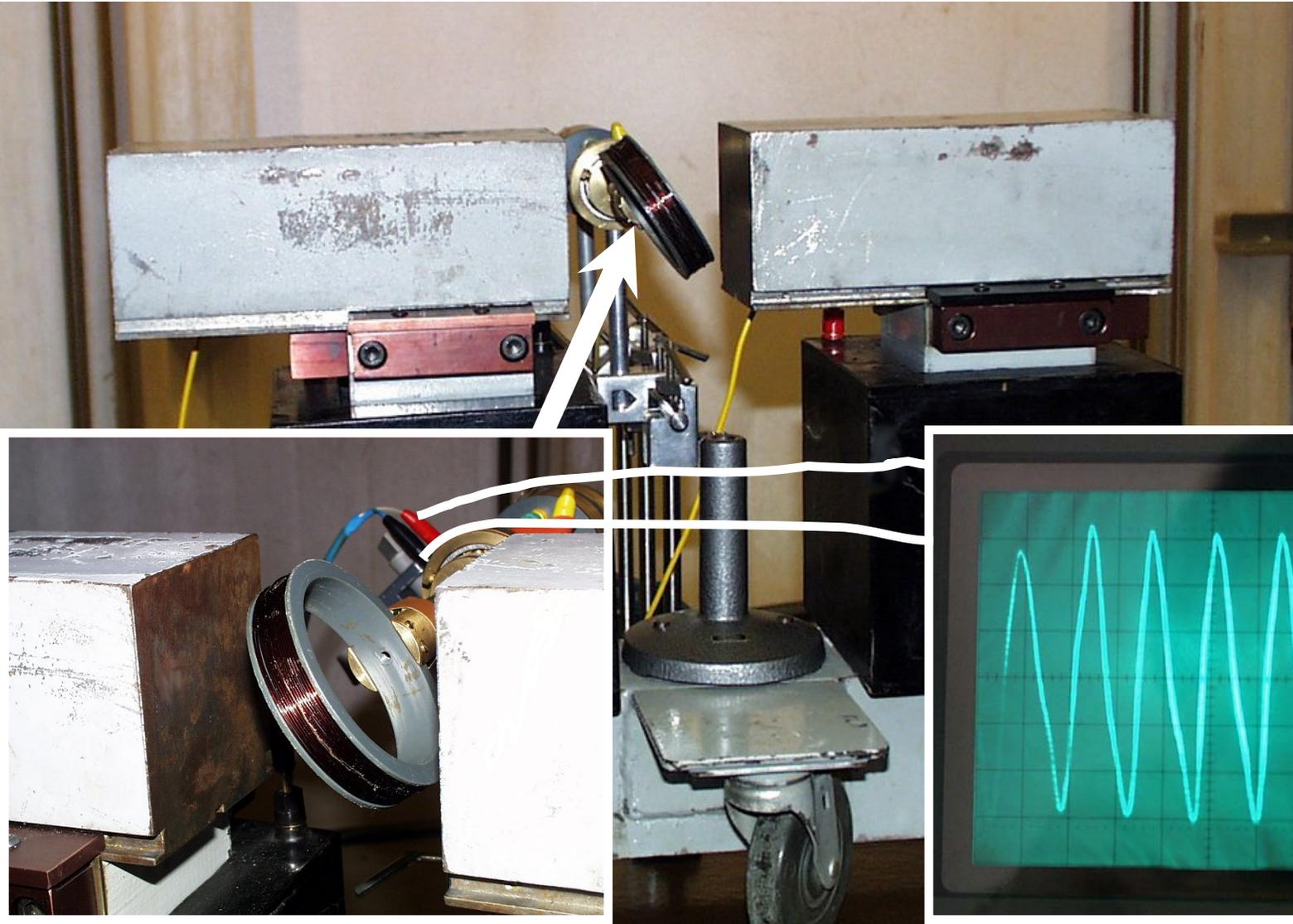


Wechselstromnetzwerke

Prinzip eines Wechselspannungsgenerators

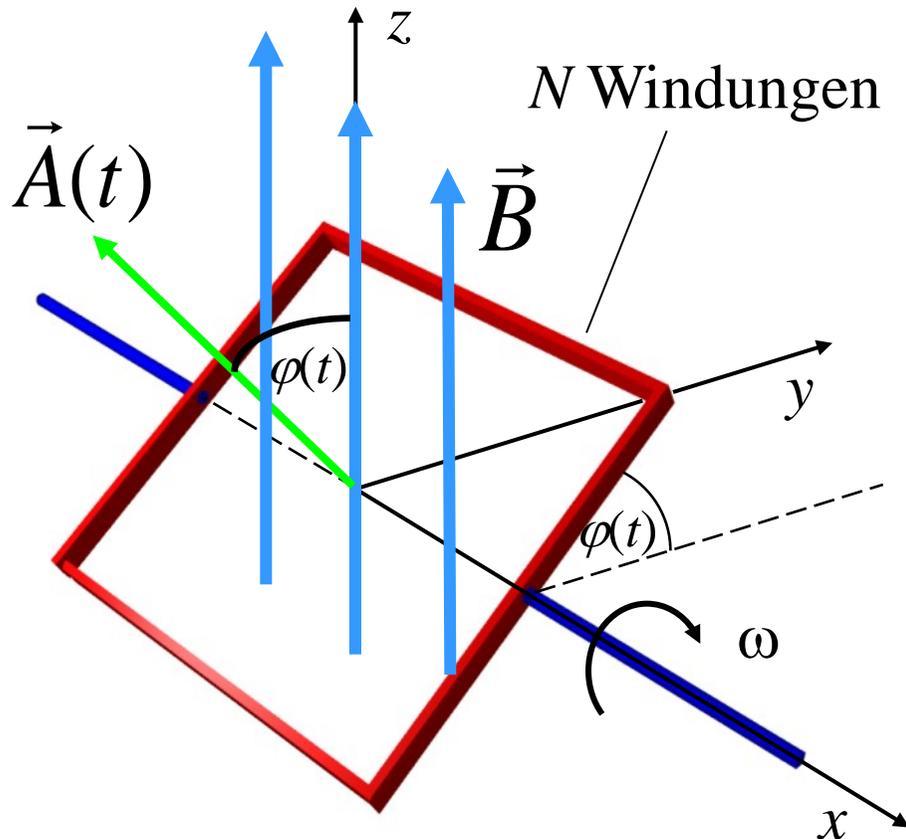
Versuch 1: Rotierende Spule in einem konstanten Magnetfeld

Bei Rotation der Spule wird an ihren Enden eine sinusförmige Spannung gemessen.





Wir betrachten eine Leiterschleife der Fläche A mit N Windungen (Spule), die in einem homogenen Magnetfeld mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.



Die Rotationsachse zeigt in die x -Richtung. Das homogene Magnetfeld hat nur eine z -Komponente, also:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

Der Fluß durch die Fläche A ist dann:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{mag.}}(t) &= \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A}(t) \\ &= BA \cos(\varphi(t)) \end{aligned}$$

$\varphi(t) = \omega t$ ist hierbei die Phase.

Einsetzen ergibt:

$$\Phi_{\text{mag.}}(t) = BA \cos(\omega t)$$



Mit dem Induktionsgesetz kann nun die in der Leiterschleife erzeugte Spannung berechnet werden:

$$U_{\text{ind}}(t) = -N \frac{d\Phi(t)}{dt} = NBA\omega \sin(\omega t)$$

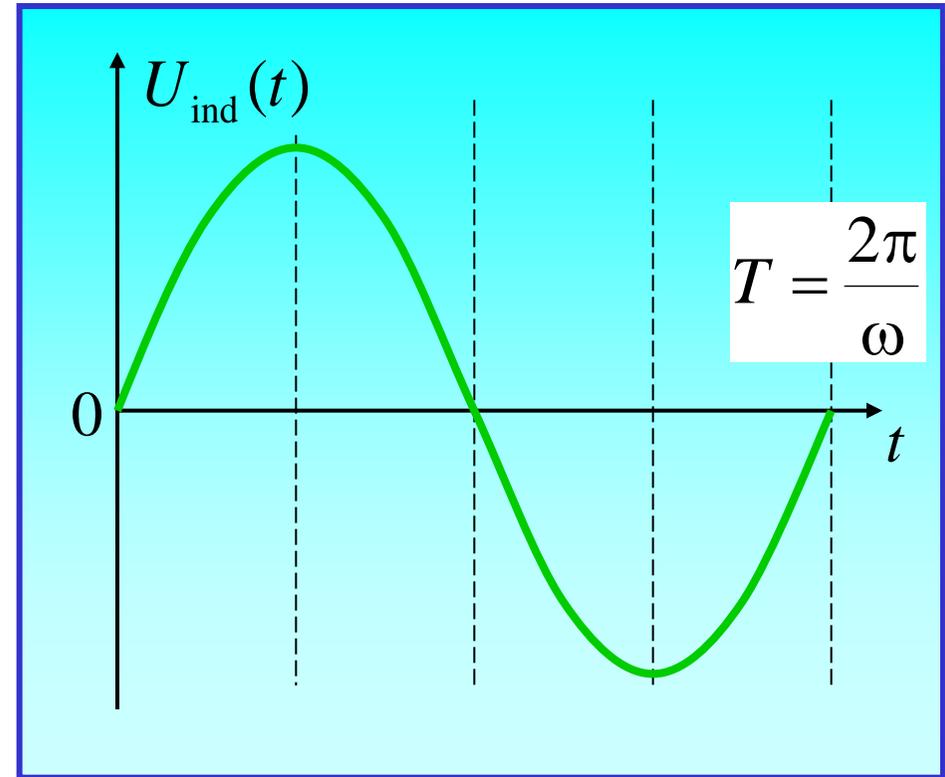
Es entsteht eine periodische Induktionsspannung mit der Amplitude:

$$U_0 = NBA\omega$$

Die Spannung ist also proportional zur Rotationsfrequenz ω . Eine periodische Spannung der Form

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

wird „Wechselspannung“ genannt.



Beispiel:

Die im Haushalt übliche Spannung ist eine Wechselspannung mit der Frequenz:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = 50\text{s}^{-1} = 50\text{Hz}$$

Wechselspannung und Wechselstrom

Wechselspannungen und Wechselströme haben die Form:

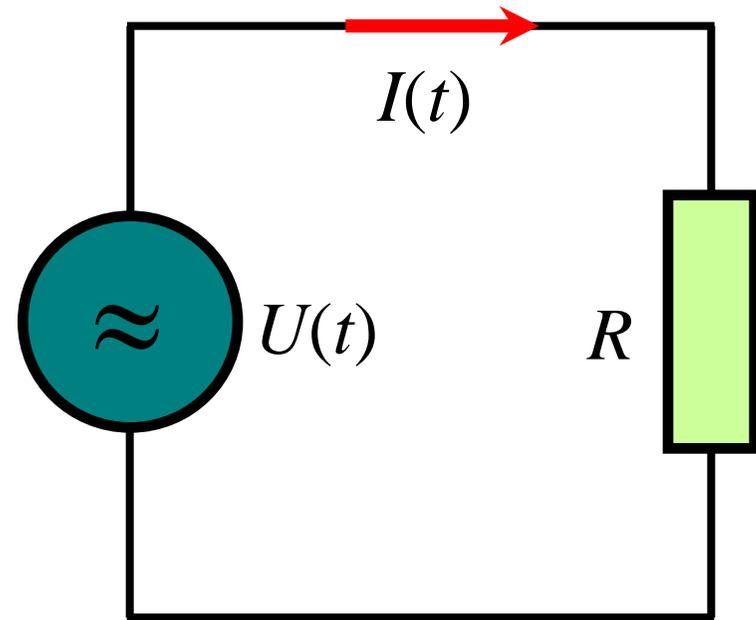
$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Dabei sind φ und ϕ Phasen bezüglich einer beliebigen Referenz. An einem Ohm'schen Widerstand sind die Phasen zwischen Strom und Spannung wegen $U(t) = R \cdot I(t)$ gleich. In diesem Fall kann einfach $\varphi = \phi = 0$ gesetzt werden.

Wir betrachten nun die wirkende elektrische Leistung P .

Die Leistung ist gegeben als Produkt von Strom und Spannung.

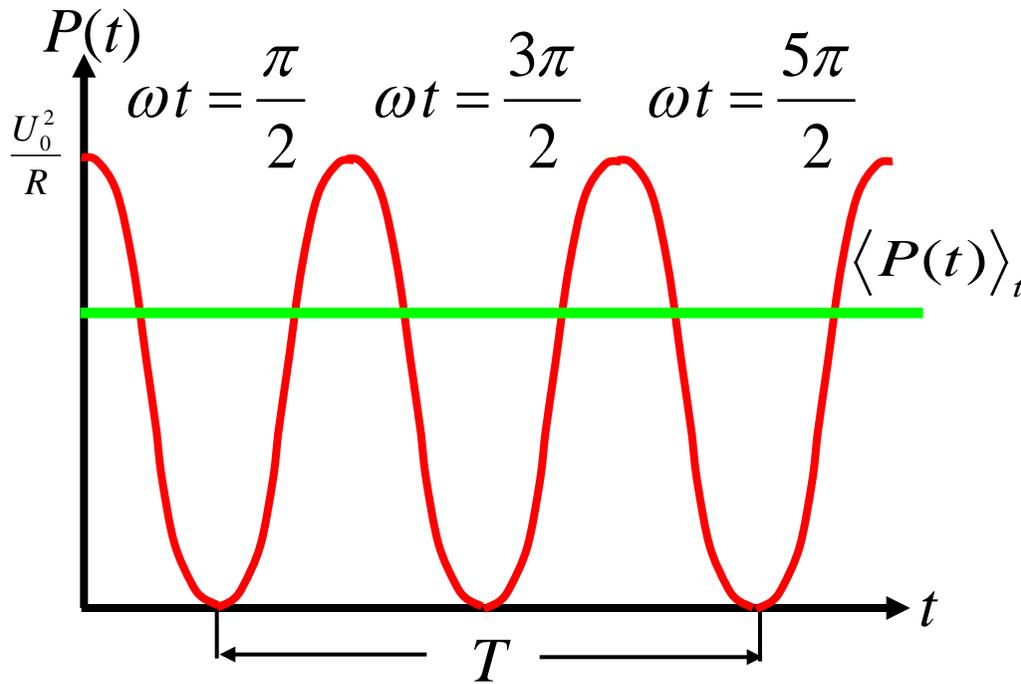


An einen Ohm'schen Widerstand gilt:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t)$$

Damit ergibt sich für die elektrische Leistung, die an einem Widerstand R verbraucht wird:

$$P(t) = U(t) I(t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t)$$



Die Leistung $P(t)$ ist nun eine zeitabhängige, periodische Größe. Entscheidend ist ihr zeitlicher Mittelwert:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

Aus der Graphik liest man ab:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} P(t) dt$$

Einsetzen liefert:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{4}{T} \frac{U_0^2}{R} \int_0^{T/4} \cos^2(\omega t) dt$$

Mit der Substitution

$$\omega t = x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\omega}$$

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

folgt:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{4}{T} \frac{U_0^2}{R} \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$$



Weiterhin gilt (siehe z.B. Bronstein):

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Also ergibt sich mit $\omega = 2\pi/T$:

$$\langle P(t) \rangle_t = \frac{4 U_0^2}{T R} \frac{1}{2\pi/T} \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1 U_0^2}{2 R}$$

Dies ist die sog. „*Wirkleistung*“, die den Widerstand erwärmt. Bei einer Gleichspannung hätte sich als Wirkleistung $\langle P \rangle = U_0^2/R$ ergeben.

Es ergibt sich also für die Wirkleistung:

Gleichspannung Wechselspannung

$$\langle P \rangle_{=} = \frac{U_0^2}{R}$$

$$\langle P \rangle_{\approx} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}$$

Daher werden jeweils eine „*effektive Spannung*“ und ein „*effektiver Strom*“

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{R\sqrt{2}}$$

definiert, die an einem Ohm'schen Widerstand dieselbe mittlere Leistung bewirken würden, wie eine gleich große Gleichspannung, d.h.:

$$\langle P \rangle_{\approx} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_0^2}{2R}$$

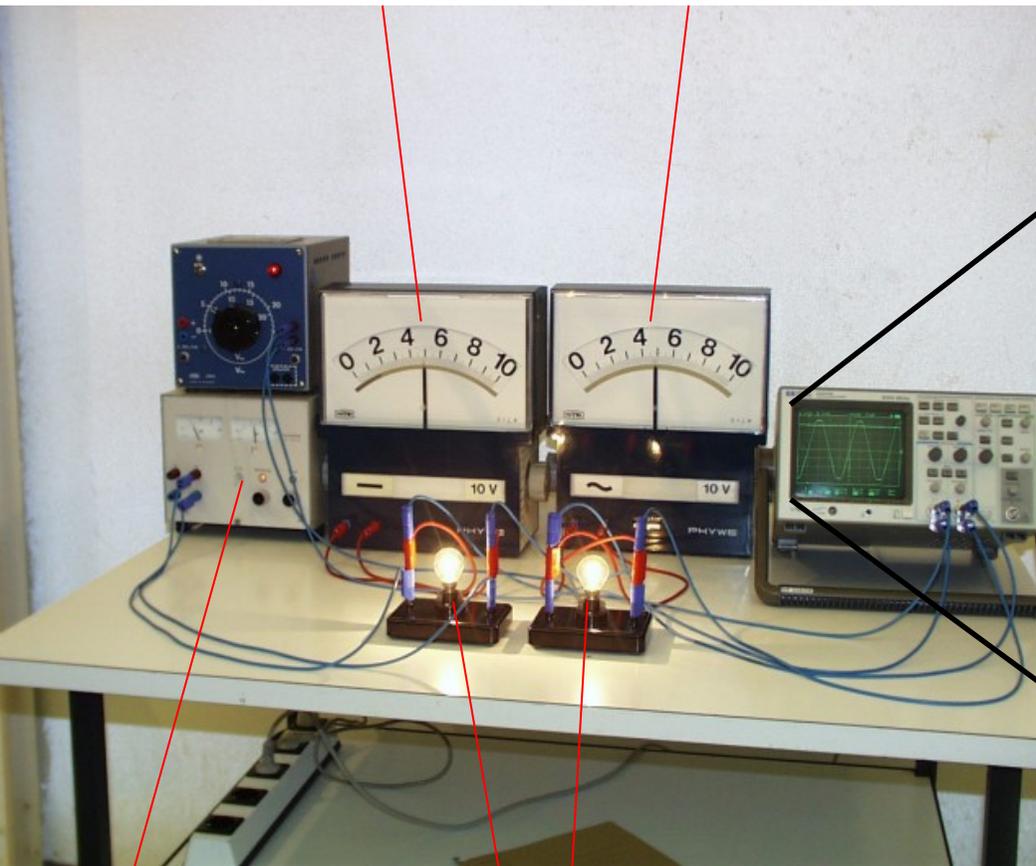


Versuch: Effektivwerte von Strom und Spannung

Die baugleichen Lampen werden auf gleiche Helligkeit eingestellt.

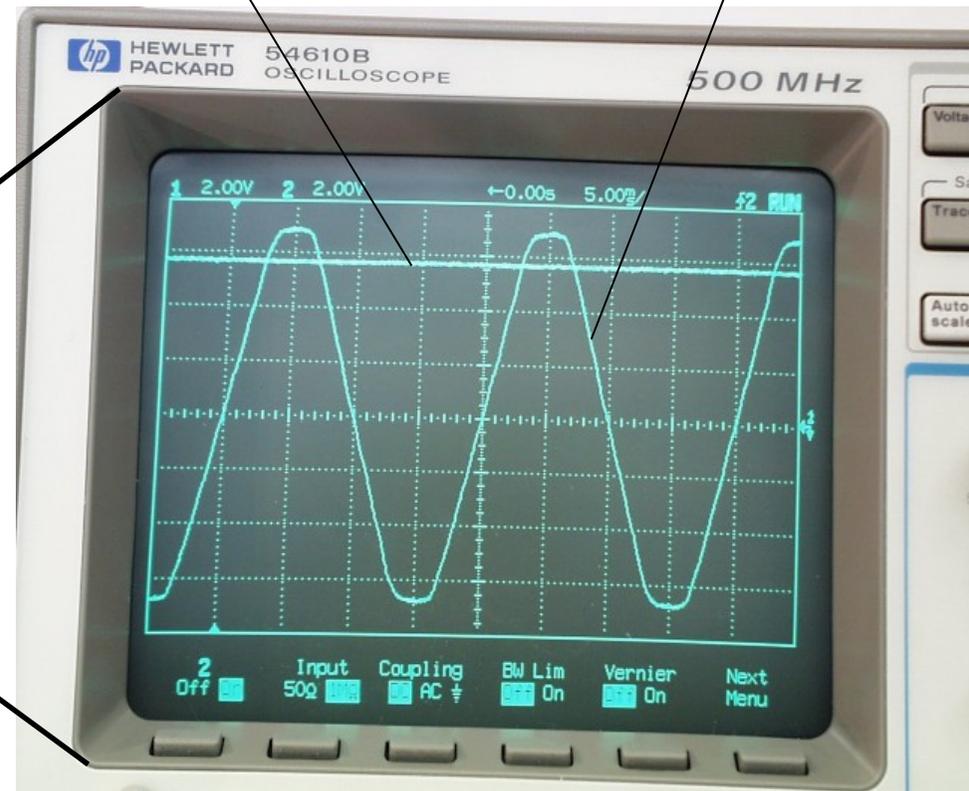
Gleichspannung

Wechselspannung



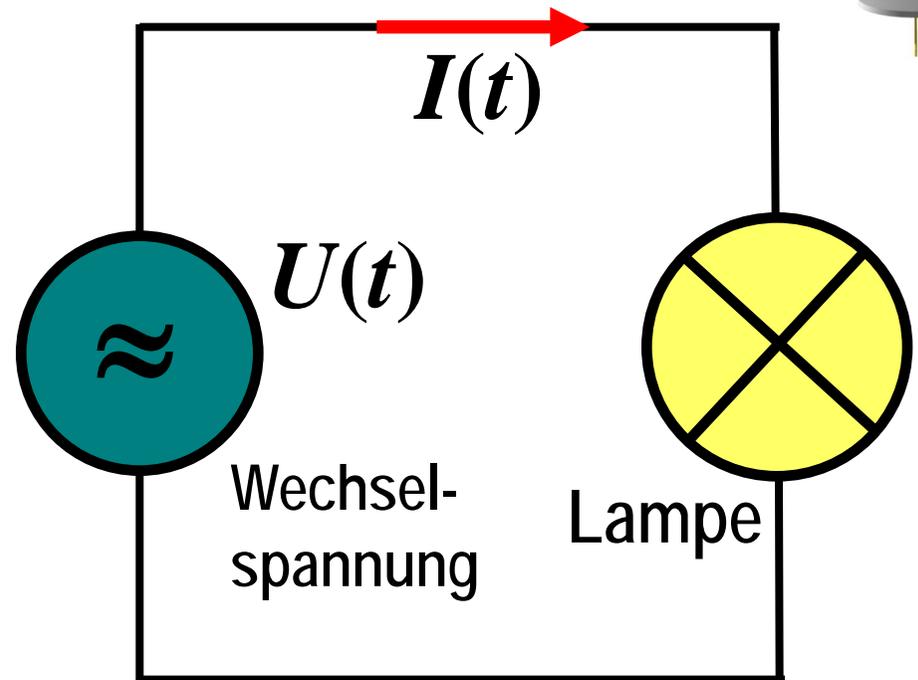
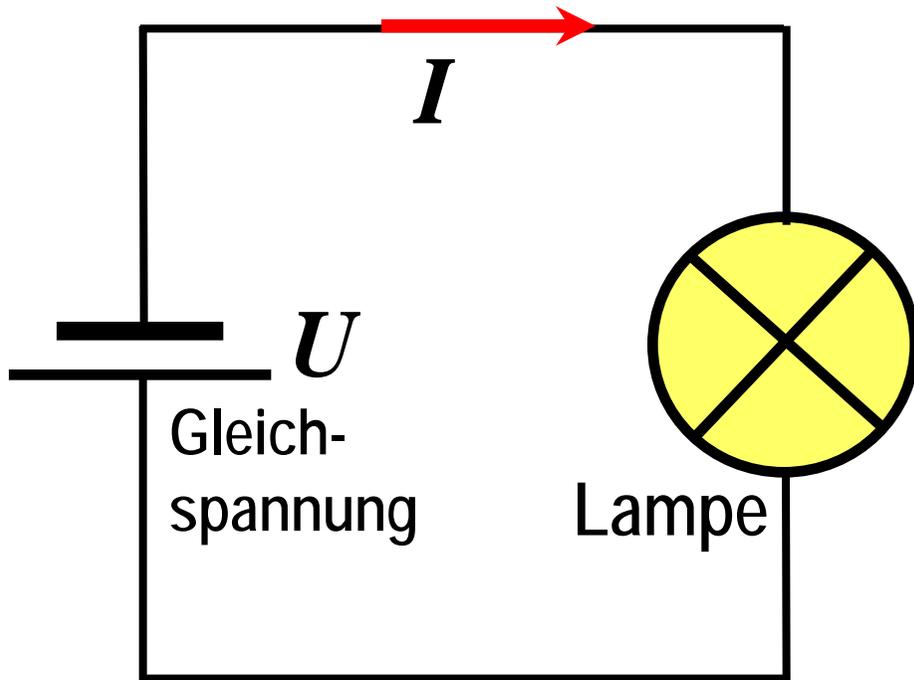
Gleichspannung

Wechselspannung



Netzgeräte

Lampen



„Die Lampen sind gleich hell“ bedeutet genauer, dass sie im *zeitlichen Mittel* gleich hell leuchten.

$$P = UI = \langle P(t) \rangle_{\approx} = \langle U(t)I(t) \rangle_{\approx} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

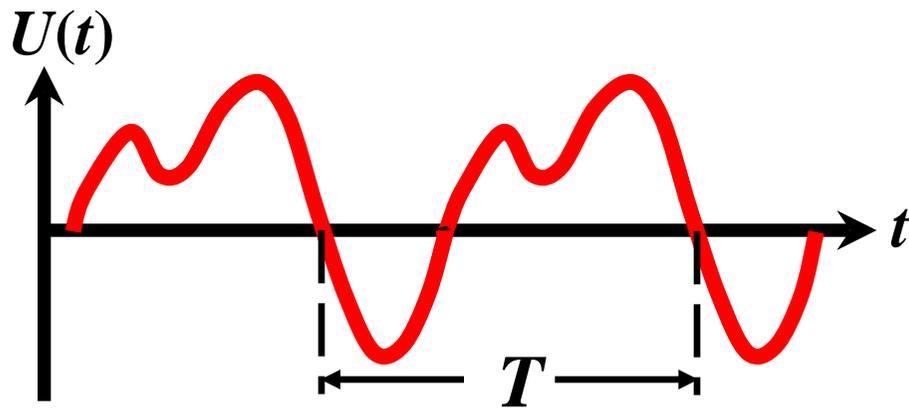
Beispiel:

Das Stromnetz liefert eine effektive Spannung von $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$. Die Spitzenspannung ist dann:

$U_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V} (!)$
Über einen Gleichrichter kann daher ein Kondensator auf über 300 V aufgeladen werden !



Allgemeine, zeitlich periodische Spannungsverläufe können immer auf sinusförmige zurückgeführt werden. Ein möglicher Verlauf von $U(t)$ sieht so aus:



Hierbei sind T die Schwingungsdauer und $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

In Abschnitt 2.8.1 hatten wir bereits gesehen, dass eine periodische Größe $U(t)$ immer durch eine sog. „Fourierreihe“ ausgedrückt werden kann:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

mit Konstanten u_n und φ_n .

Beliebige periodische Vorgänge können daher immer aus einzelnen Sinusschwingungen aufgebaut werden.

Daher werden in den folgenden Abschnitten immer nur Spannungs- und Stromverläufe der Form

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

betrachtet. Zwei Beispiele für Fourier-Zerlegungen folgen jetzt.



Die Effektivwerte von Strom- und Spannung hängen aber von der Form der Wechselspannung ab. Sie waren über den zeitlichen Mittelwert der Leistung $\langle P(t) \rangle$ definiert worden:

$$\begin{aligned}\langle P(t) \rangle_t &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T U(t) I(t) dt = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}\end{aligned}$$

Mit dem Ohm'schen Gesetz folgt:

$$\begin{aligned}\langle P(t) \rangle_t &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U^2(t)}{R} dt = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} \\ \Rightarrow U_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt}\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für I_{eff} :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt}$$

Beispiel:

Effektivwert für eine Dreiecksspannung

$$U(t) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{T/4}, & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ U_0 \left(2 - \frac{t}{T/4} \right), & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}$$

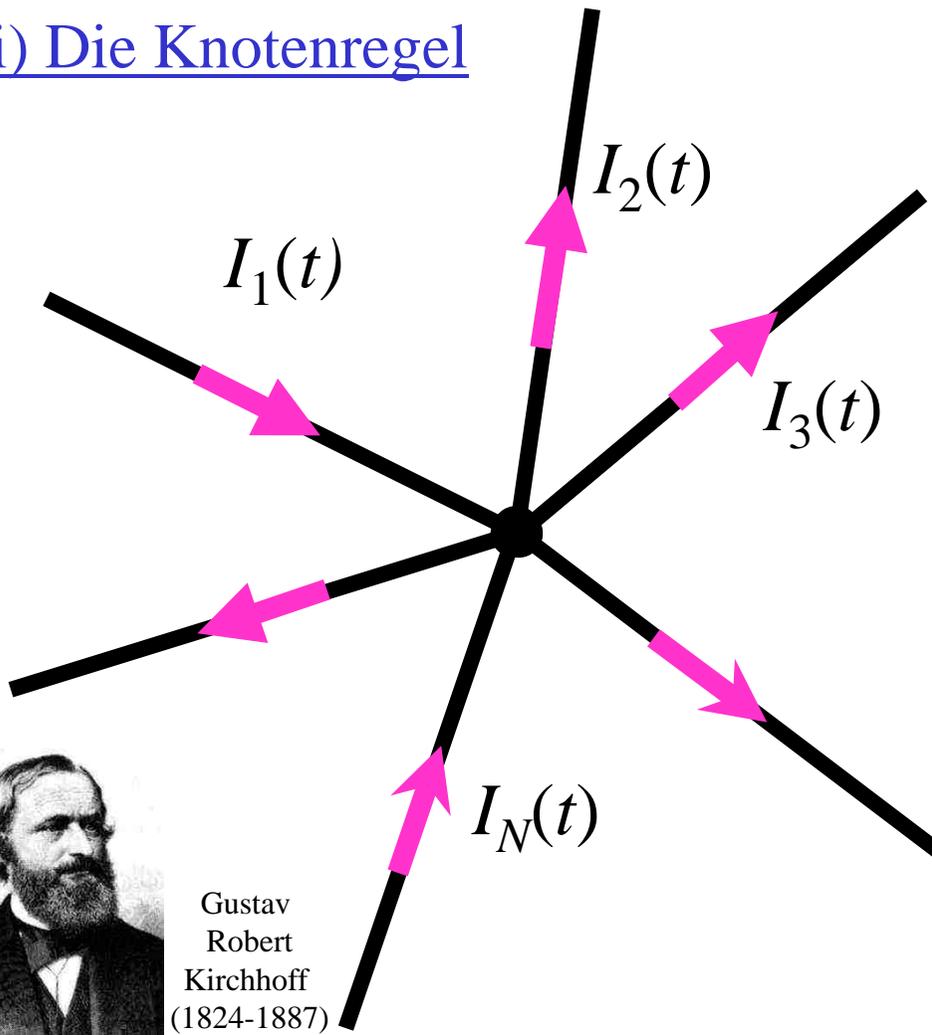
$$\begin{aligned}\Rightarrow U_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/4}^{3T/4} U^2(t) dt} \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$



Kirchhoff'sche Regeln für Wechselspannungen und Wechselströme

In einem früheren Kapitel wurden die beiden *Kirchhoff'schen Regeln* als Grundlagen zur Berechnung von elektrischen Netzwerken eingeführt. Sie gelten auch für Wechselspannungen und Wechselströmen.

(i) Die Knotenregel



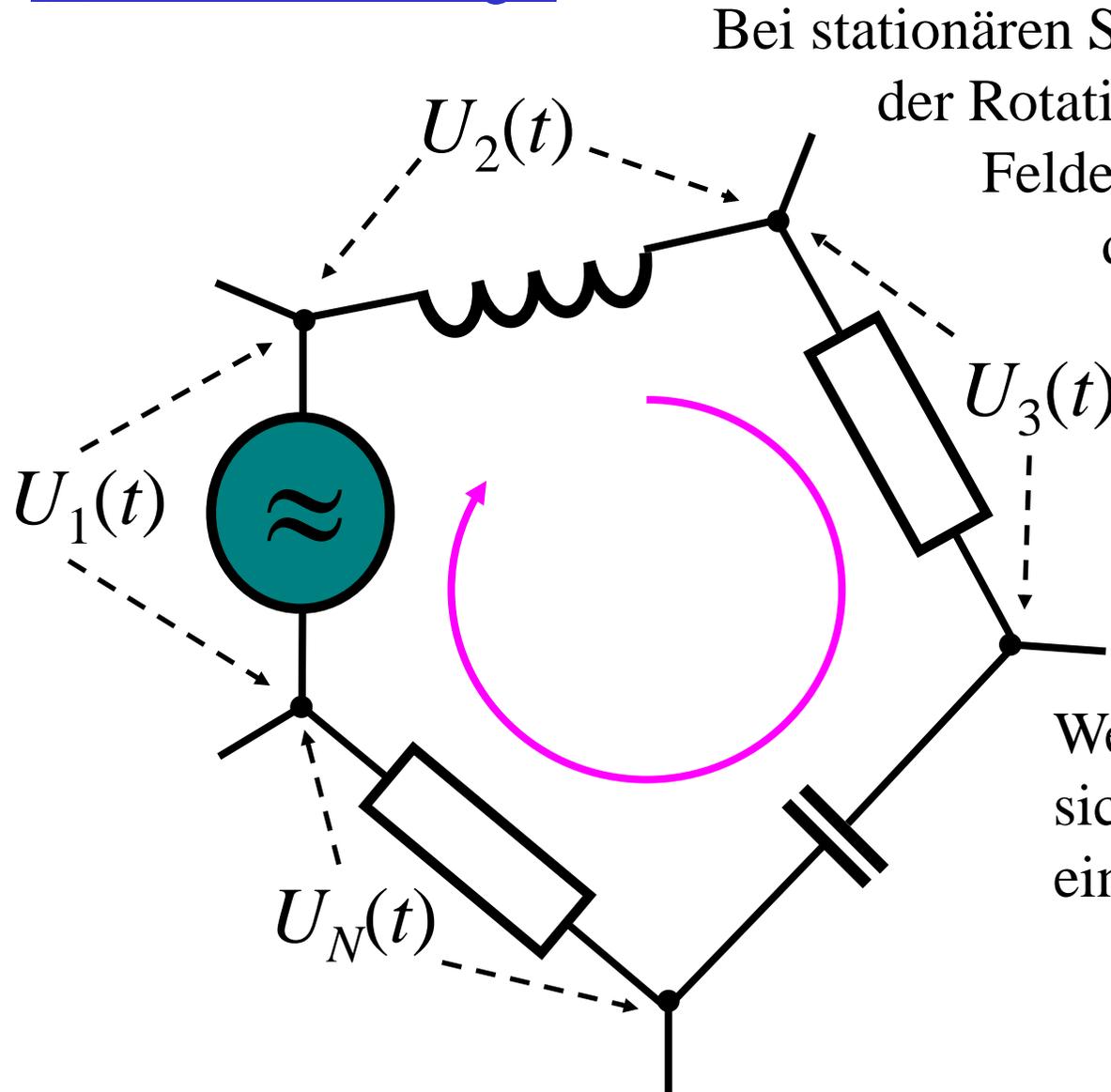
Im Fall stationärer Ströme drückt die Knotenregel das Prinzip der Ladungserhaltung aus. Dieses Prinzip muß aber für alle Zeitpunkte erfüllt sein.

In jedem Knoten eines elektrischen Netzwerkes verschwindet daher zu jedem Zeitpunkt t die Summe aller N Ströme:

$$\sum_{i=1}^N I_i(t) = 0$$



(ii) Die Maschenregel



In der Elektrodynamik war:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_{\text{ind}}$$

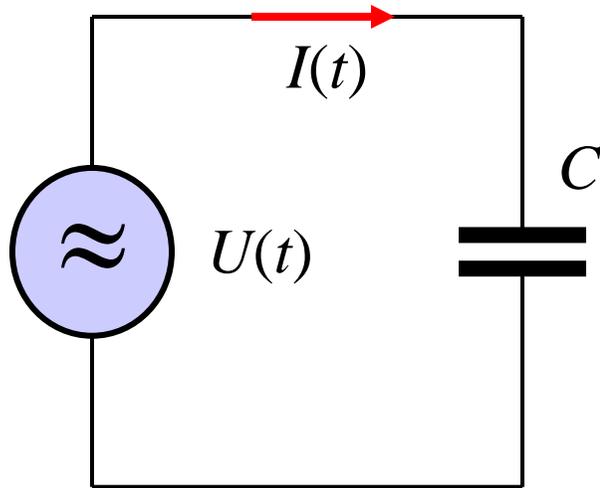
$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} - U_{\text{ind}} = 0$$

Wenn Induktivitäten mit berücksichtigt werden, gilt also auch in einer Masche zu jedem Zeitpunkt:

$$\sum_{i=1}^N U_i(t) = 0$$



Kondensator im Wechselstromkreis



ergibt sich:

$$\begin{aligned} I(t) &= \omega C U_0 \cos(\omega t + \pi/2) \\ &= I_0 \cos(\omega t + \pi/2) \end{aligned}$$

Am Kondensator läuft der Strom der Spannung um $\pi/2 = 90^\circ$ voraus.

Der Zusammenhang zwischen der Spannung und dem Strom ist:

$$Q = CU \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

Da

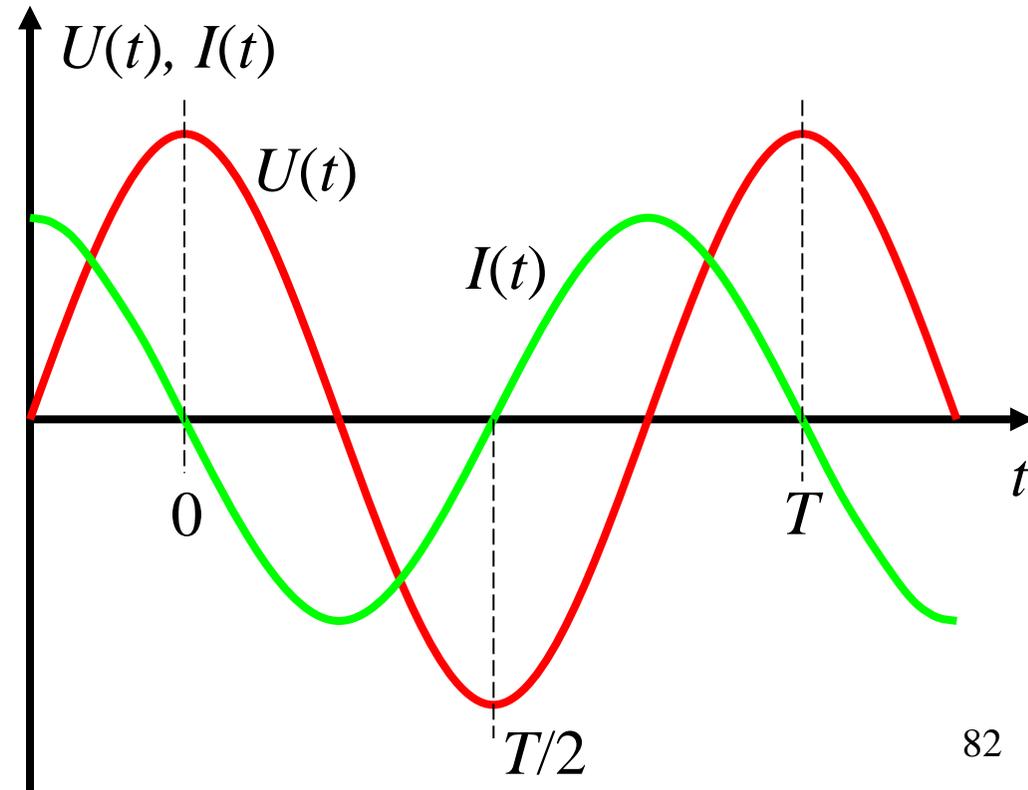
$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

folgt:

$$I(t) = -\omega C U_0 \sin(\omega t)$$

Mit

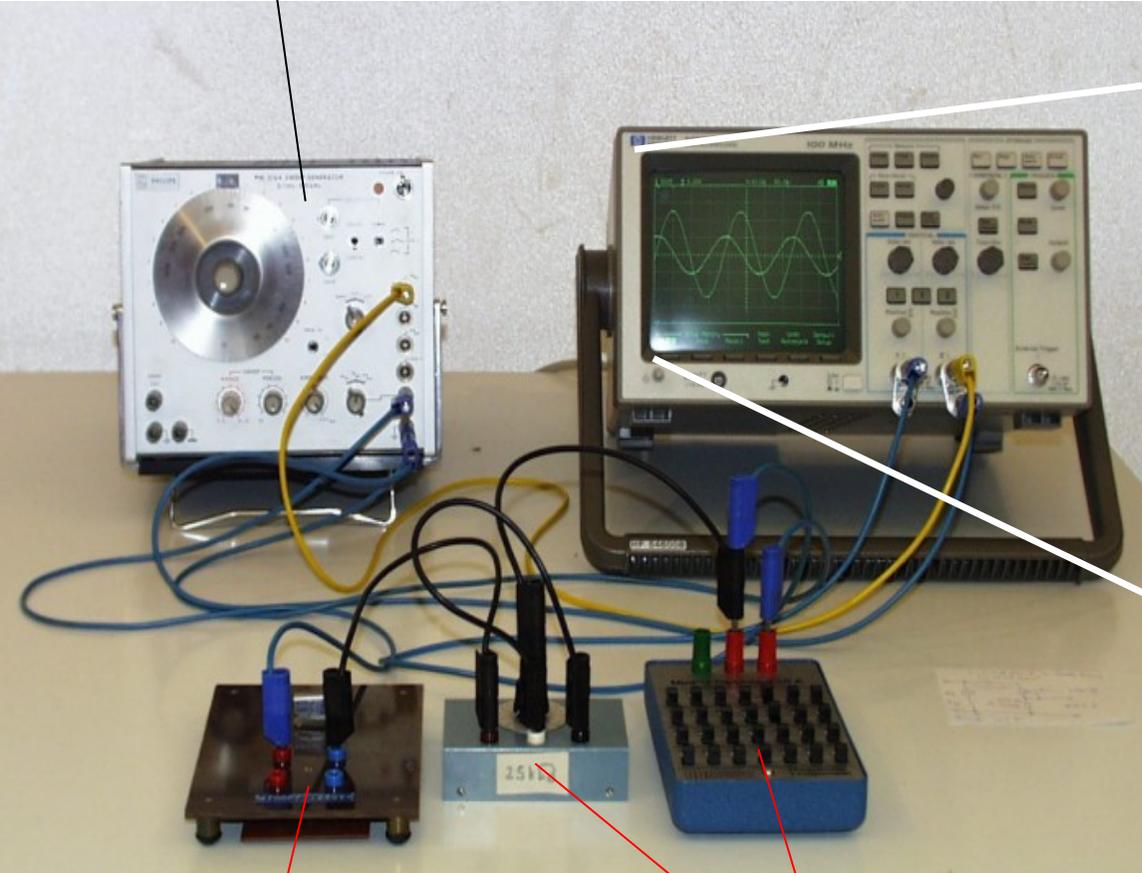
$$-\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$





Versuch 3: RC-Kreis

Sinusgenerator

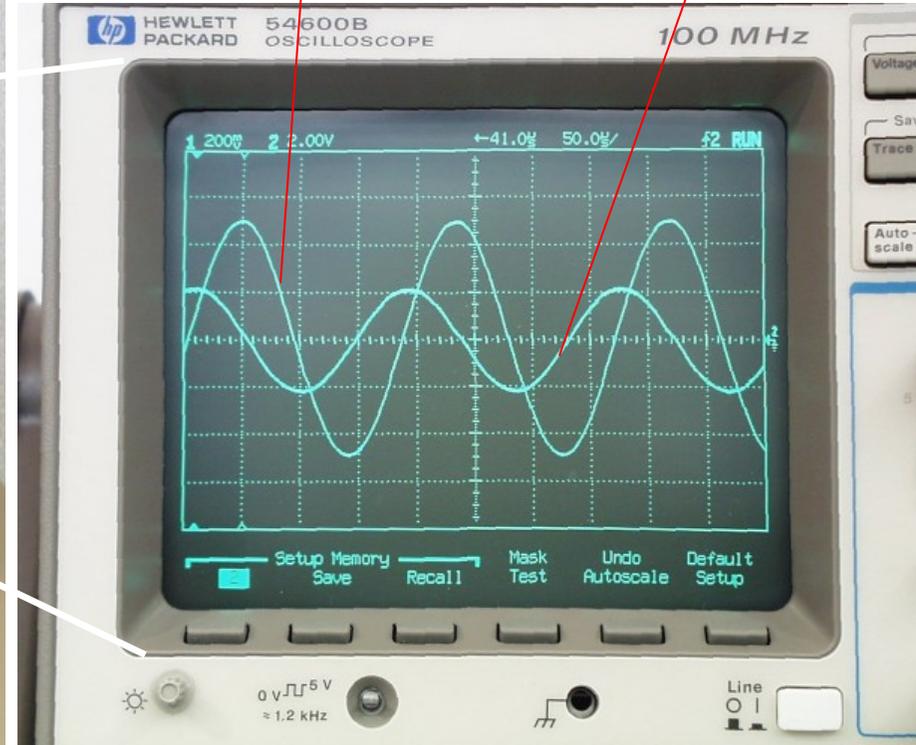


Kondensator

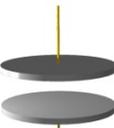
Widerstände

Spannung

Strom



Beim Kondensator läuft der Strom der Spannung voraus, weil sich zunächst Ladungen auf den Platten ansammeln müssen.

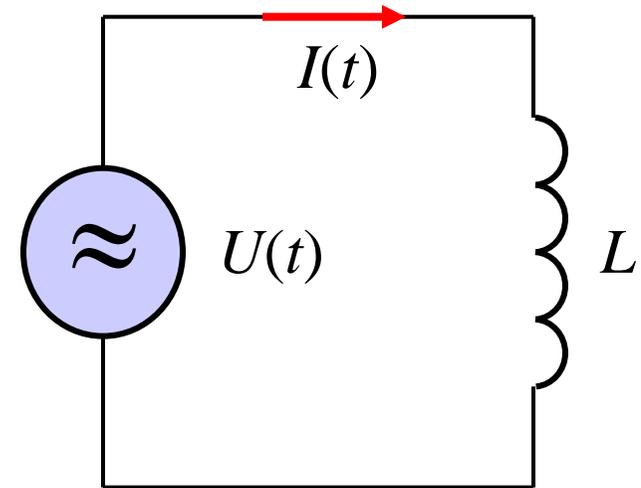


Die mittlere Leistung am Kondensator ist ($\omega = 2\pi/T$):

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle_t &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) I(t) dt \\ &= \frac{\omega C U_0^2}{T} \underbrace{\int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Am Kondensator wird im Mittel also *keine* elektrische Leistung aufgenommen! Ein idealer Kondensator wird im Gegensatz zu einem Ohm'schen Widerstand also nicht erwärmt. Diese zeitabhängige Leistung nennt man daher auch „*Scheinleistung*“ oder „*Blindleistung*“.

Induktivität im Wechselstromkreis



Der Zusammenhang von Strom und Spannung ist nun (Maschenregel):

$$\begin{aligned} U(t) - L \frac{dI(t)}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow U(t) &= L \frac{dI(t)}{dt} \end{aligned}$$



Integration ergibt:

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U(t') dt' = \frac{U_0}{L} \int_0^t \cos(\omega t') dt'$$

$$= \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t)$$

Diesmal ist:

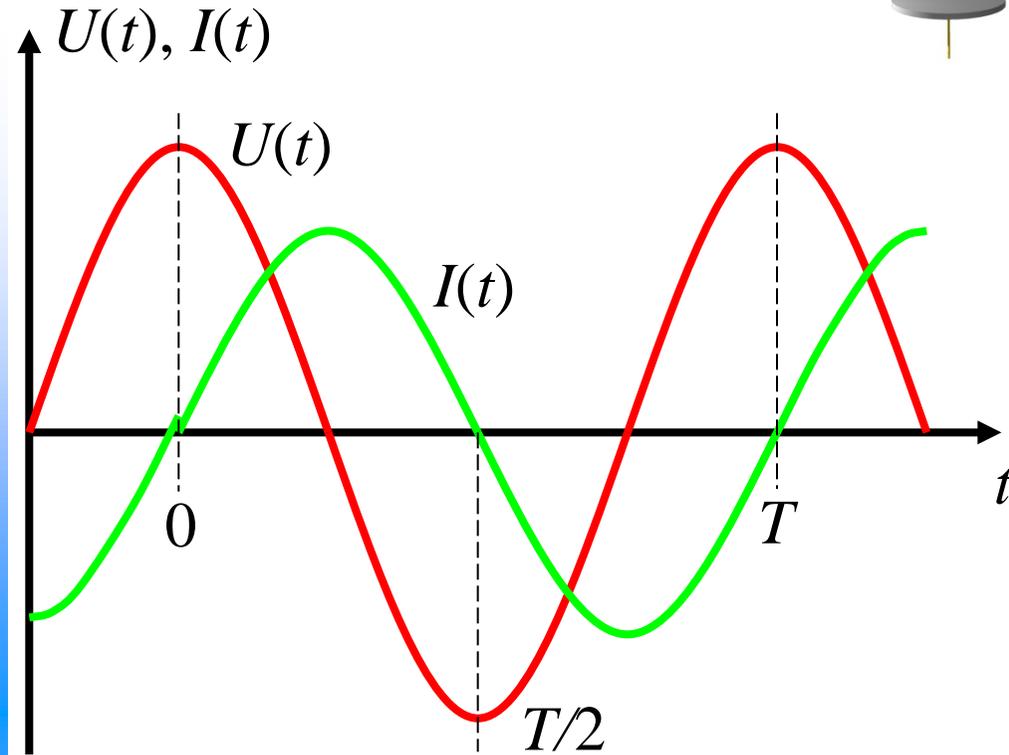
$$\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$$

Damit folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$= I_0 \cos(\omega t - \pi/2)$$

Am der Spule läuft der Strom der Spannung um $\pi/2 = 90^\circ$ nach. Es muß also erst eine Spannung anliegen, damit sich der Strom aufbaut.



Wegen der Phasenverschiebung um $\pi/2$ zwischen Strom und Spannung gilt hier für die mittlere Leistung wieder:

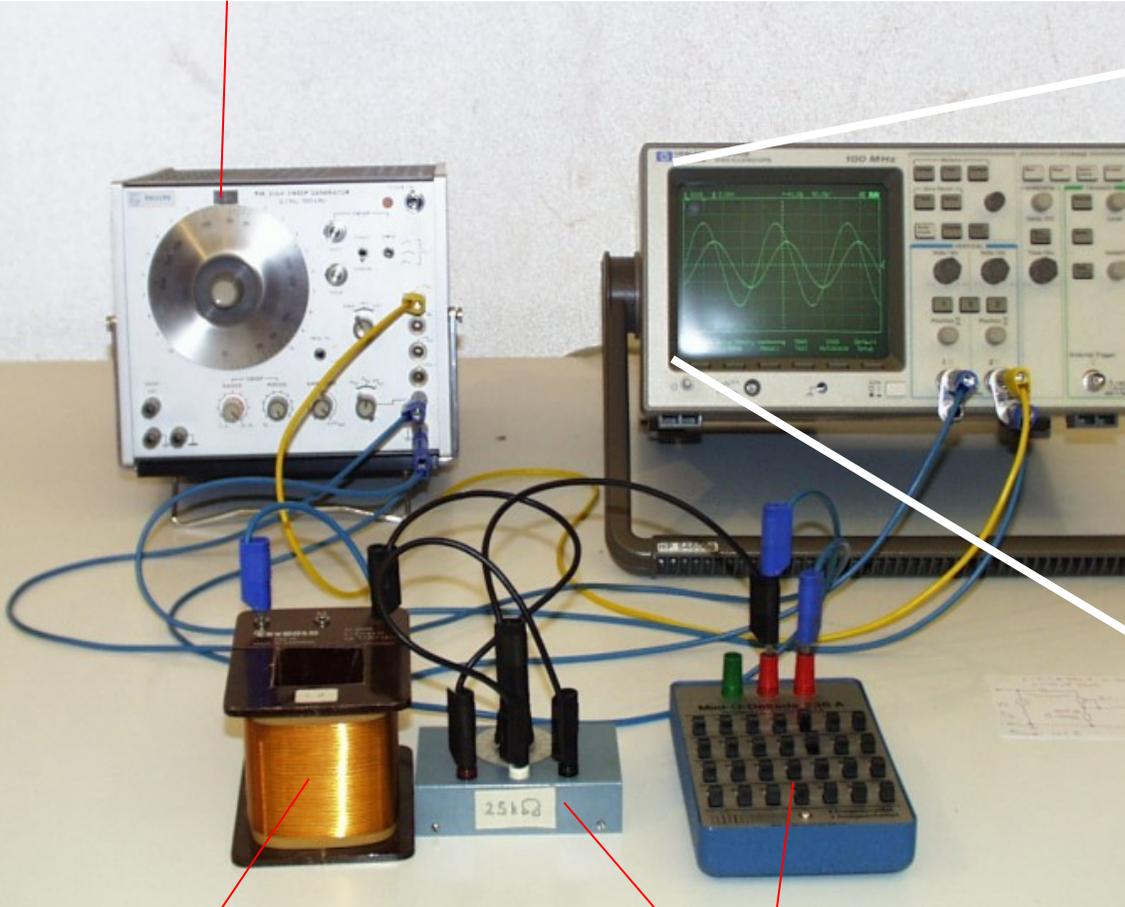
$$\langle P(t) \rangle_t = 0$$

Bei einer idealen Spule wirkt also auch nur die Blindleistung.



Versuch 4: *RL*-Kreis

Sinusgenerator

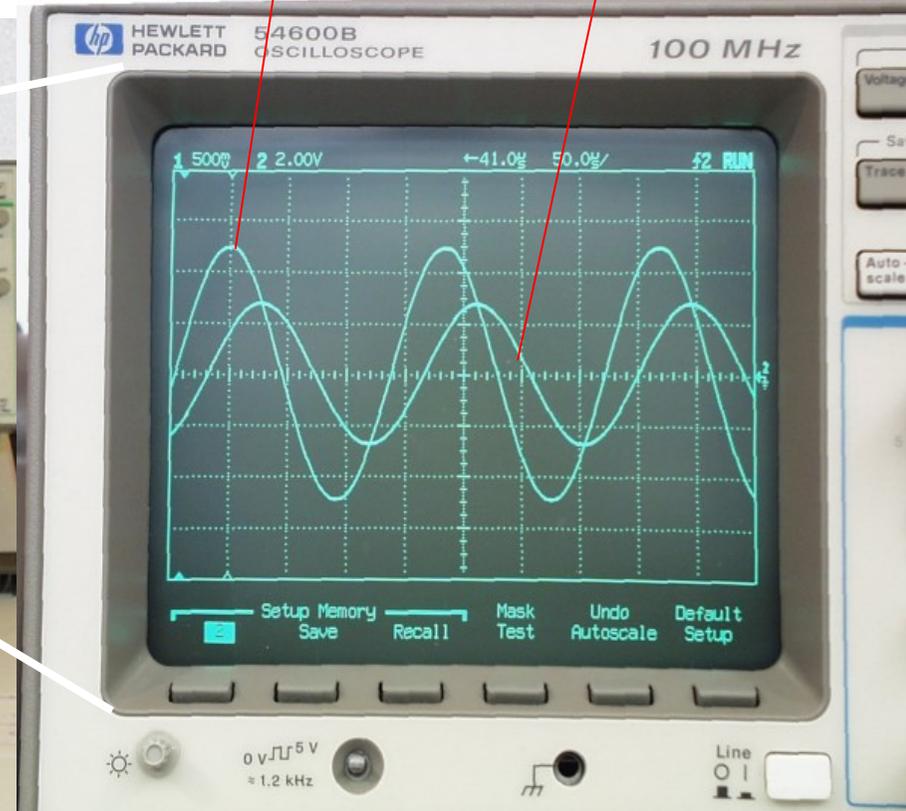


Spule

Widerstände

Spannung

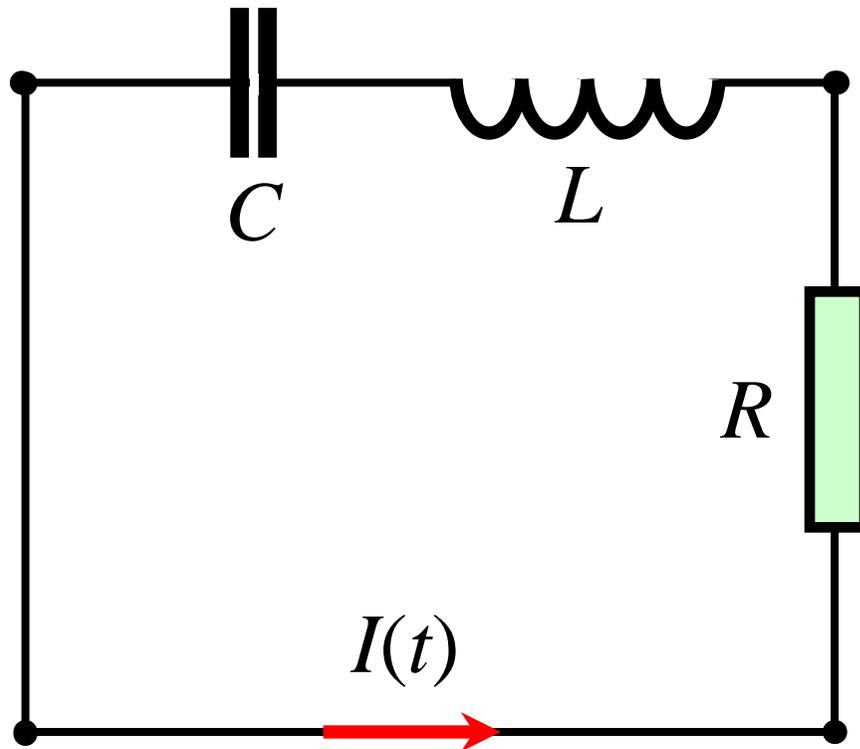
Strom



Bei der Spule läuft der Strom der Spannung nach, weil die Induktionsspannung ihrer Ursache entgegenwirkt.



Der elektrische Schwingkreis



Wir betrachten eine Reihenschaltung aus einer Spule, einem Kondensator und einem Ohm'schen Widerstand. Gesucht ist die Zeitabhängigkeit des Stromflusses $I(t)$ durch diesen „Schwingkreis“.

Aufgrund der Maschenregel gilt:

$$U_C - U_L + U_R = 0$$

Einsetzen der jeweiligen Spannungen ergibt: $\frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = 0$

Differenzieren dieser Gleichung führt mit $I(t) = dQ/dt$ auf die DGL:

$$\frac{I(t)}{C} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad I(0) = I_0, \dot{I}(0) = \dot{I}_0$$



Umformen dieser DGL ergibt:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = 0$$

Mit den Definitionen

$$\frac{R}{L} = 2\gamma \quad \text{und} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

folgt:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0$$

Dies ist dieselbe DGL wie beim gedämpften harmonischen Oszillator. Daher kann die Lösung direkt aus Abschnitt 2.8.5 übertragen werden.

In Abschnitt 2.8.5 waren die Vorfaktoren in der DGL wie folgt definiert:

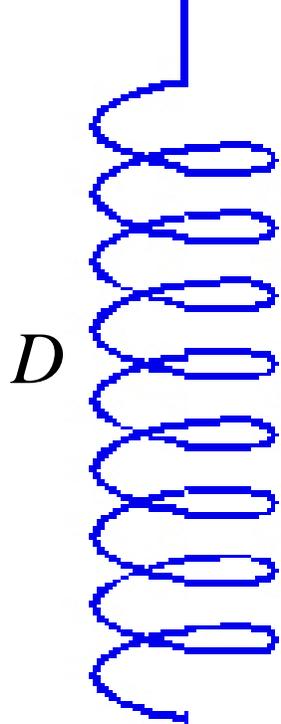
$$\frac{\alpha}{m} = 2\gamma \quad \text{und} \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2$$

Der Widerstand R entspricht also dem Reibungsfaktor α . Ohne den Widerstand, d.h. für $R = 0$, ergibt sich eine ungedämpfte harmonische Schwingung für den fließenden Strom, also:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{I}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Der Vergleich mit dem gedämpften harmonischen Oszillator ergibt:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0$$



Vergleich: gedämpfter harmonischer Oszillator und Schwingkreis mit Ohm'schem Widerstand

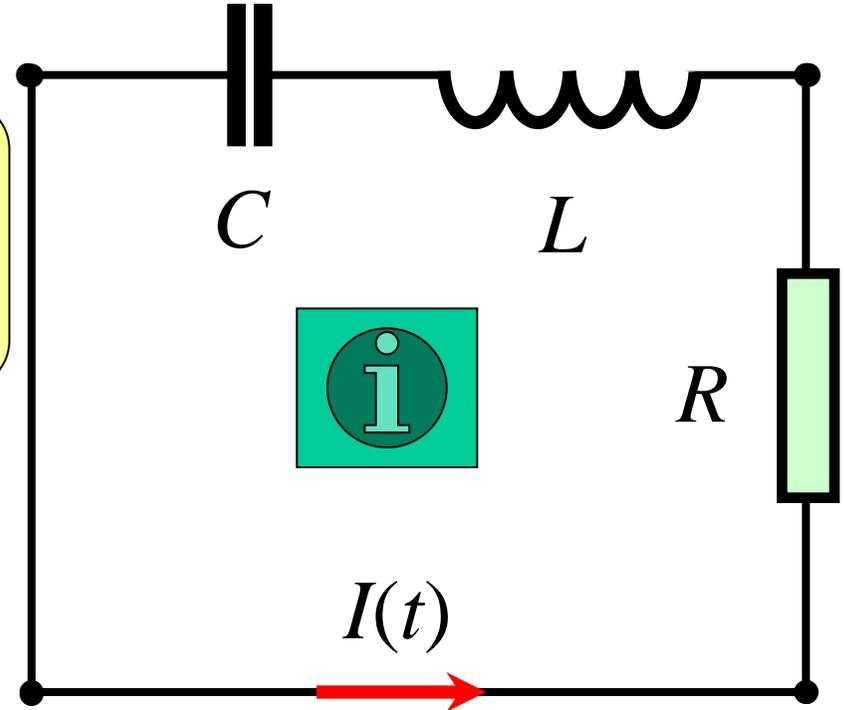
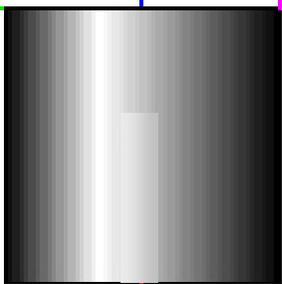
$x(t)$



$-\alpha \dot{x}$



m



$x(t)$	\Leftrightarrow	$I(t)$
m	\Leftrightarrow	L
D^{-1}	\Leftrightarrow	C
α	\Leftrightarrow	R



Das Verhältnis von ω_0 und γ bestimmt daher wieder, welcher spezielle Fall sich als Lösung für $I(t)$ ergibt. Der Vergleich mit Abschnitt 2.8.5 ergibt:

(i) Schwingfall:

In diesem Fall ist $\omega_0 > \gamma$. Dann wird $I(t)$ durch eine gedämpfte Schwingung beschrieben. $\omega_0 > \gamma$ bedeutet für den elektrischen Schwingkreis:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} > \frac{R}{2L} \Rightarrow 2\sqrt{LC} > RC$$

Im Schwingfall muß also die doppelte Periode $2(LC)^{1/2}$ des ungedämpften Kreises größer sein als die Zeitkonstante des RC -Teils.

(ii) Kriechfall:

Dann ist $\omega_0 < \gamma$. Nun ist $I(t)$ eine abfallende Exponentialfunktion. $\omega_0 < \gamma$ bedeutet:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} < \frac{R}{2L} \Rightarrow 2\sqrt{LC} < RC$$

(iii) Aperiodischer Grenzfall:

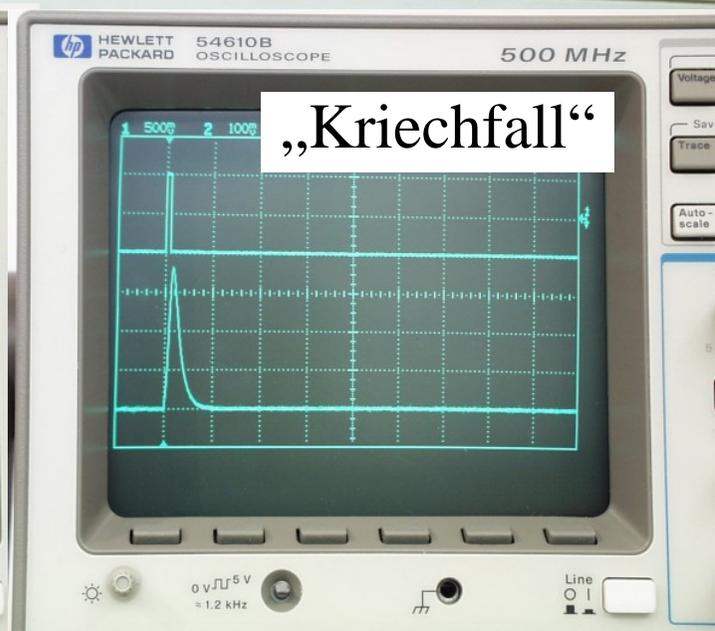
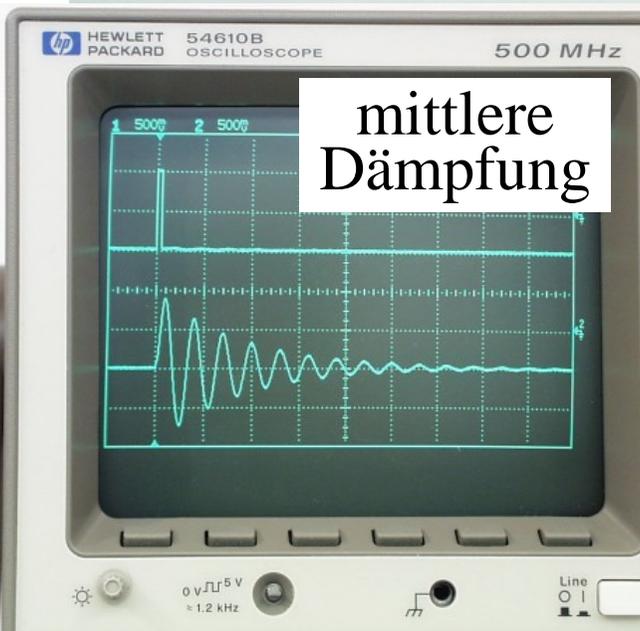
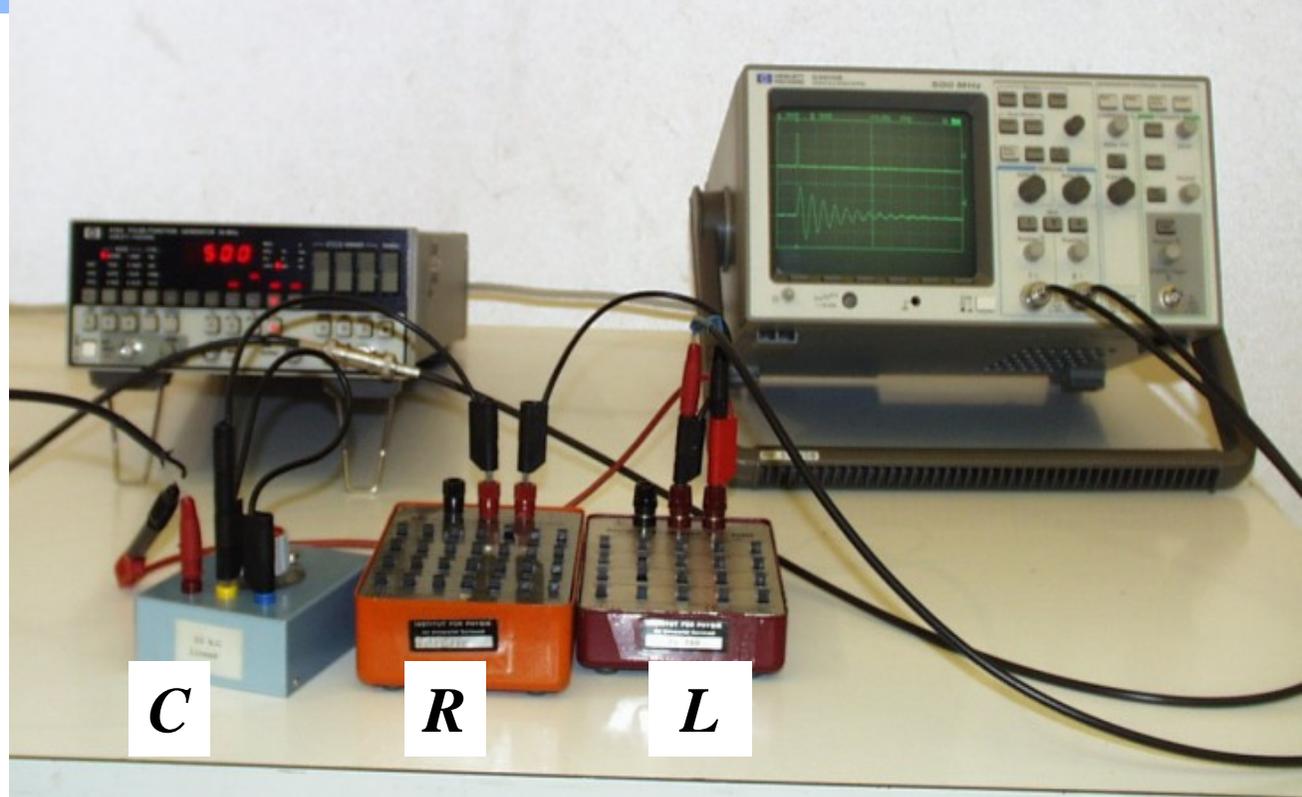
Es ist $\omega_0 = \gamma$. Dann ist $I(t)$ ebenfalls eine abfallende Exponentialfunktion. $\omega_0 = \gamma$ bedeutet jetzt für die Parameter des Schwingkreises:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L} \Rightarrow 2\sqrt{LC} = RC$$

Versuch 5: LCR-Kreis

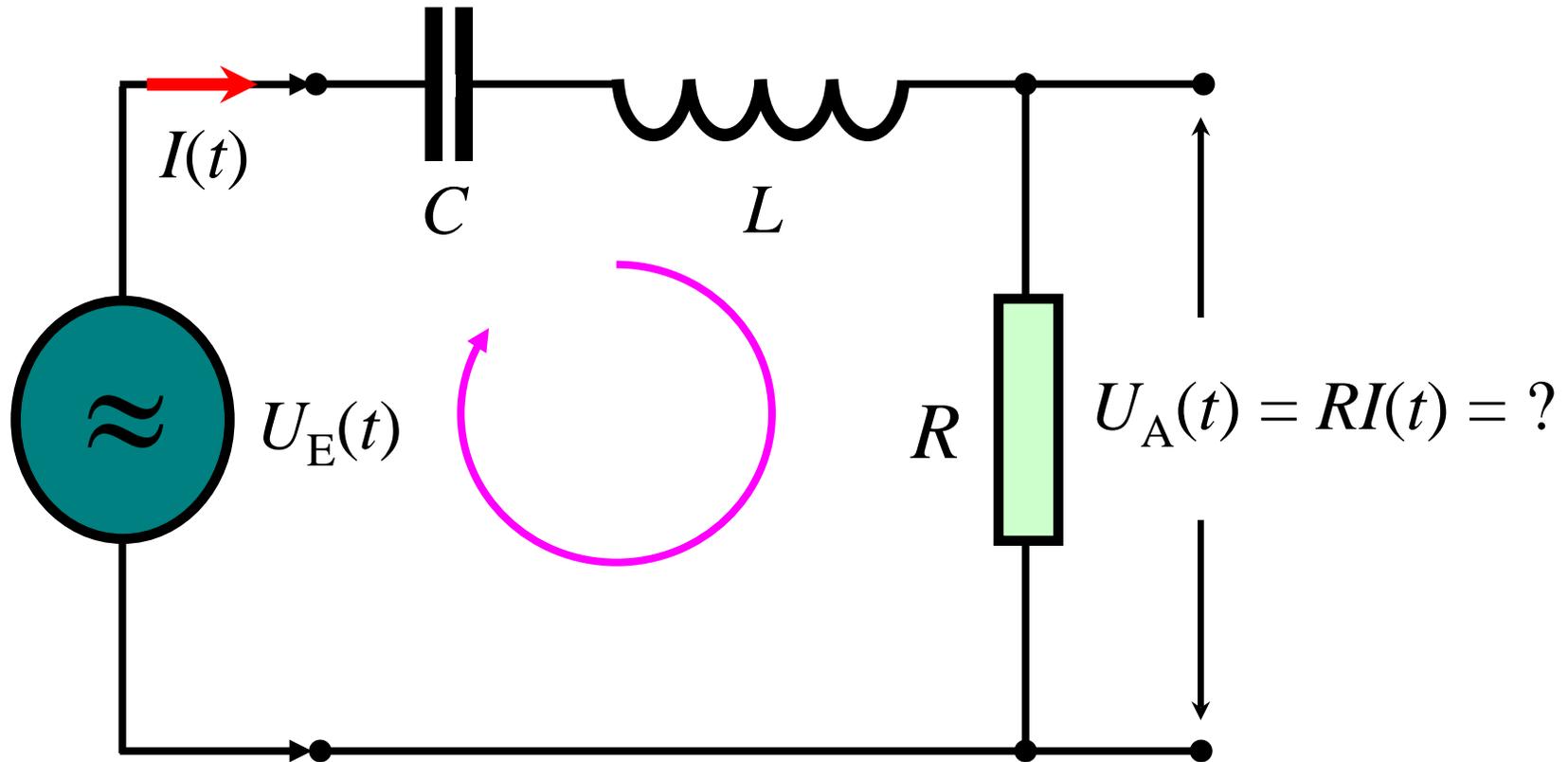
Der elektrische Schwingkreis für verschiedene Kombinationen der Werte für den Widerstand R , die Induktivität L der Spule und der Kapazität C des Kondensators.

Anregungs-impuls





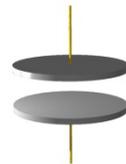
Der Schwingkreis kann auch von Außen mit einer Wechselspannung angeregt werden.



Die Maschenregel ergibt jetzt: $U_C - U_L + U_R = U_E$

Einsetzen der jeweiligen Spannungen liefert:

$$\frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = U_E(t)$$



Differenzieren dieser Gleichung führt wieder mit $I(t) = dQ/dt$ auf die DGL:

$$\frac{I(t)}{C} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} = \frac{dU_E(t)}{dt}$$

Mit den Definitionen $\frac{R}{L} = 2\gamma$ und $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ folgt wie vorher:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{1}{L} \frac{dU_E(t)}{dt} = f(t)$$

Das ist eine lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $I(t)$. Sie kann für eine periodische Anregung $U_E(t)$ und damit auch für eine periodische Funktion $f(t)$ wie in Abschnitt 2.8.7 ausführlich beschrieben gelöst werden. Die DGL ist analog zu der DGL des gedämpften harmonischen Oszillators mit äußerer Anregung.

Dies wird jetzt nicht weiter diskutiert, weil es später in Abschnitt 4.6.8 über sog. „Vierpole“ noch ausführlicher behandelt wird.



Komplexe Schreibweise

Es wird jetzt ein Formalismus vorgestellt, mit dem beliebige R,C,L-Netzwerke berechnet werden können.

Dazu wird der *Wechselstromwiderstand*

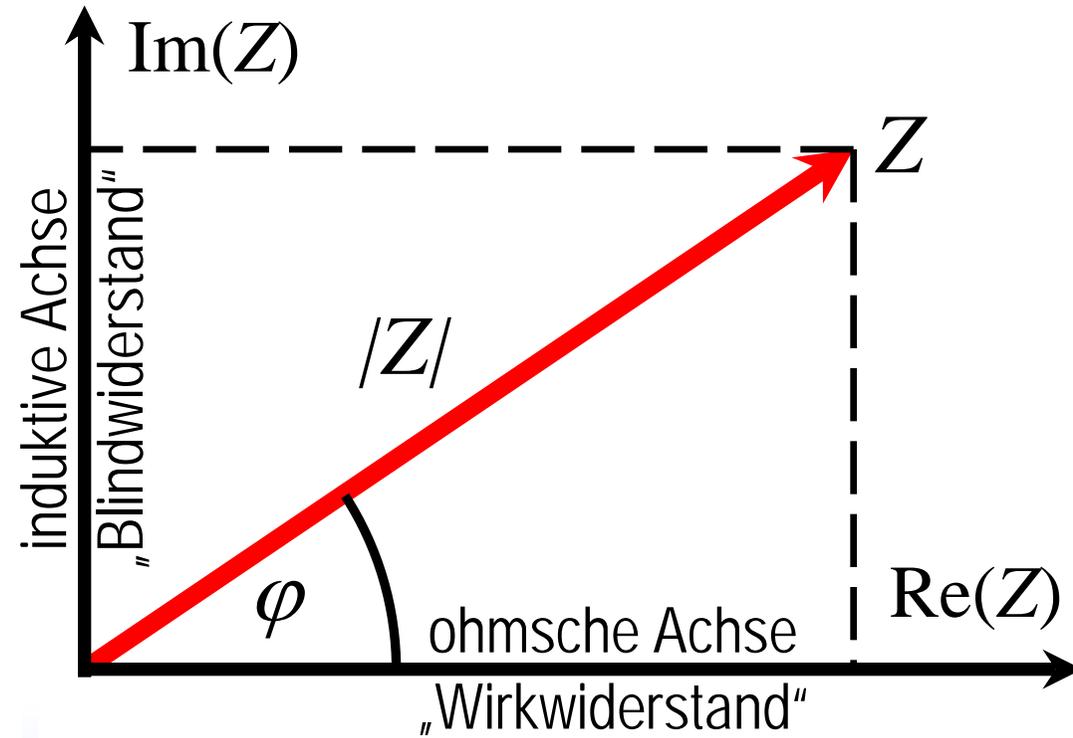
$$Z = |Z| e^{i\varphi}$$

definiert, der eine komplexe Zahl mit dem Betrag $|Z|$ und der Phase φ ist. Der Wechselstromwiderstand eines Stromkreises wird auch als seine „*Impedanz*“ bezeichnet.

Für eine Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

wird jetzt die komplexe Schreibweise



$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

eingeführt. Dem Realteil von $U(t)$ entspricht jetzt die ursprüngliche Wechselspannung.



Auch für den Strom schreibt man

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

wobei die Amplitude I_0 eine *komplexe Zahl* sein kann. Wir berechnen jetzt das Verhältnis der Amplituden $Z = U_0/I_0$ für einen Ohm'schen Widerstand, eine Kapazität und eine Induktivität. Dieses Verhältnis ist die Impedanz.

(i) Ohm'scher Widerstand:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = R I_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow U_0 = R I_0 \Rightarrow Z = \frac{U_0}{I_0} = R$$

Ein Ohm'scher Widerstand hat also eine reelle Impedanz, d.h. $|Z| = R$ und $\varphi = 0$.

(ii) Kapazität:

Am Kondensator gilt:

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} = C \frac{dU(t)}{dt}$$

$$= C \frac{d}{dt} (U_0 e^{i\omega t})$$

$$= C i \omega U_0 e^{i\omega t}$$

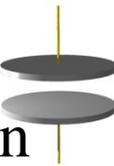
Dann folgt für die Impedanz:

$$\Rightarrow Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{i\omega C} = -i \frac{1}{\omega C}$$

Diese Impedanz ist rein imaginär, mit:

$$|Z| = \frac{1}{\omega C} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z| = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |Z| = \infty$$



(iii) Induktivität:

An einer Spule gilt:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = L \frac{dI(t)}{dt}$$

$$= L \frac{d}{dt} (I_0 e^{i\omega t})$$

$$= Li\omega I_0 e^{i\omega t}$$

Dann folgt für die Impedanz:

$$\Rightarrow Z = \frac{U_0}{I_0} = i\omega L$$

Diese Impedanz ist wieder rein imaginär, mit:

$$|Z| = \omega L \quad \varphi = +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z| = \infty \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |Z| = 0$$

Mit der Impedanz und dem Ohm'schen Gesetz kann rückwärts wieder der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung berechnet werden.

Beispiel:

Strom und Spannung am Kondensator

$$\text{Es war: } Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{i(-\pi/2)}$$

Mit dem Ohm'schen Gesetz folgt:

$$U(t) = \text{Re}(U_0 e^{i\omega t}) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$Z_C = \frac{U_0}{I_0} \Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{Z_C} = U_0 \omega C e^{i\pi/2}$$

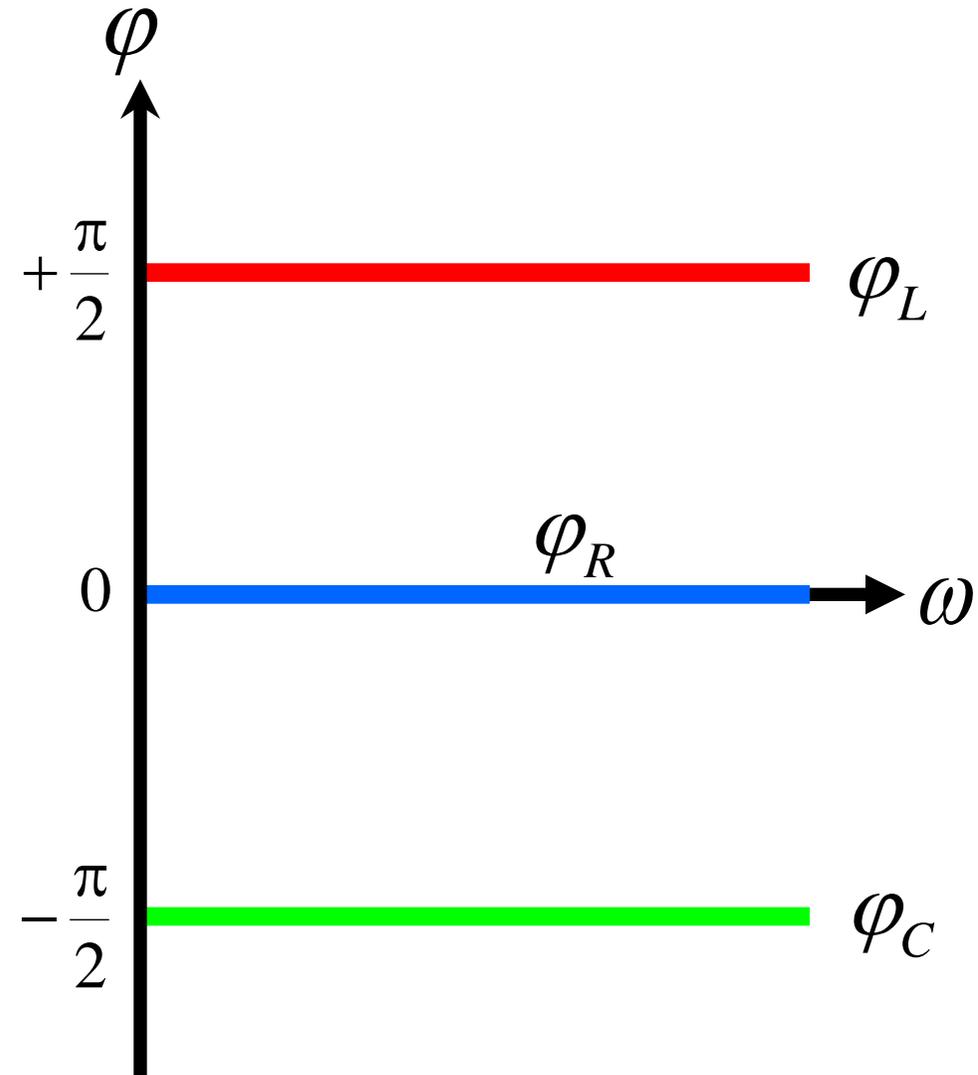
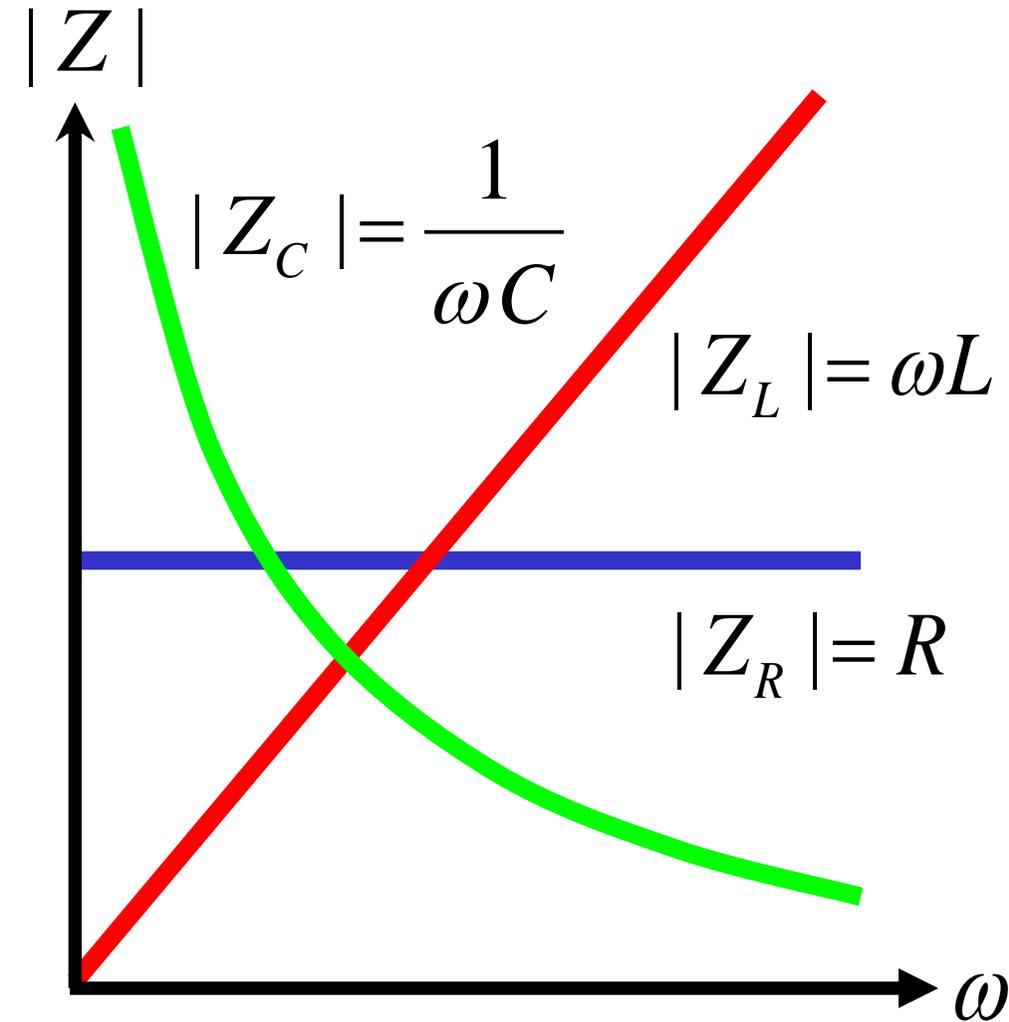
$$I(t) = \text{Re}(I_0 e^{i\omega t}) = \text{Re}(U_0 \omega C e^{i\pi/2} e^{i\omega t})$$

$$= \text{Re}(U_0 \omega C e^{i(\omega t + \pi/2)}) = U_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2)$$

\Rightarrow Strom eilt Spannung um $\pi/2$ voraus.



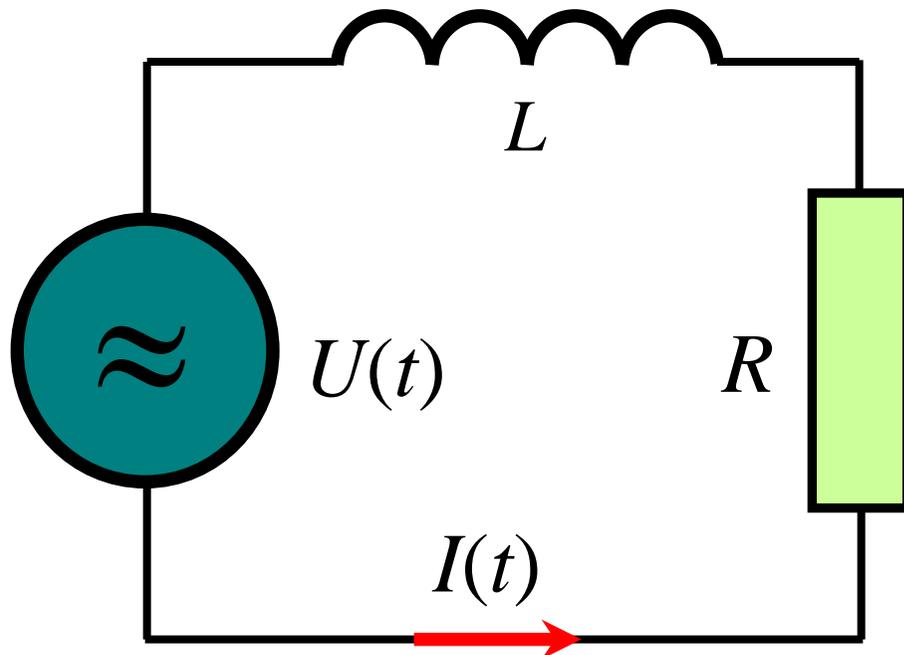
Zusammenfassung der Werte für die Impedanzen eines Ohm'schen Widerstandes, einer Induktivität und einer Kapazität.





Dieses Vorgehen läßt sich jetzt auf beliebige RCL -Kreise übertragen. Dies soll anhand von zwei Beispielen verdeutlicht werden.

Beispiel 1: Serienschaltung aus einem Ohm'schen Widerstand und einer Induktivität:



Die Gesamtimpedanz Z_{RL} ergibt sich durch Addition der Einzelimpedanzen wie bei der Serienschaltung von Ohm'schen Widerständen.

Also folgt:

$$Z_{RL} = Z_R + Z_L = R + i\omega L$$

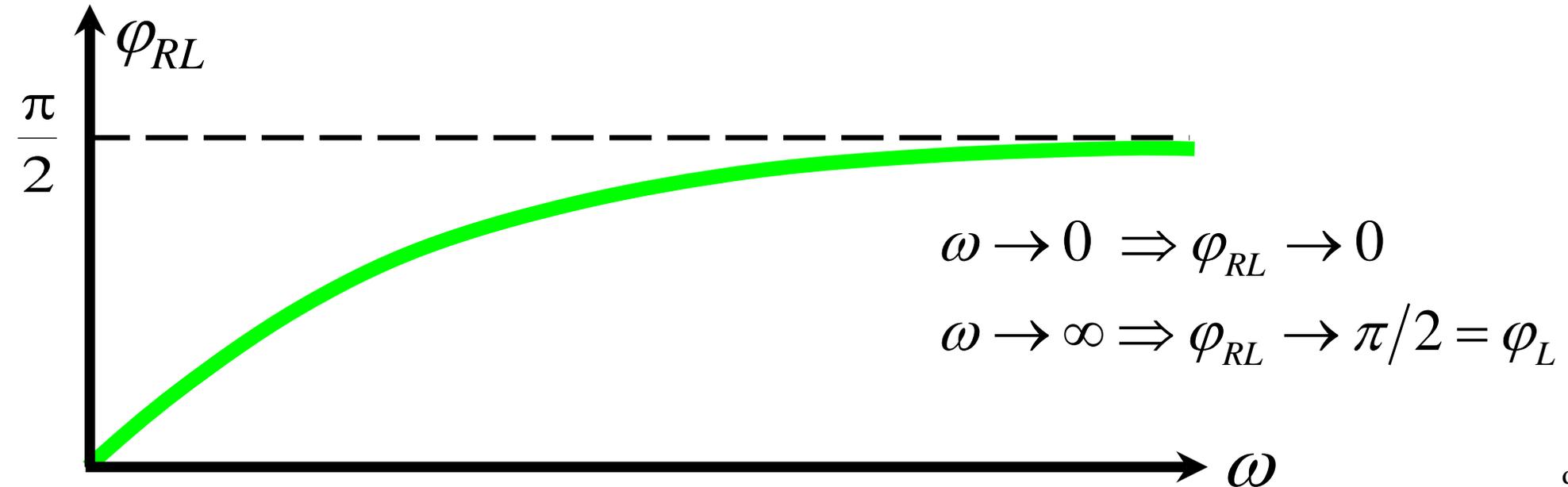
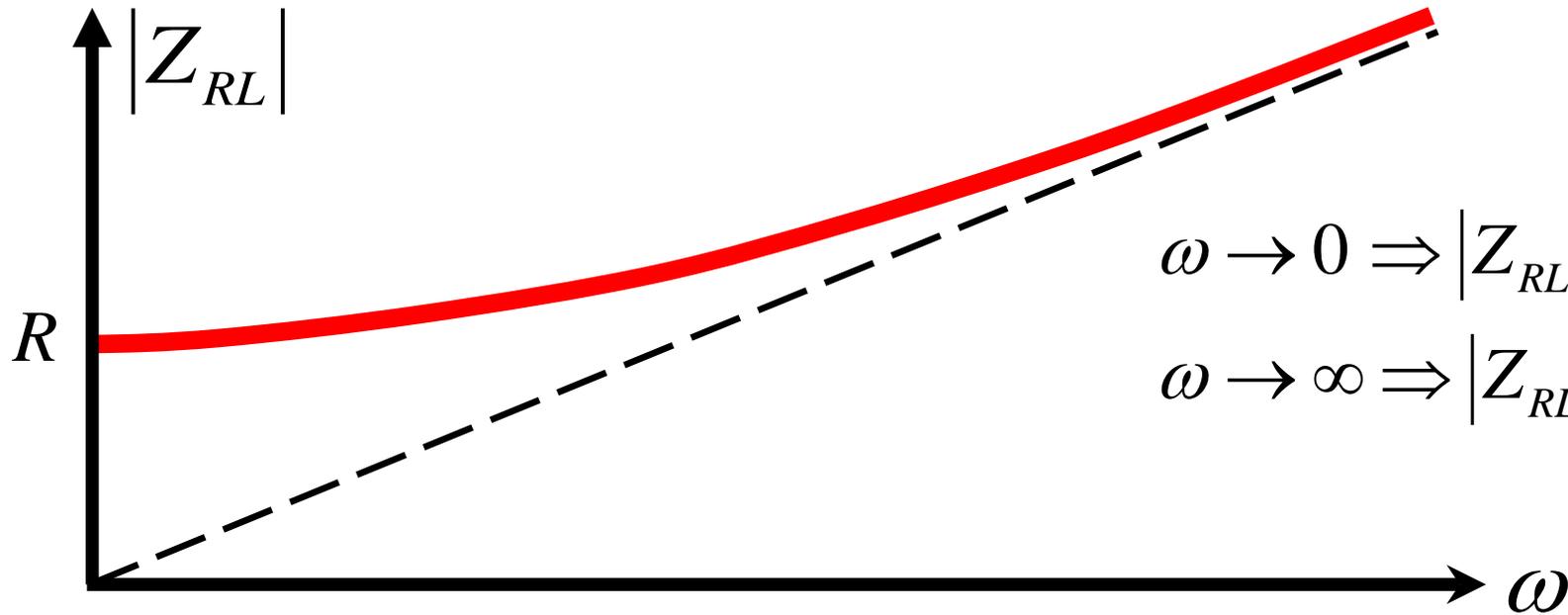
$$|Z_{RL}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\varphi_{RL} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(Z_{RL})}{\text{Re}(Z_{RL})}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist dann:

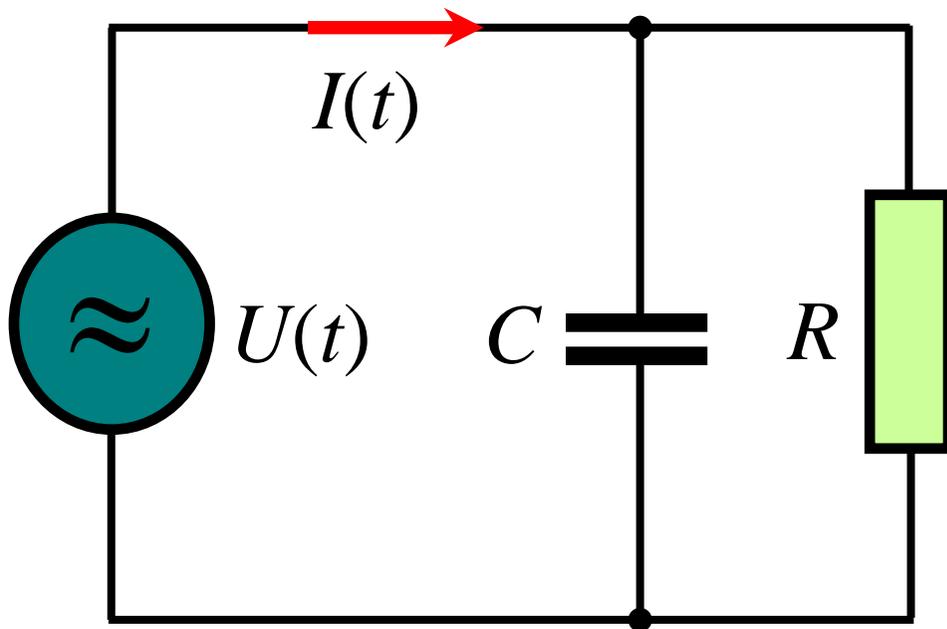
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow U(t) = |Z_{RL}| I_0 \cos(\omega t + \varphi_{RL})$$

Frequenzgang eines RL -Kreises



Beispiel 2: Parallelschaltung aus einem Ohm'schen Widerstand und einer Kapazität:



$$\frac{1}{Z_{RC}} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/i\omega C} = \frac{1}{R} + i\omega C$$

$$Z_{RC} = \frac{1}{1/R + i\omega C} = \frac{R}{1 + i\omega RC}$$

$$= \frac{R(1 - i\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2}$$

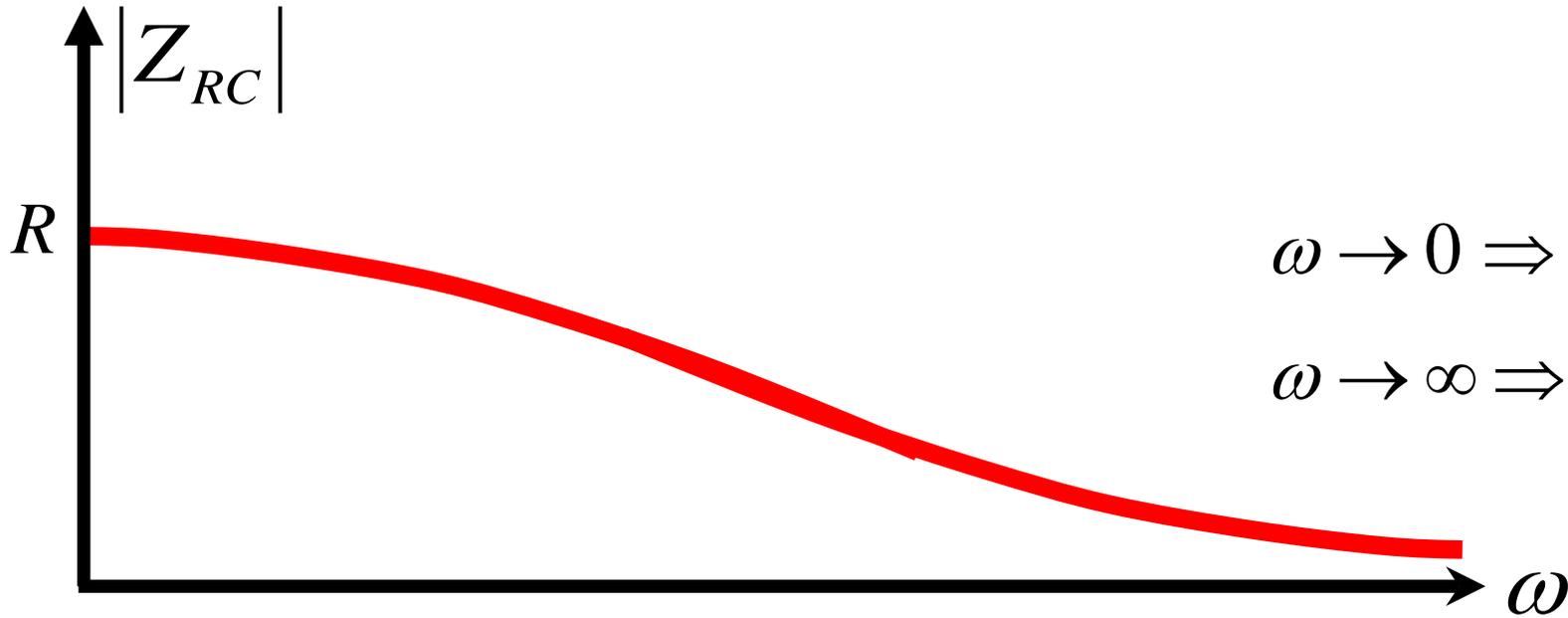
$$|Z_{RC}| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\tan(\varphi_{RC}) = \frac{-\omega R^2 C}{R} = -\omega RC$$

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist dann:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow U(t) = |Z_{RC}| I_0 \cos(\omega t + \varphi_{RC})$$

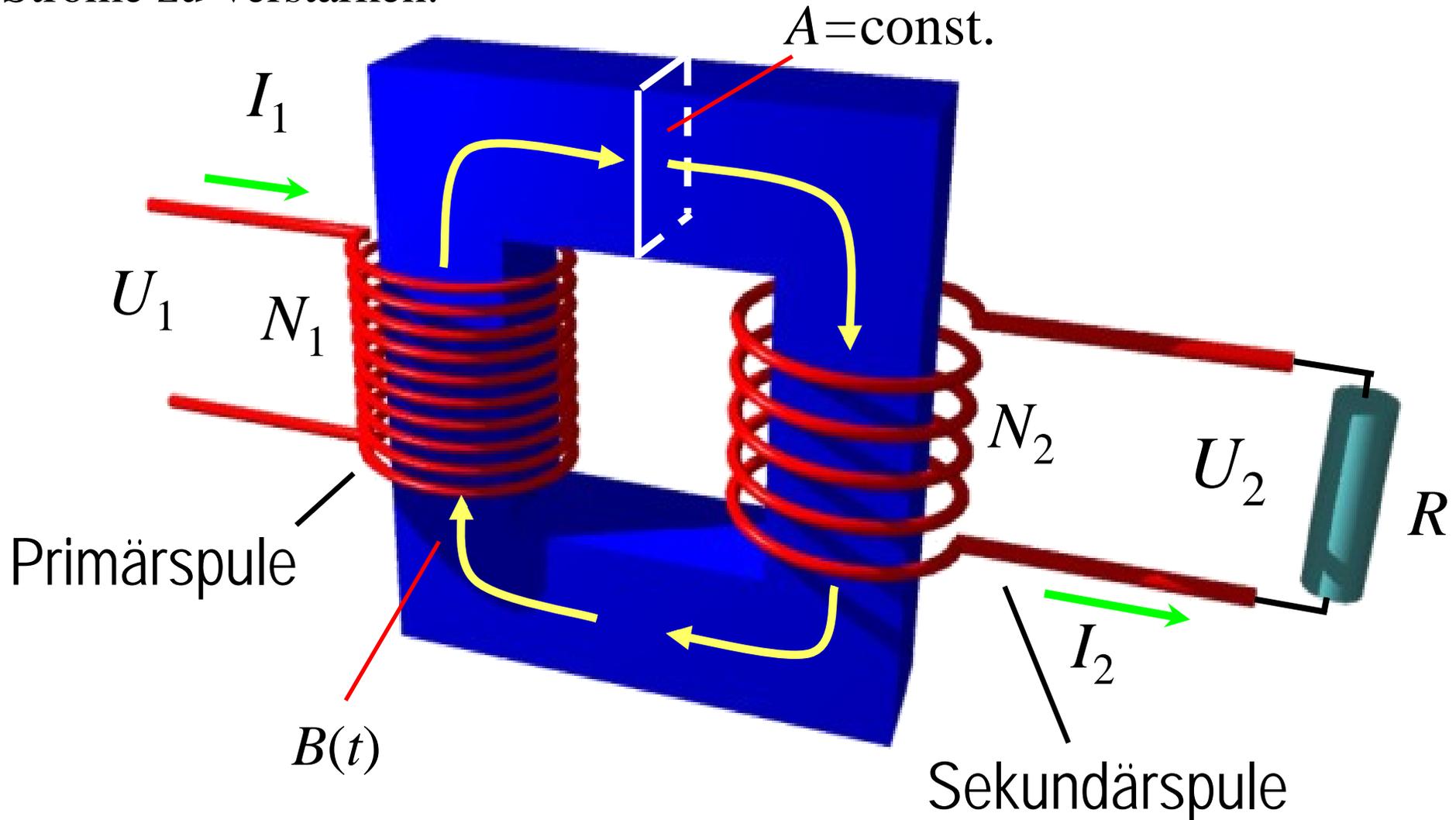
Frequenzgang eines RC -Kreises

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_{RC} \rightarrow 0$$
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_{RC} \rightarrow -\pi/2$$



Der Transformator

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen mit den Windungszahlen N_1 und N_2 , die auf ein Eisenjoch gewickelt sind. Er dient dazu, Spannungen und Ströme zu Verstärken.

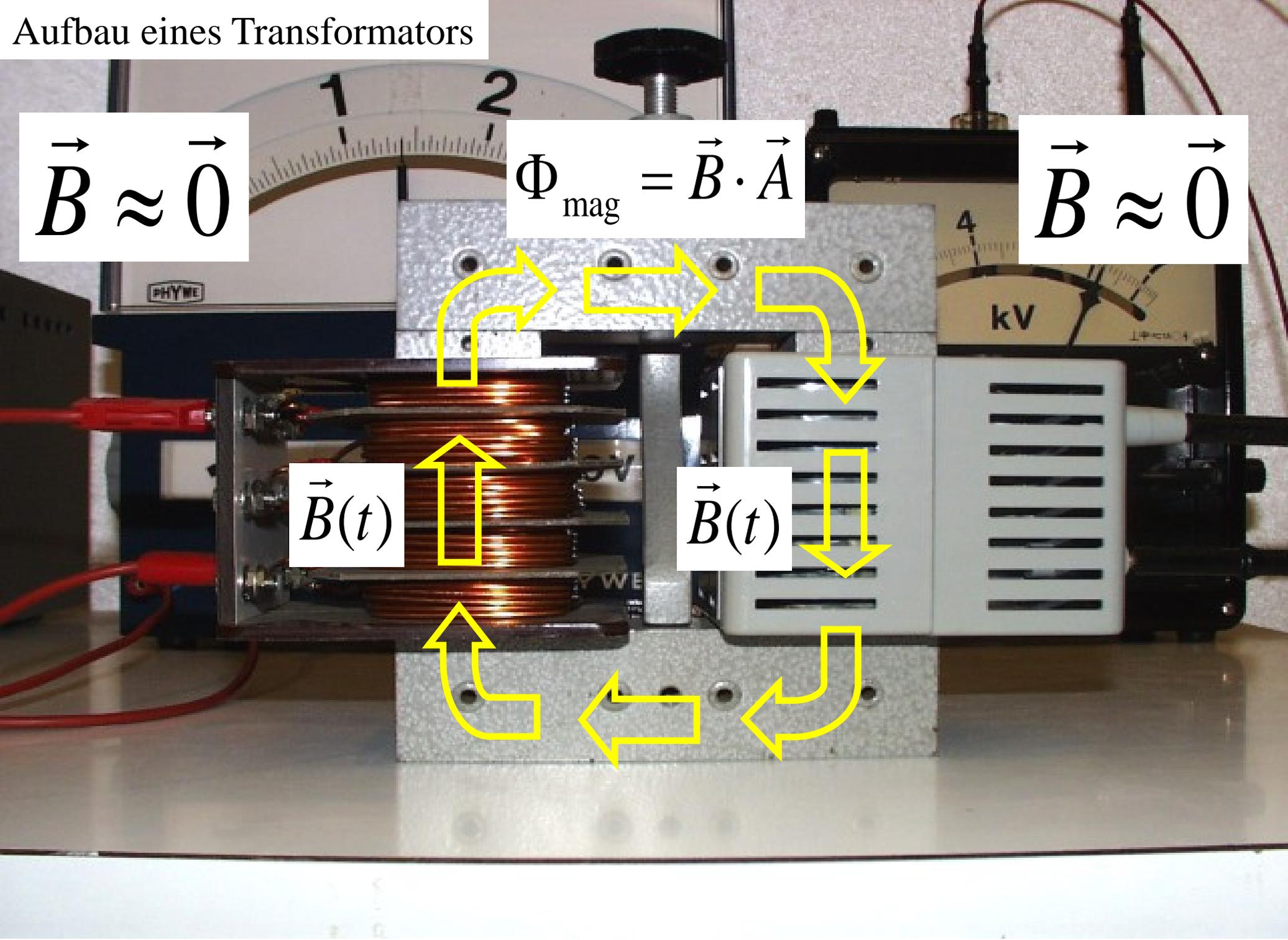


Aufbau eines Transformators

$$\vec{B} \approx \vec{0}$$

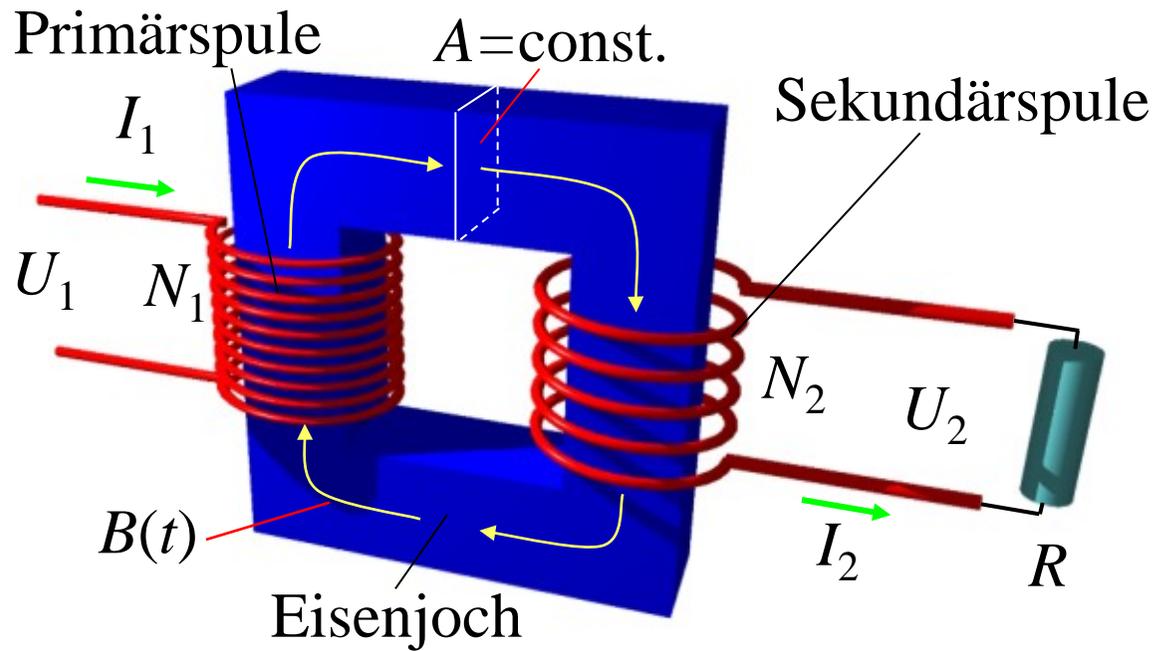
$$\Phi_{\text{mag}} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{B} \approx \vec{0}$$



$$\vec{B}(t)$$

$$\vec{B}(t)$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_r \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

2. Das Eisenjoch

Magnetische Feldlinien bevorzugen Bereiche, in denen μ_r sehr groß ist, d.h. Bereiche in ferromagnetischen Materialien (Fe, Co, Ni). Der Grund dafür ist die im Feld gespeicherte Energie (Abschnitt 4.7.6).

3. Die Sekundärspule

Das zeitlich veränderliche Magnetfeld im Eisenjoch induziert in der Sekundärspule die Spannung $U_2(t)$ nach der 3. Maxwell'schen Gleichung:

Die Funktionsweise des Transformators kann qualitativ durch die folgenden drei Prozesse beschrieben werden:

1. Die Primärspule

Wird eine zeitlich variable Spannung $U_1(t)$ an die Primärspule gelegt, fließt ein Strom $I_1(t)$. Dieser erzeugt das Magnetfeld $B(t)$ nach dem Ampère'schen-Gesetz (4. Maxwell'sche Gleichung):



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow U_2(t)$$

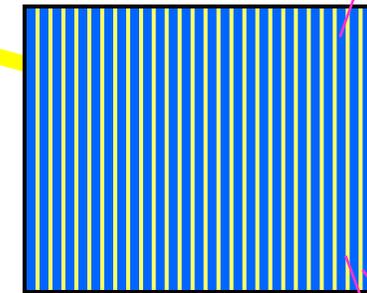
Bei der folgenden quantitativen Berechnung wird der „*ideale Transformator*“ angenommen, d.h.:

- (i) Es gibt keine Streuverluste des magnetischen Flusses. Das Magnetfeld $B(t)$ ist im Eisenjoch überall gleich groß und im Außenraum vernachlässigbar.
- (ii) Es gibt weder Ohm'sche Verluste noch Streukapazitäten in den Leitungen.
- (iii) Es gibt keine Wirbelströme im Eisenjoch.

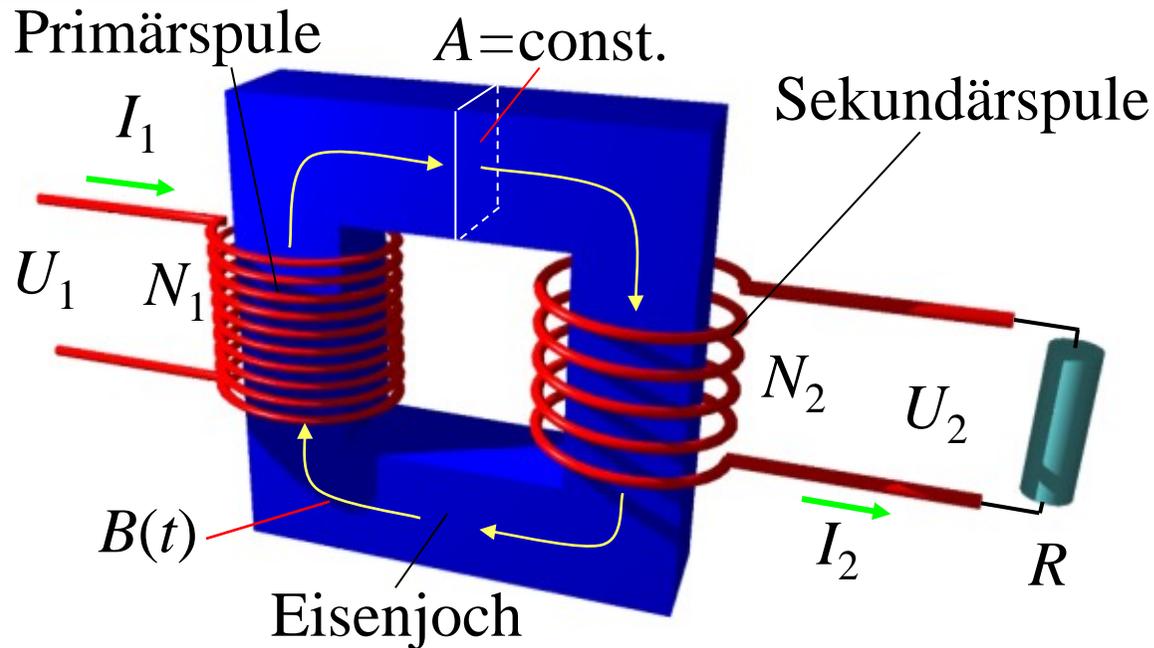
Wirbelstrom $I_{\text{Wirb}}(t)$ $\dot{B}(t)$

Wirbelstromverluste können durch Lamellen minimiert werden.

Lamellen



Isolation



Eine geschlossene Feldlinie der Länge l im Eisenjoch umschließt die Ströme durch *beide* Spulen. Das Ampère'sche-Gesetz ergibt dann:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = Bl = \mu_r \mu_0 (N_1 I_1 + N_2 I_2)$$

□ Eisen-
kern

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_r \mu_0}{l} (N_1 I_1 + N_2 I_2)$$

Beim idealen Transformator ist der magnetische Fluß durch die Primär- und Sekundärspule gleich groß:

$$\Phi_{\text{Primär}} = \Phi_{\text{Sekundär}} = \Phi$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = B(t) A$$

Primärseite:

$$U_1(t) + U_{\text{ind}}(t) = 0$$

$$U_1(t) = -U_{\text{ind}}(t) = N_1 \dot{\Phi}(t)$$

$$\Rightarrow U_1(t) = N_1 A \dot{B}(t)$$



Einsetzen des Ausdruckes für $B(t)$ ergibt (Ableitungen nach der Zeit werden ab jetzt mit Punkten gekennzeichnet):

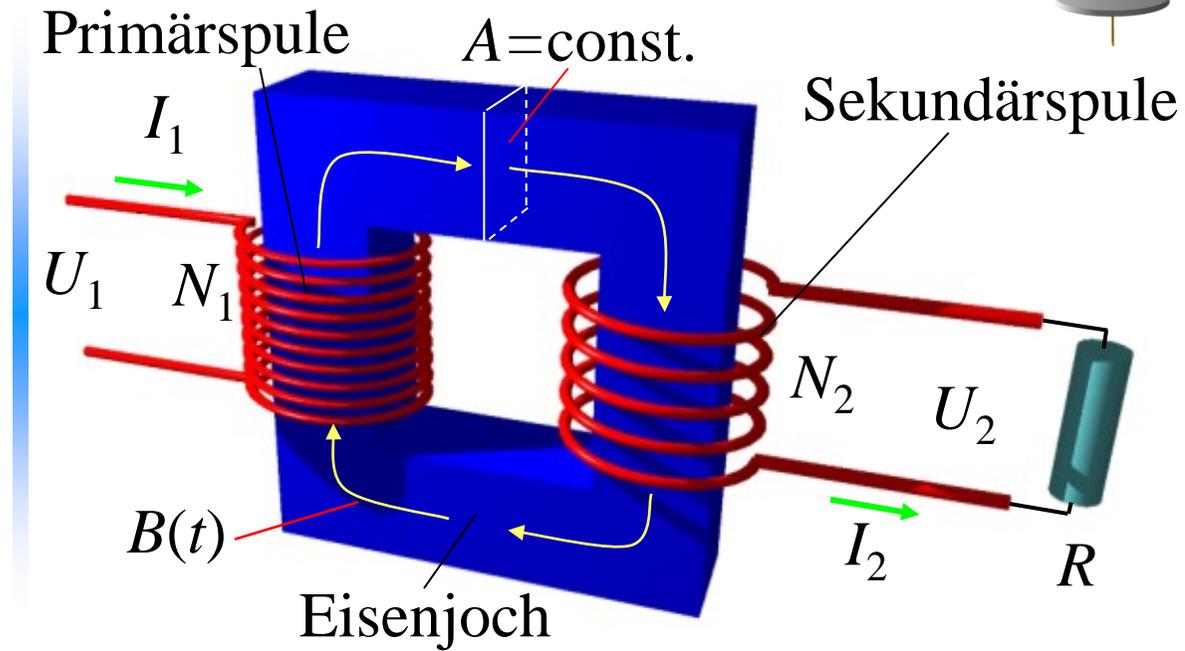
$$U_1 = N_1 A \frac{\mu_r \mu_0}{l} (N_1 \dot{I}_1 + N_2 \dot{I}_2)$$

Auflösen der Klammer führt auf:

$$U_1 = \underbrace{\mu_r \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l}}_{L_{11} - \text{Selbstinduktivität der Primärspule}} \dot{I}_1 + \underbrace{\mu_r \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}}_{L_{12} - \text{Gegeninduktivität}} \dot{I}_2 = L_{11} \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2$$

Sekundärseite: Auf der Sekundärseite wird die Spannung U_2 induziert.

$$U_2 = -N_2 \dot{\Phi}(t) = -N_2 A \dot{B}(t) = -N_2 A \frac{\mu_r \mu_0}{l} (N_1 \dot{I}_1 + N_2 \dot{I}_2)$$





Auflösen der Klammer führt wieder auf:

$$U_2 = - \underbrace{\mu_r \mu_0 \frac{N_2 N_1 A}{l}}_{L_{21}\text{-Gegeninduktivität}} \dot{I}_1 - \underbrace{\mu_r \mu_0 \frac{N_2^2 A}{l}}_{L_{22}\text{-Selbstinduktivität der Sekundärspule}} \dot{I}_2 = -L_{21} \dot{I}_1 - L_{22} \dot{I}_2$$

Zusammengefaßt ergeben sich die sog. „Transformatorgleichungen“:

$$U_1(t) = +L_{11} \dot{I}_1(t) + L_{12} \dot{I}_2(t)$$

$$U_2(t) = -L_{21} \dot{I}_1(t) - L_{22} \dot{I}_2(t)$$

$$\text{mit } L_{jk} = \mu_r \mu_0 \frac{N_j N_k A}{l} \quad (j, k = 1, 2)$$

Die beiden Gegeninduktivitäten sind beim idealen Transformator gleich groß:

$$L_{12} = \mu_r \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} = \mu_r \mu_0 \frac{N_2 N_1 A}{l} = L_{21}$$

Wir verwenden jetzt wieder die komplexe Schreibweise für die Ströme und Spannungen:

$$U_1(t) = U_1 e^{i\omega t} \quad U_2(t) = U_2 e^{i\omega t}$$

$$I_1(t) = I_1 e^{i\omega t} \quad I_2(t) = I_2 e^{i\omega t}$$

mit $U_1, U_2, I_1, I_2 \in \mathbb{C}$

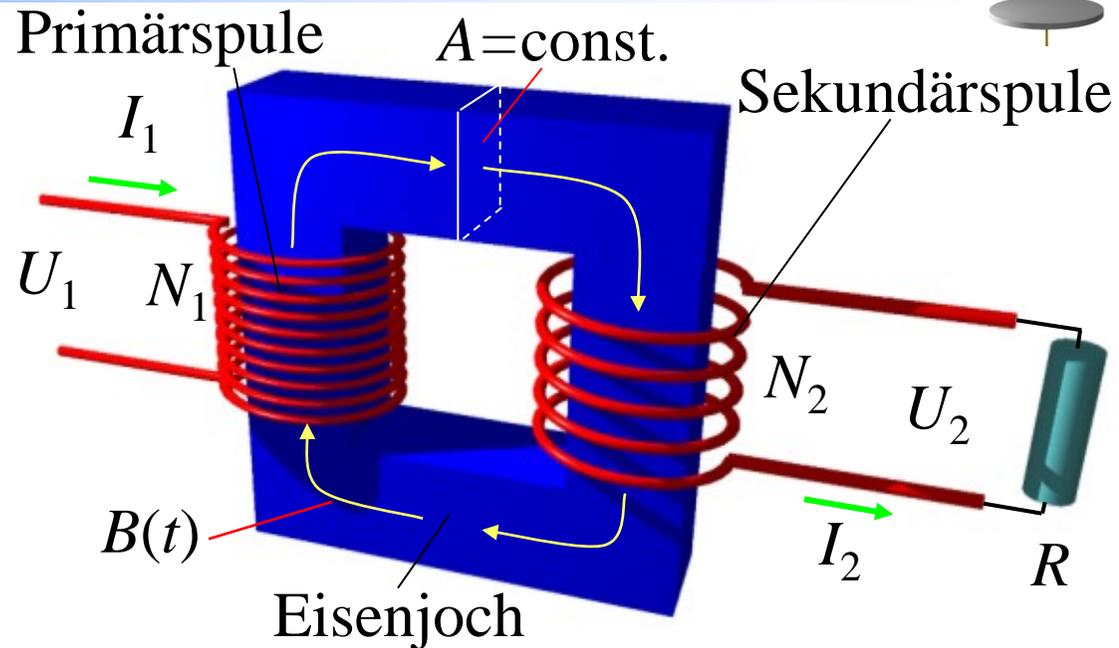
Einsetzen in die Transformatorgleichungen ergibt:

$$U_1 = i\omega L_{11} I_1 + i\omega L_{12} I_2$$

$$U_2 = -i\omega L_{21} I_1 - i\omega L_{22} I_2$$

Auf der Sekundärseite gilt wegen des Ohm'schen Gesetzes:

$$U_2 = R I_2$$



Einsetzen in die zweite Gleichung und Auflösen nach I_2 ergibt:

$$I_2 = -\frac{i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} I_1$$

Dieses Resultat kann jetzt in die erste Transformatorgleichung eingesetzt werden:

$$U_1 = i\omega \left(L_{11} I_1 + L_{12} \frac{-i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} I_1 \right)$$



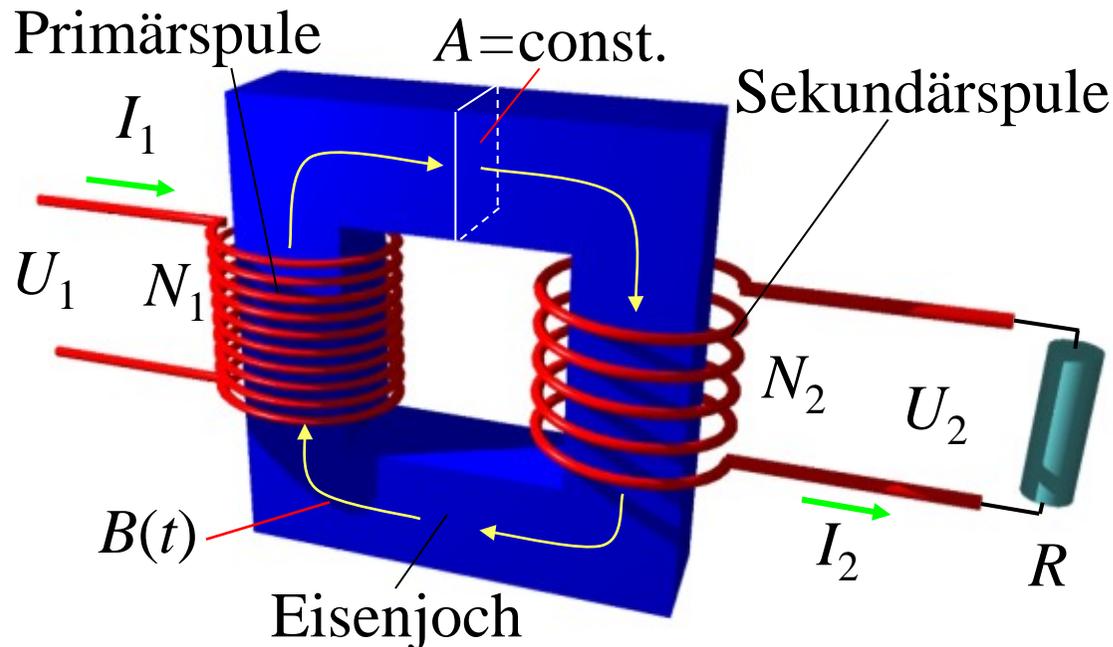
$$\Rightarrow U_1 = \frac{i\omega I_1}{R + i\omega L_{22}} (L_{11}R + i\omega L_{22}L_{11} - i\omega L_{21}L_{12})$$

Beim idealen Transformator ist: $L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} = 0$

Also folgt

$$\Rightarrow U_1 = \frac{i\omega L_{11}R}{R + i\omega L_{22}} I_1 = Z_{\text{Primär}} I_1$$

mit der Impedanz der Primärseite: $Z_{\text{Primär}} = \frac{i\omega L_{11}R}{R + i\omega L_{22}}$



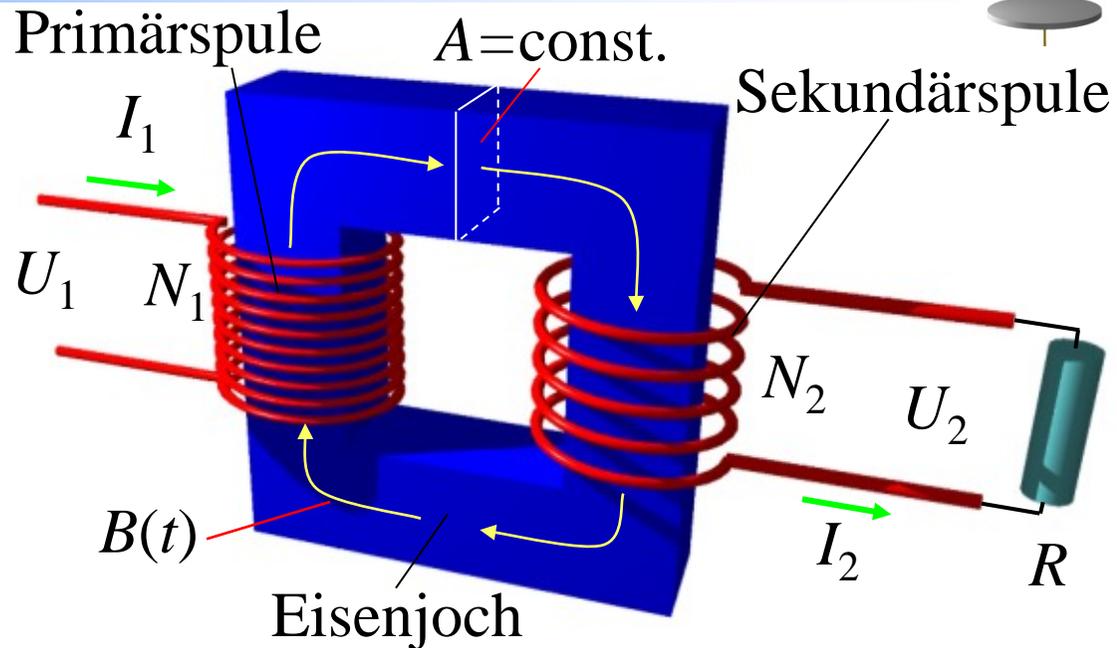
Einsetzen des Ausdruckes für I_2 in das Ohm'sche Gesetz liefert auf der Sekundärseite:

$$U_2 = RI_2 = -R \frac{i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} I_1$$



Damit ergibt sich für das Verhältnis der Sekundärspannung zu der Primärspannung:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-R \frac{i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} I_1}{\frac{i\omega L_{11} R}{R + i\omega L_{22}} I_1} = -\frac{L_{21}}{L_{11}}$$



Die Induktivitäten waren definiert durch:

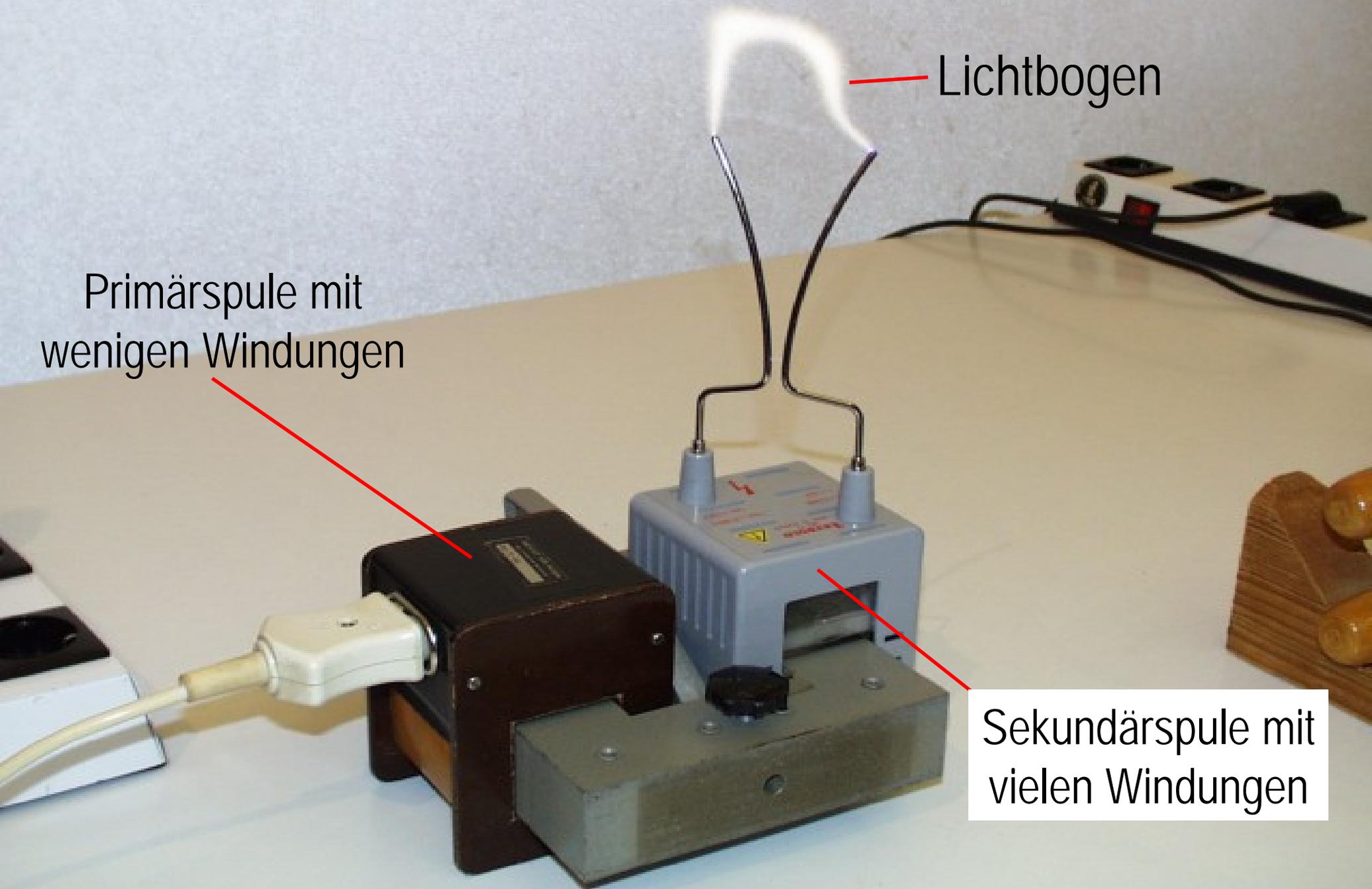
$$L_{21} = \mu_r \mu_0 \frac{N_2 N_1 A}{l} \quad L_{11} = \mu_r \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l}$$

Damit transformieren sich die Spannungen wie folgt:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

⇒ Die Spannungen transformieren sich also im Verhältnis der Windungszahlen. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Primär- und Sekundärspannung um $\pi = 180^\circ$ phasenverschoben sind.

Versuch 9: Erzeugung von Hochspannungen durch Transformation

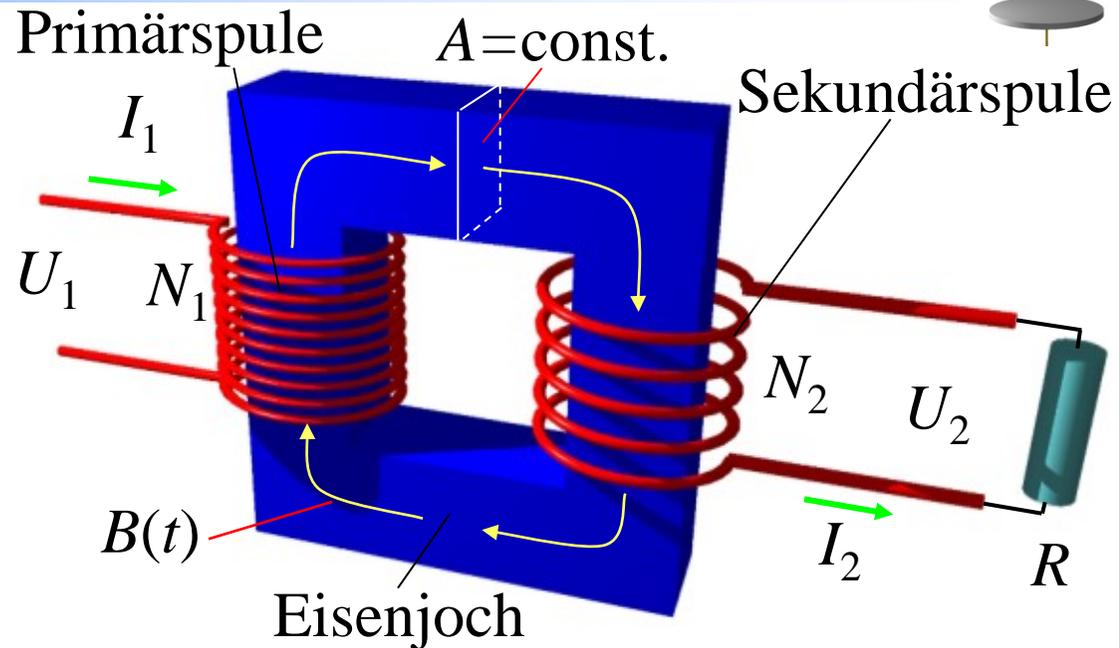




Das Verhältnis der Ströme auf der Primär- und Sekundärseite läßt sich sofort mit der Gleichung

$$I_2 = -\frac{i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} I_1$$

angeben.



Es ergibt sich:

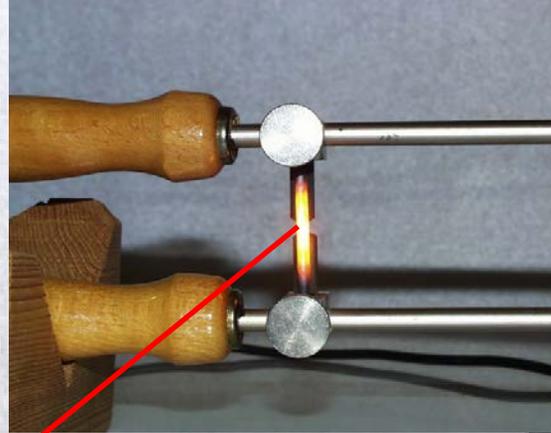
$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{i\omega L_{21}}{R + i\omega L_{22}} = -\frac{L_{21}}{L_{22}} \frac{1}{1 + R/(i\omega L_{22})}$$

Für große Frequenzen $\omega L_{22} \gg R$ gilt nun also (kein „Leerlaufstrom“):

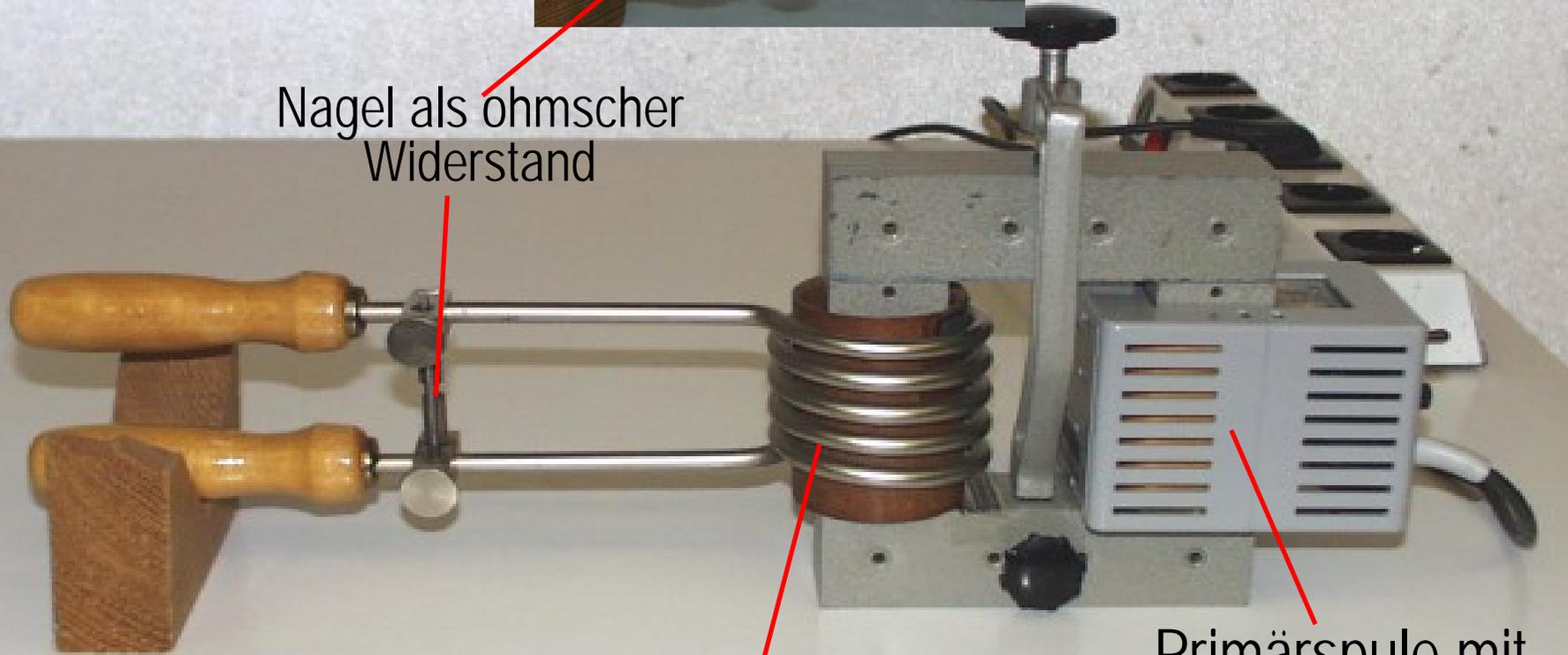
$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{L_{21}}{L_{22}} = -\frac{N_1}{N_2}$$

⇒ Die Ströme transformieren sich daher im umgekehrten Verhältnis der Windungszahlen. Das negative Vorzeichen bedeutet, wieder dass der Primär- und Sekundärstrom um $\pi = 180^\circ$ phasenverschoben sind.

Versuch 10: Erzeugung hoher Ströme durch Transformation



Nagel als ohmscher Widerstand



Sekundärspule mit wenigen Windungen

Primärspule mit vielen Windungen



Das Verhältnis der Widerstände auf der Primär- und Sekundärseite ist:

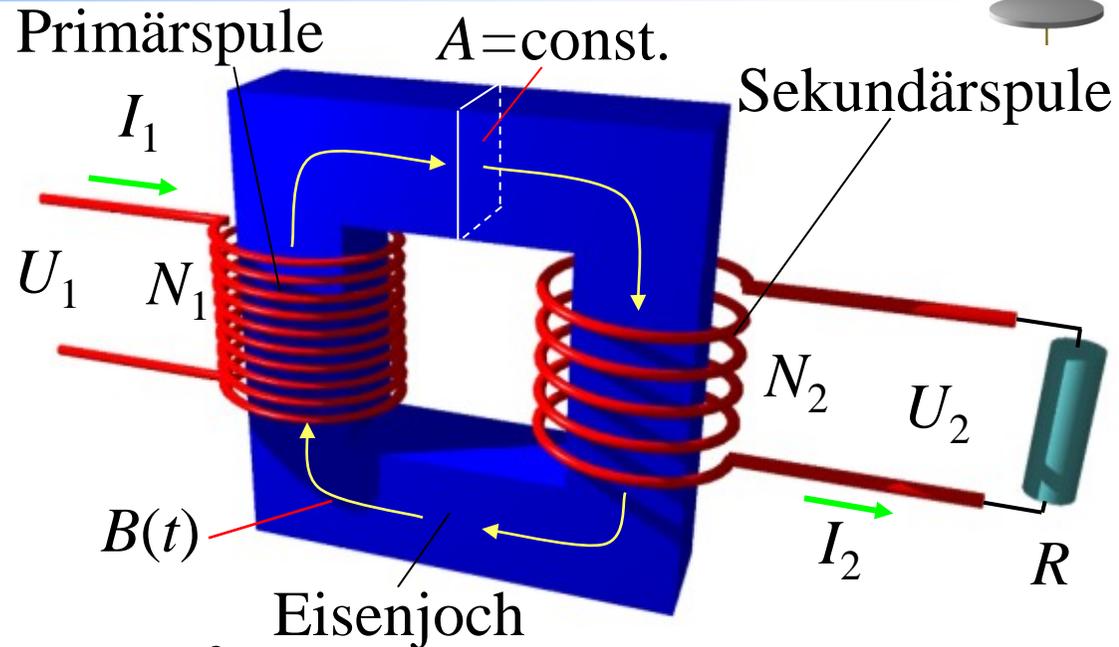
$$\frac{R}{Z_{\text{Primär}}} = \frac{R}{\frac{i\omega L_{11}R}{R + i\omega L_{22}}}$$

Also ergibt sich:

$$\frac{R}{Z_{\text{Primär}}} = \frac{R + i\omega L_{22}}{i\omega L_{11}} = \frac{L_{22}}{L_{11}} + \frac{R}{i\omega L_{11}} = \frac{N_2^2}{N_1^2} + \frac{R}{i\omega L_{11}}$$

Für große Frequenzen $\omega L_{11} \gg R$ gilt dann:

$$\frac{R}{Z_{\text{Primär}}} = \frac{N_2^2}{N_1^2}$$



Beispiel: Ein Lautsprecher mit einem Widerstand von $R_2 = 4\Omega$ soll mit einem hochohmigen Verstärker mit $R_1 = 2500\Omega$ betrieben werden. Das bedeutet für das Verhältnis der Windungszahlen:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{4\Omega}{2500\Omega} = \frac{N_2^2}{N_1^2} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25} \quad 115$$

Für die Leistung auf der Primär- und Sekundärseite gilt:

$$P_{\text{Primär}} = U_1 I_1$$

$$P_{\text{Sek}} = U_2 I_2$$

Einsetzen der bisherigen Resultate ergibt:

$$P_{\text{Sek}} = \frac{L_{21}}{L_{11}} U_1 \frac{L_{21}}{L_{22}} \frac{1}{1 + R/(i\omega L_{22})} I_1 = \frac{L_{21}^2}{L_{11} L_{22}} \frac{1}{1 + R/(i\omega L_{22})} P_{\text{Primär}}$$

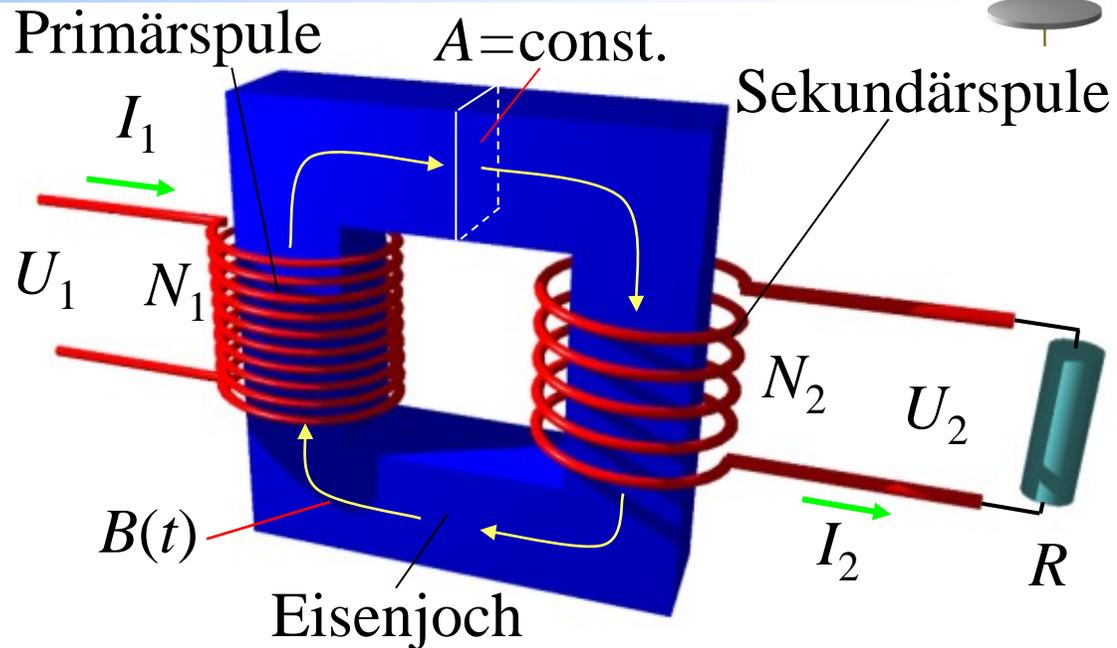
Beim jedem Transformator ist $L_{11} L_{22} \geq (L_{21})^2$ und ferner gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{1}{1 + ix} \right| \leq 1$$

Also folgt: $|P_{\text{Sek}}| \leq |P_{\text{Primär}}|$ (realer Trafo: $|P_{\text{Sek}}|/|P_{\text{Primär}}| \approx 90\% - 95\%$)

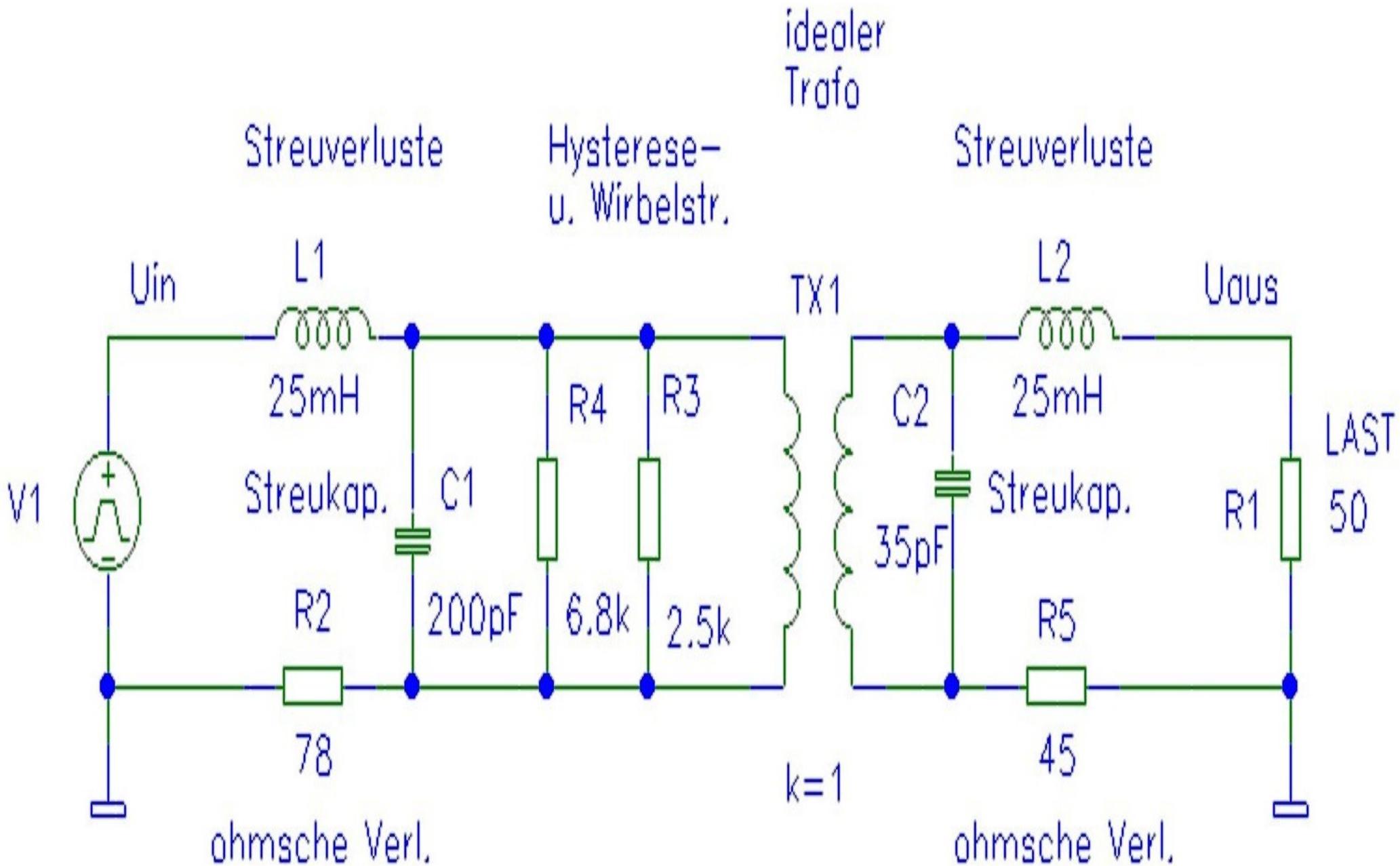
Beim idealen Transformator ist $L_{11} L_{22} = (L_{12})^2$ und im Fall

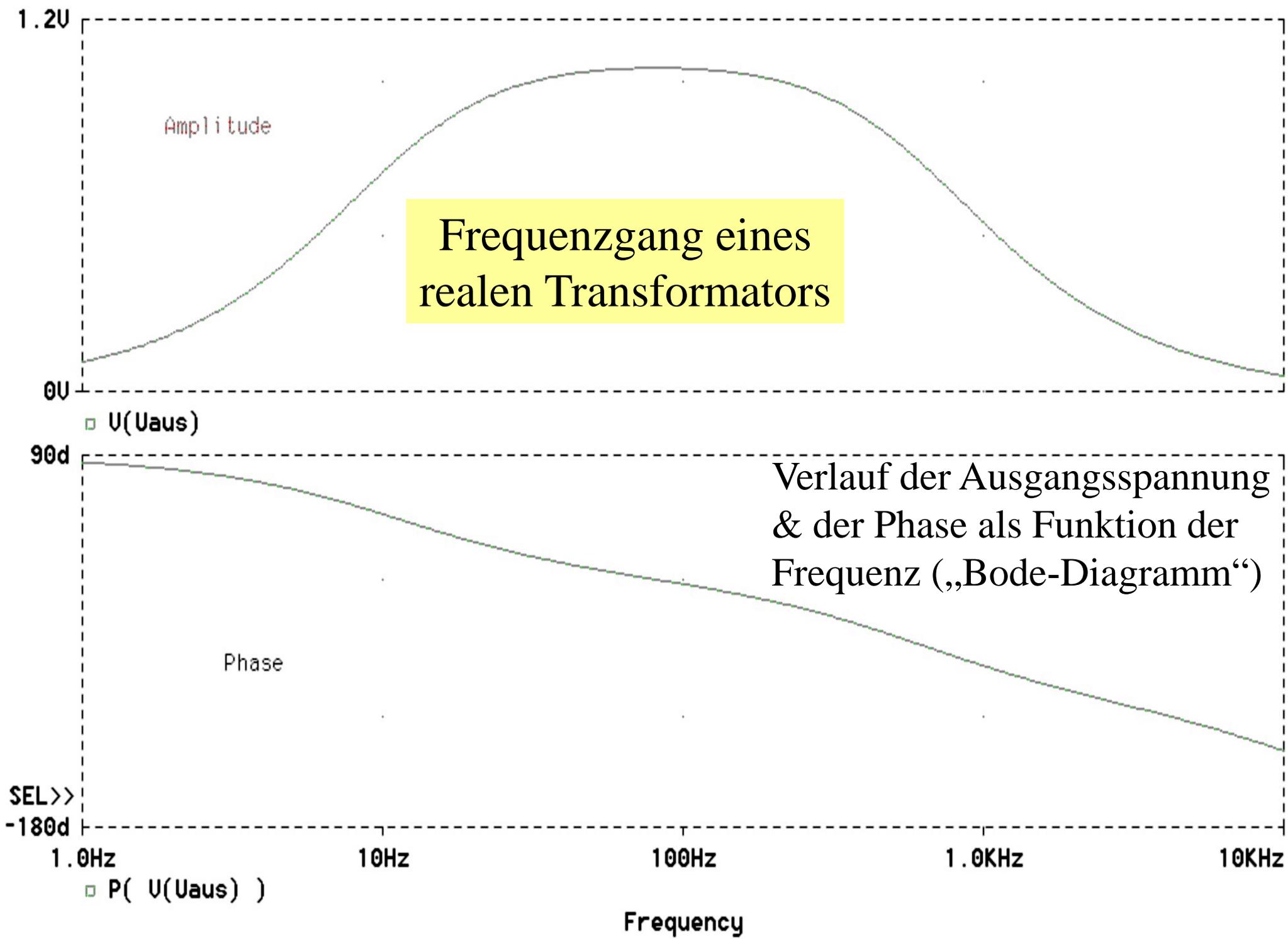
$\omega L_{22} \gg R$ folgt: $P_{\text{Sek}} \equiv P_{\text{Primär}}$





Ersatzschaltbild eines realen Transformators

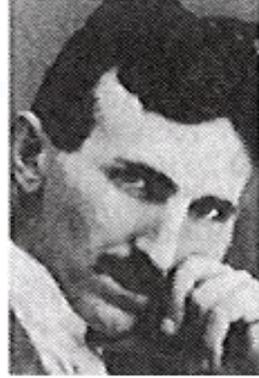
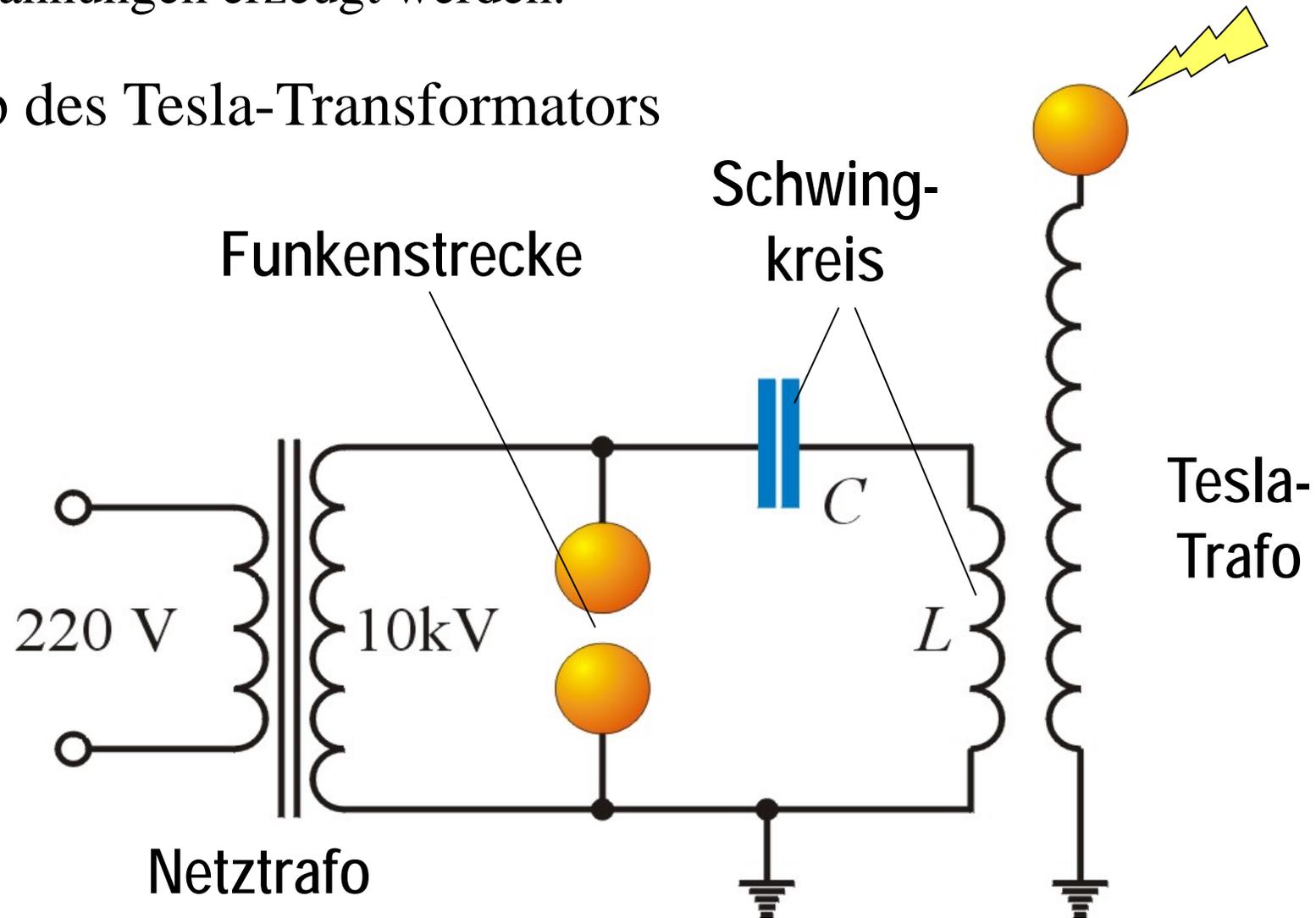




Versuch 11: Der Tesla-Transformator

Mit dem Tesla-Transformator können extrem hohe Spannungen erzeugt werden.

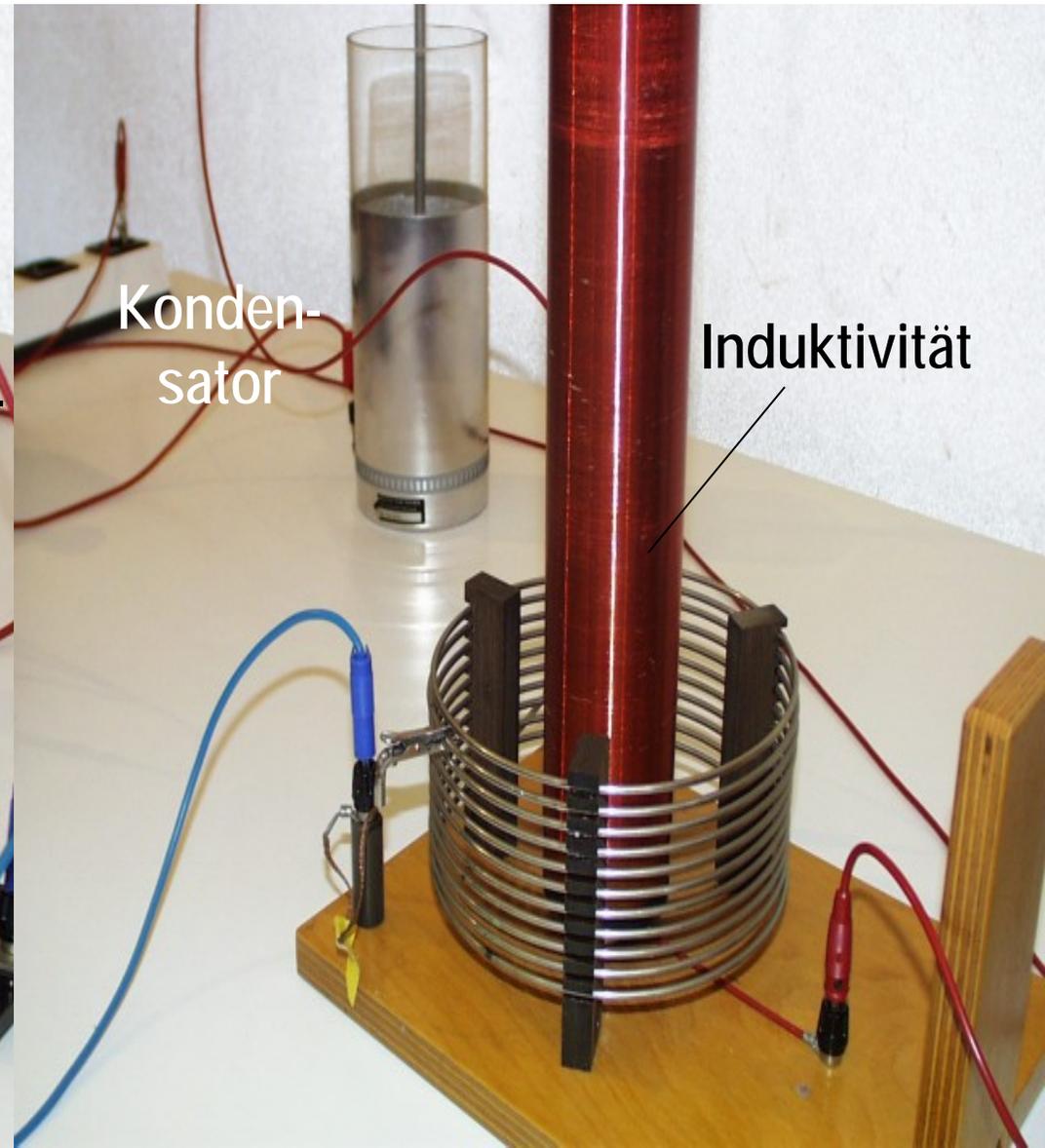
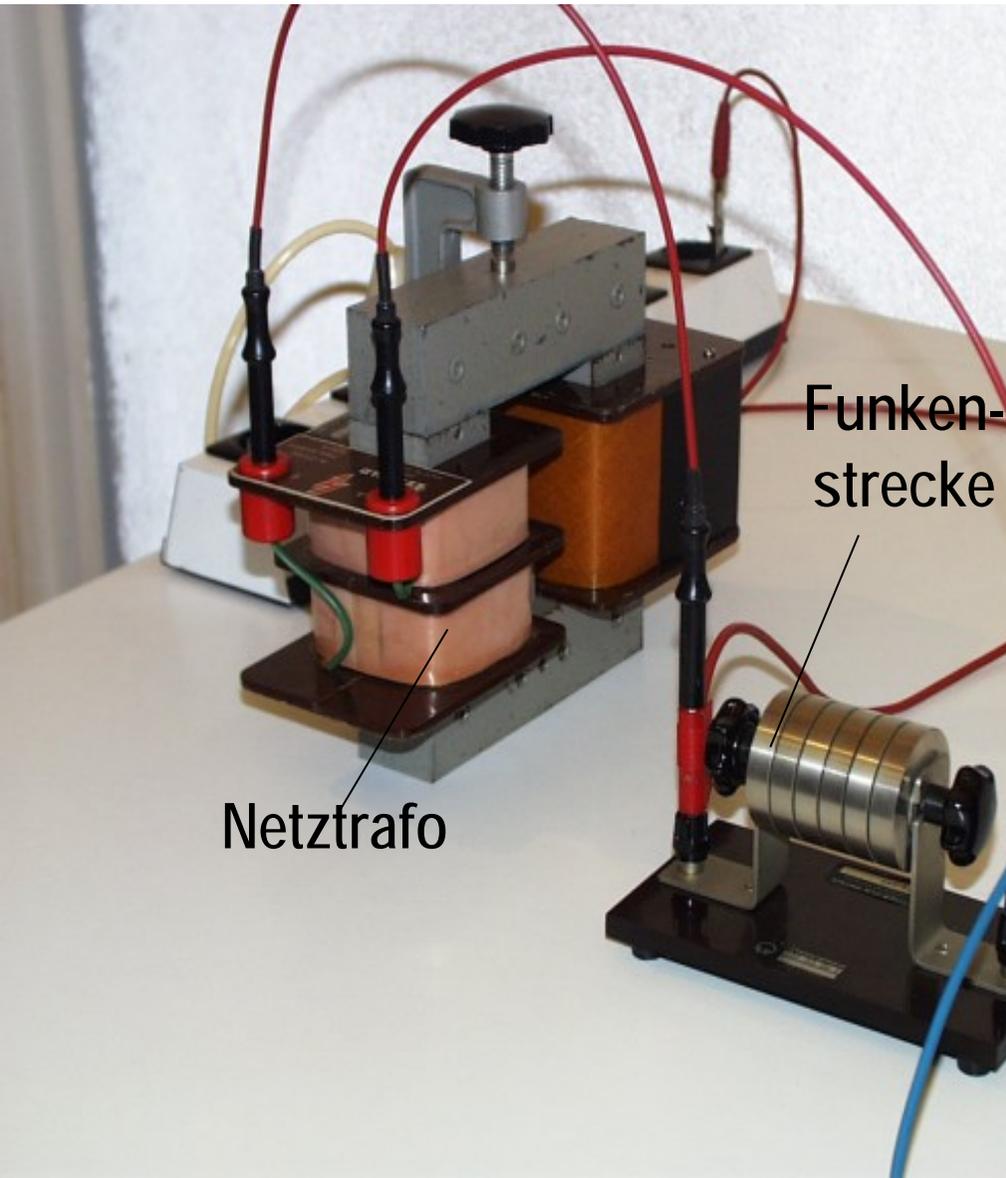
Prinzip des Tesla-Transformators



Nicola Tesla
(1856-1943)

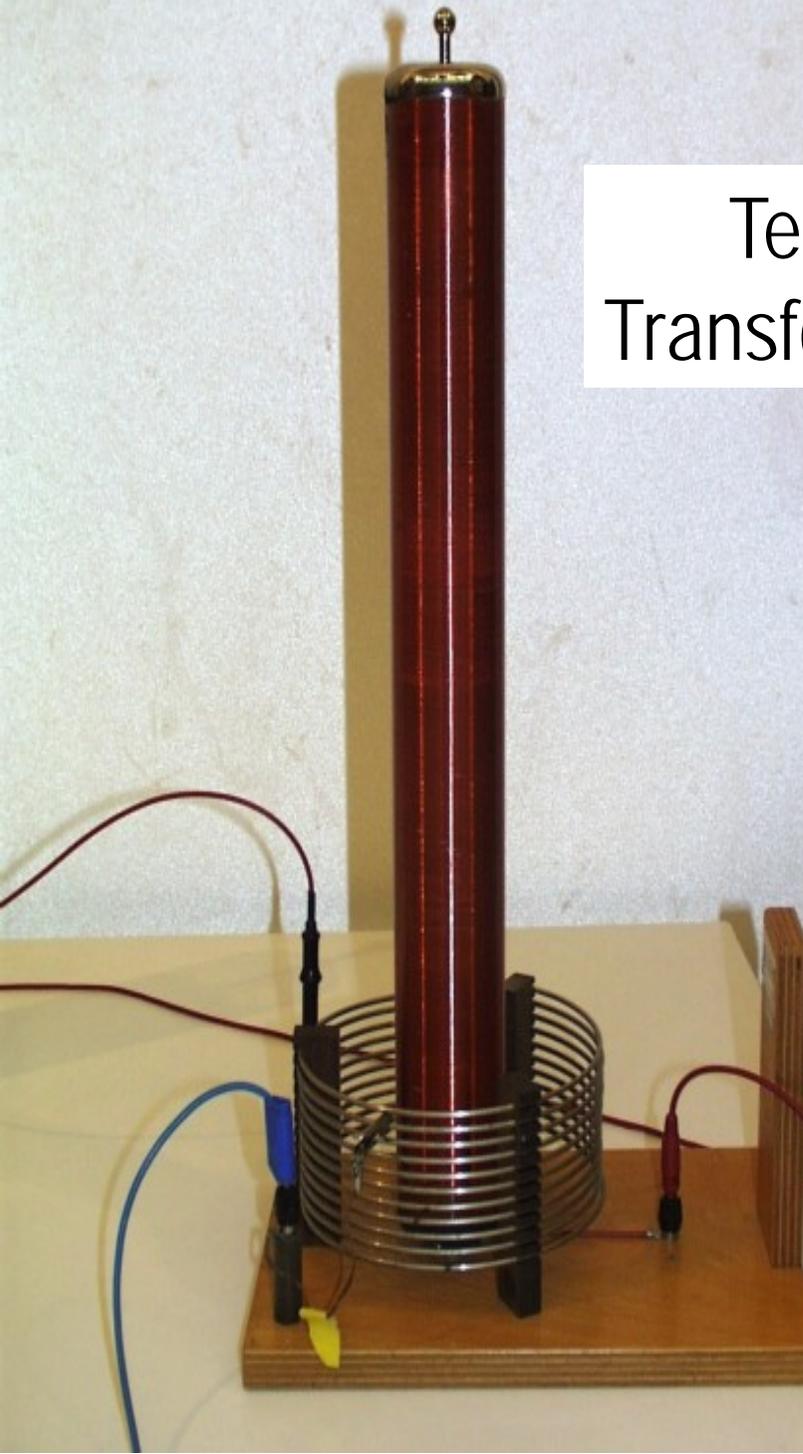


Einzelkomponenten des Tesla-Transformators



Koronabildung

Tesla-
Transformator



Gasentladungsröhre

