Inhalt der Vorlesung B2

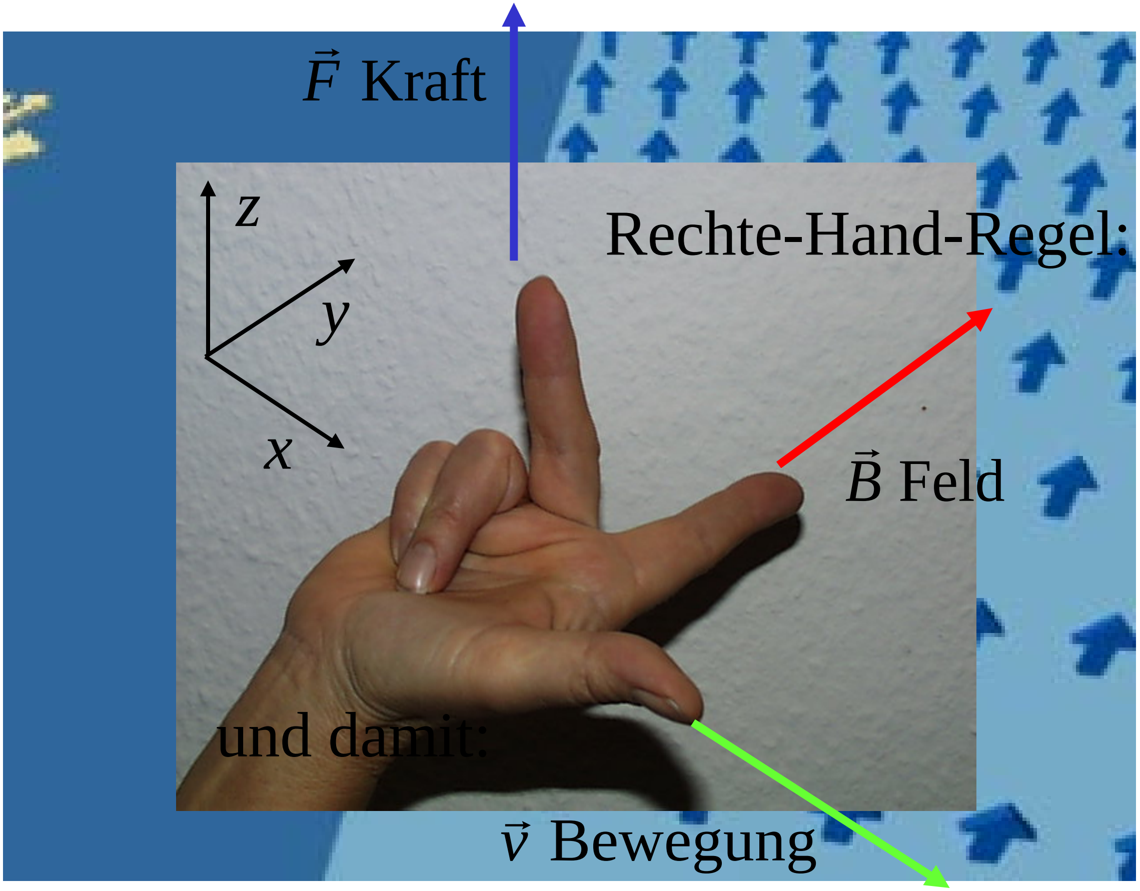
4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

- Einleitung
- Ladungen & Elektrostatische Felder
- Elektrischer Strom
- Magnetostatik
- Zeitlich veränderliche Felder - Elektrodynamik
- Wechselstromnetzwerke
- Die Maxwell'schen Gleichungen
- Elektromagnetische Wellen & Strahlung
- Relativität der Felder

5. Optik

- Licht als elektromagnetische Welle
- Geometrische Optik
- Optische Abbildungen
- Wellenoptik

Magnetische Kräfte auf geladene Teilchen: Die Lorentz-Kraft



Eine Ladung q bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem magnetischen Feld $\vec{B}$.

Kraft auf die Ladung:

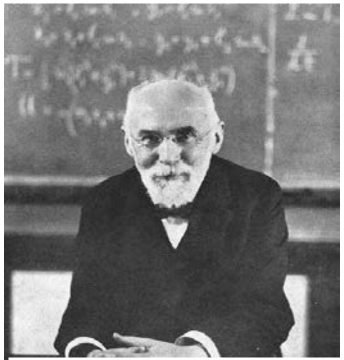
$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

Lorentz-Kraft

und damit:

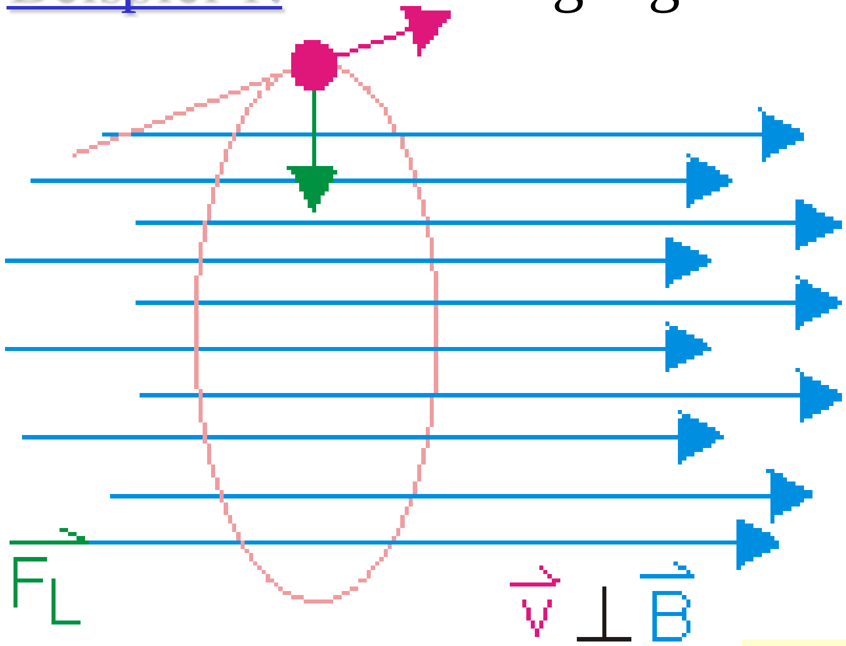
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}^{\,2}\right) = 0 \Rightarrow |\vec{v}| = \text{const.} \qquad \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt}$$

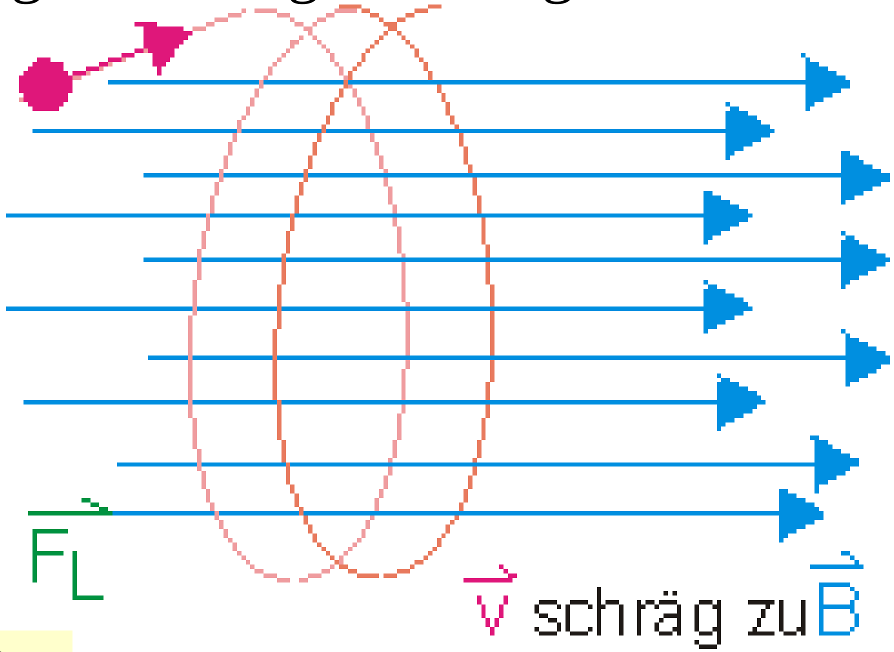
Im Magnetfeld bleibt der Betrag der Geschwindigkeit konstant.



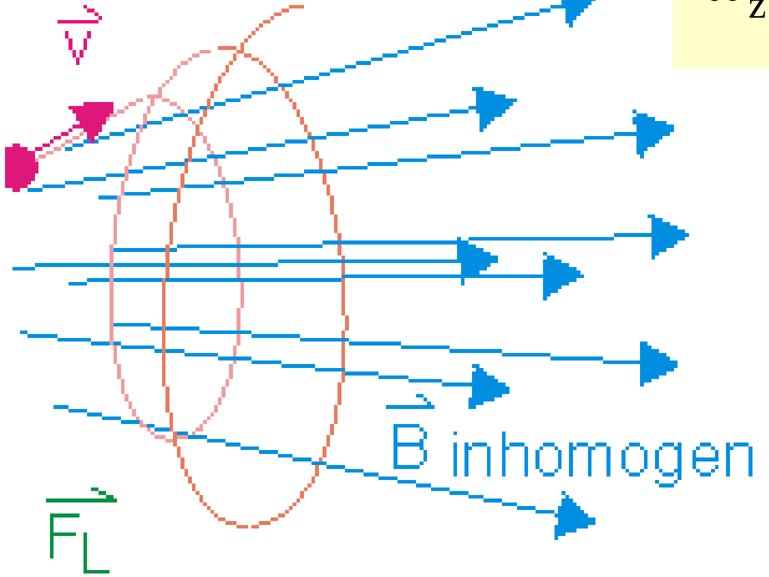
Antoon Lorentz
(1853-1928)

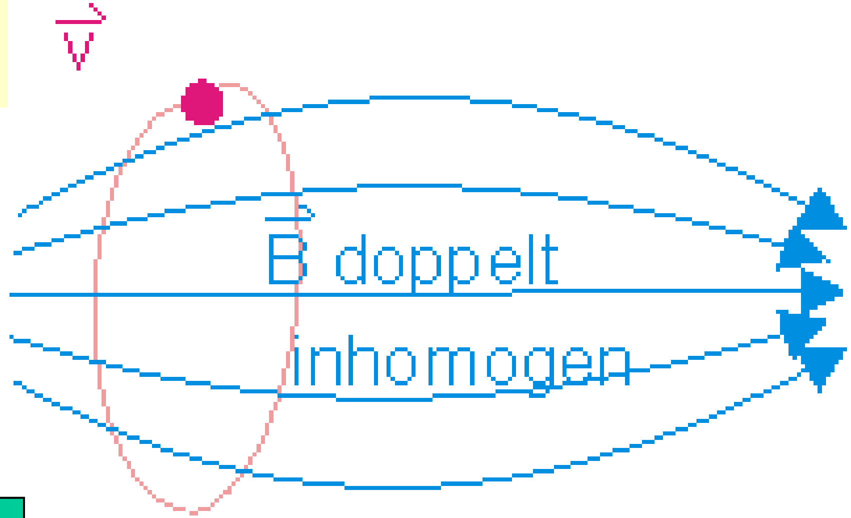
Beispiel 1: Die Bewegung einer Ladung im homogenen Magnetfeld





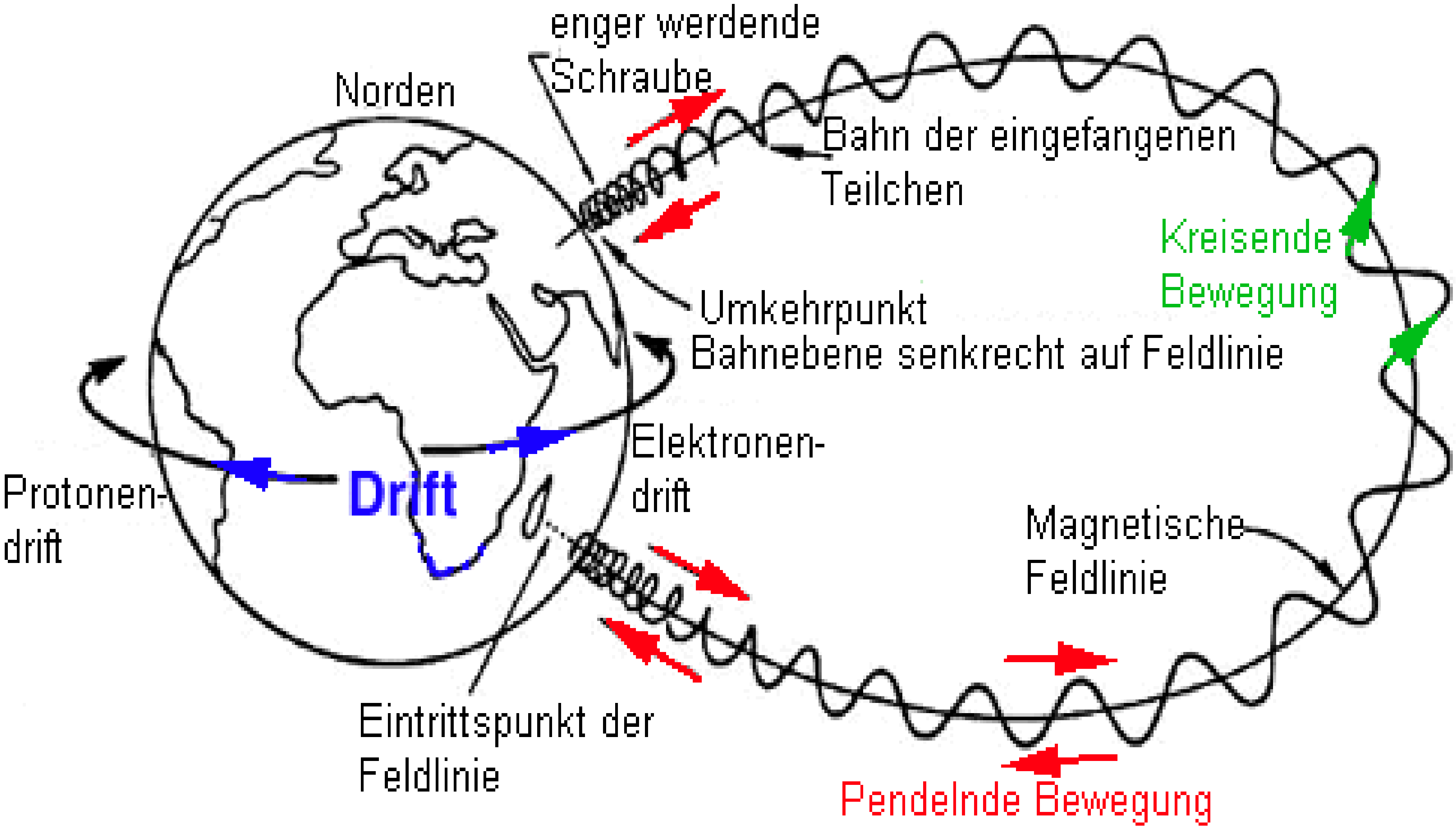
$$\omega_z = \frac{qB_z}{m}$$





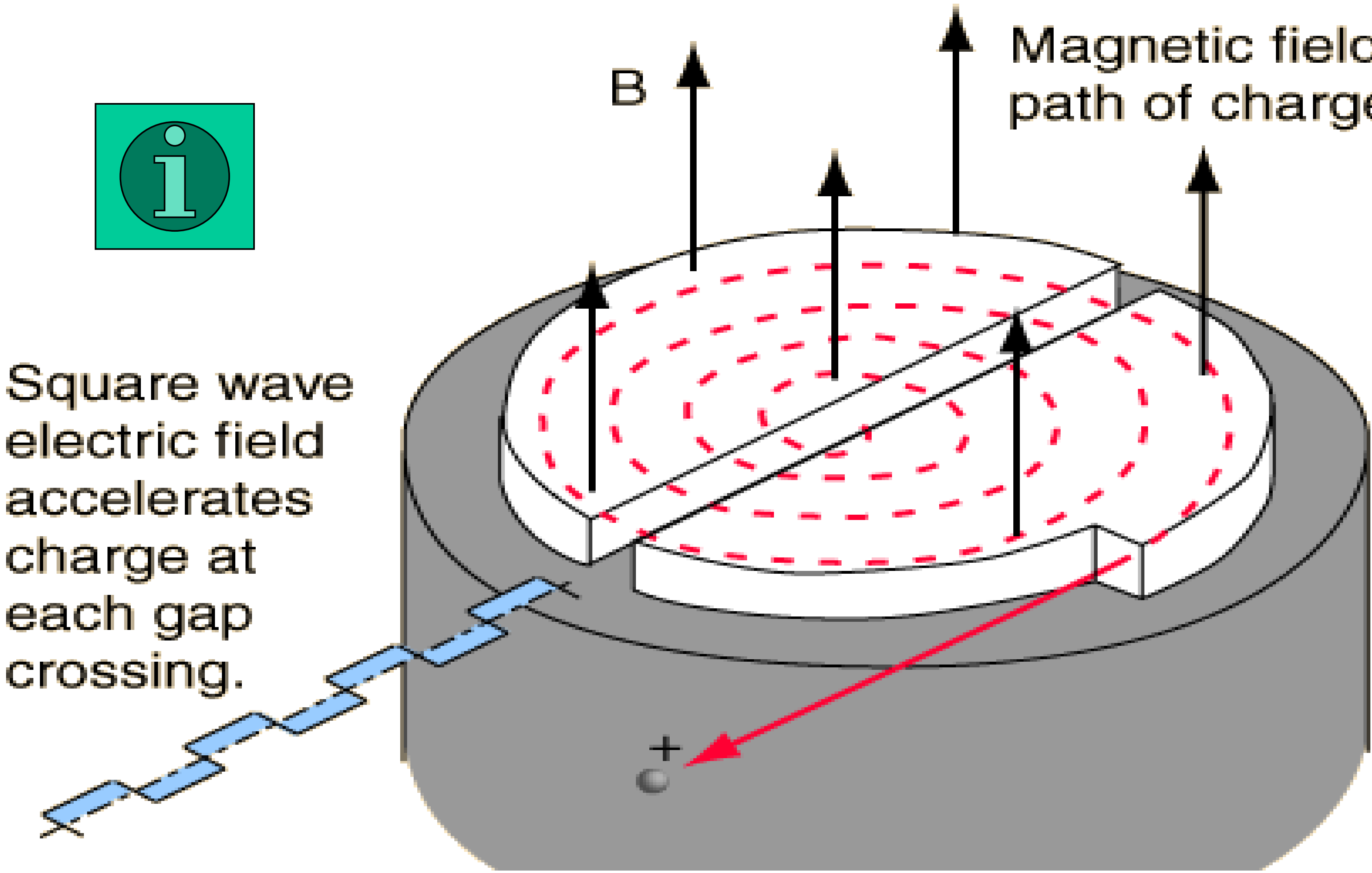
„Magnetische Flasche“

Die Bewegung von geladenen Teilchen im Erdmagnetfeld kann jetzt qualitativ verstanden werden: Die Teilchen bewegen sich auf Spiralbahnen entlang der Feldlinien.



Beispiel 2: Funktionsweise eines Zyklotrons

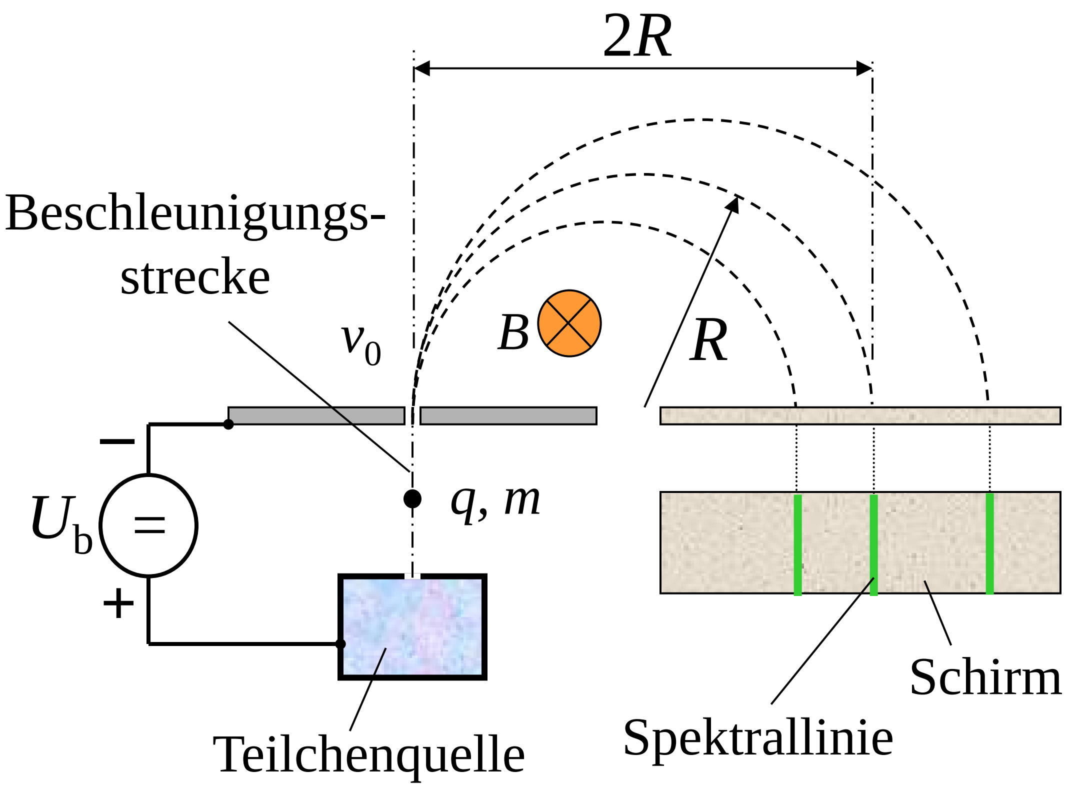
Da sich im magnetischen Feld der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert, können Ladungen allein mit Magnetfeldern nicht beschleunigt werden. Im *Zyklotron* wird dafür ein elektrisches Feld immer wieder durchlaufen.



Ernest Lawrence (1901-1958)


AEG
Warnung

Beispiel 3: Das Massenspektrometer



Die geladenen Teilchen werden durch U_b beschleunigt und erhalten die Geschwindigkeit:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU_b}{m}}$$

Im Magnetfeld B werden sie auf einem Halbkreis abgelenkt. Das Kräftegleichgewicht ist hier:

$$\frac{m v_0^2}{R} = q v_0 B \quad \Rightarrow \quad \frac{m v_0}{R} = q B$$

Quadriert man beide Ausdrücke dann folgt:

$$v_0^2 = \frac{2qU_b}{m} \quad \text{und} \quad \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{q^2}{m^2} B^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2U_b}{R^2} \frac{q}{m} = \frac{q^2}{m^2} B^2$$

Daraus ergibt sich schließlich:

$$\frac{q}{m} = \frac{2U_b}{R^2 B^2} \Rightarrow m(R) = \frac{B^2}{2qU_b} R^2$$

Magnetische & Elektrische Kräfte

Die Lorentz-Kraft auf eine bewegte Ladung q im Magnetfeld ist:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ist auch noch ein elektrisches Feld vorhanden, dann wirkt die Gesamt-kraft:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

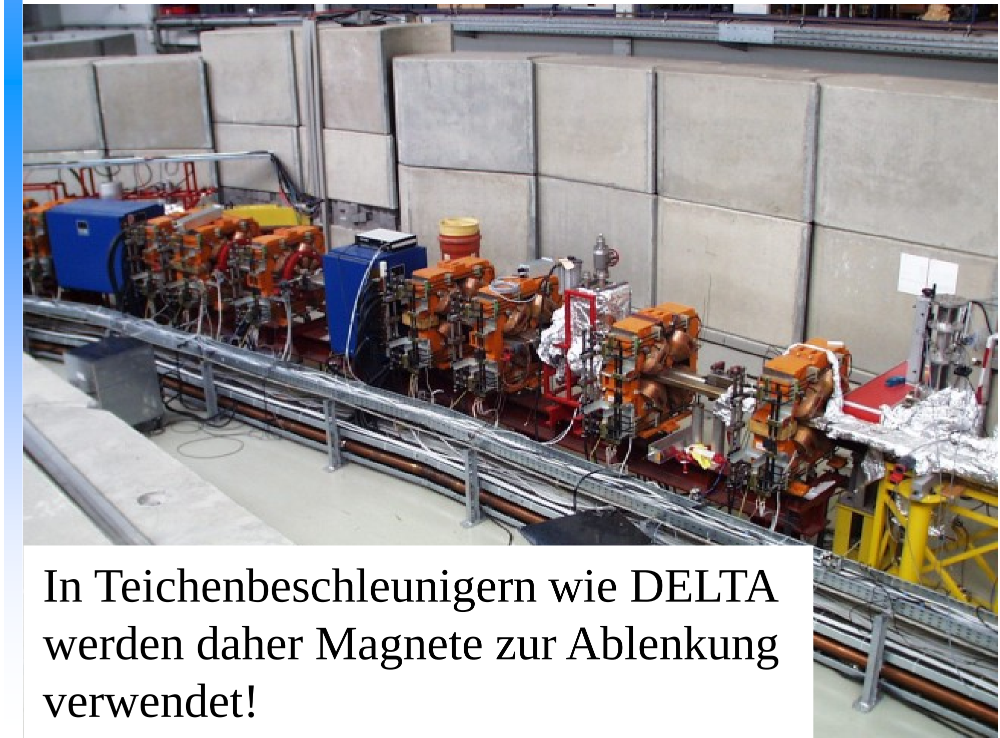
Beispiel 1: Vergleich der Kräfte auf ein geladenes Teilchen, welches sich (fast) mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, d.h. es ist $v \approx c$.
Die elektrische und magnetische Kraft sind gleich groß wenn:

$$\left|\vec{E}\right| = c\left|\vec{B}\right|$$

Ein Magnetfeld von B = 1 Tesla ist leicht zu erzeugen. Dem würde ein elektrisches Feld von

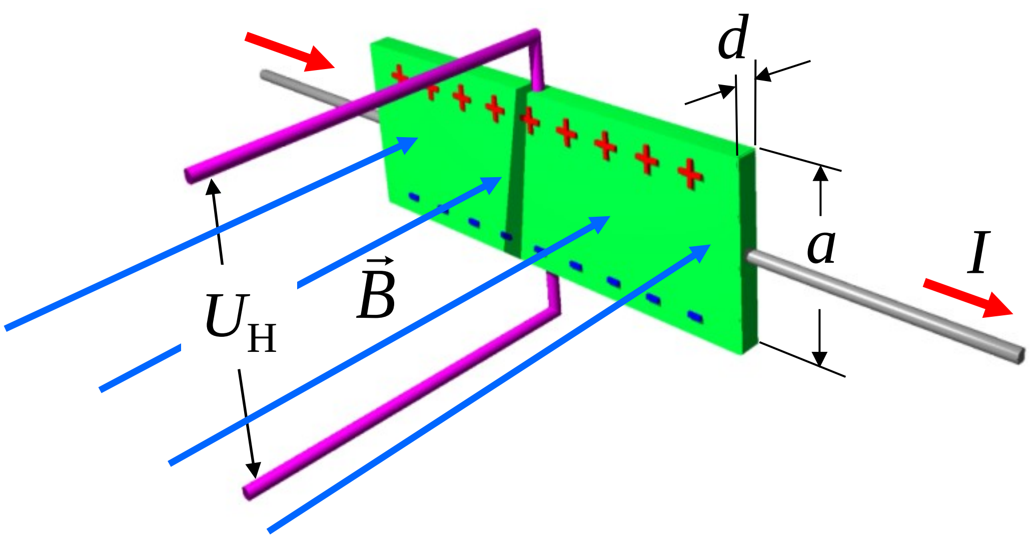
$$\left|\vec{E}\right| = 3 \cdot 10^8 \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

entsprechen. Dies ist unmöglich zu erzeugen ($\Rightarrow$ Überschläge).



In Teichenbeschleunigern wie DELTA werden daher Magnete zur Ablenkung verwendet!

Beispiel 2: Der Hall-Effekt



Durch einen Leiter der Breite *a* und der Dicke *d* fließt ein Strom *I*. Wenn senkrecht zum Leiter das Magnetfeld $\vec{B}$ wirkt, dann werden die bewegten Ladungen im Leiter senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zur Richtung des Stroms abgelenkt.

Dadurch entsteht an den Seiten eine Potentialdifferenz U_H, die solange ansteigt, bis die ablenkende Wirkung des Magnetfeldes durch das entstehende elektrische Feld an den Leiterseiten kompensiert wird. In diesem Gleichgewichtszustand gilt:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E}_H + \vec{v} \times \vec{B}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_H + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

Wir hatten für die Geschwindigkeit der Elektronen im Leiter bereits den folgenden Zusammenhang gefunden:

$$\left|\vec{v}\right| = \frac{I}{\rho A} = \frac{I}{\rho a d} \quad \text{und} \quad \left|\vec{E}_H\right| = \frac{U_H}{a}$$

Da $\vec{v}\perp\vec{B}$, $\vec{E}\perp\vec{v}$ und $\vec{E}\perp\vec{B}$ kann mit den Beträgen gerechnet werden:

$$\frac{U_{\mathrm{H}}}{a} = -\frac{IB}{\rho a d}$$

Daraus ergibt sich die sog. *Hall-Spannung:*

$$\boxed{U_{\mathrm{H}} = -\frac{I}{\rho d}B = -R_{\mathrm{H}}\frac{I}{d}B}$$

Die Ladungsdichte ρ wird oft durch die Dichte der Ladungsträger n ausgedrückt:

$$\rho = ne$$

Edwin Herbert Hall (1855-1938)

Die Größe

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{ne}$$

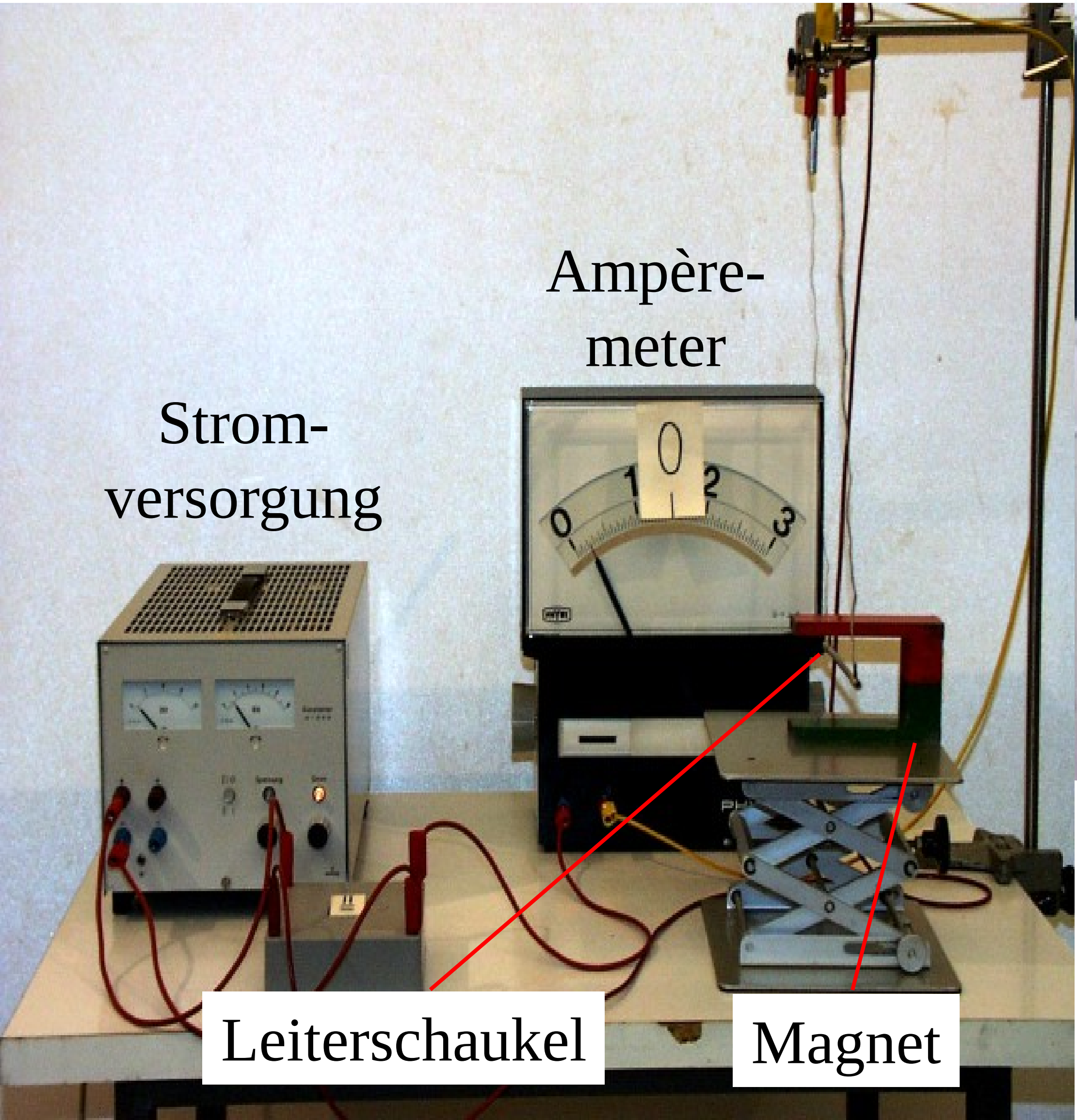
is die *Hall-Konstante*. Sie ist besonders groß, wenn n klein ist. Dies ist speziell für Halbleiter der Fall.

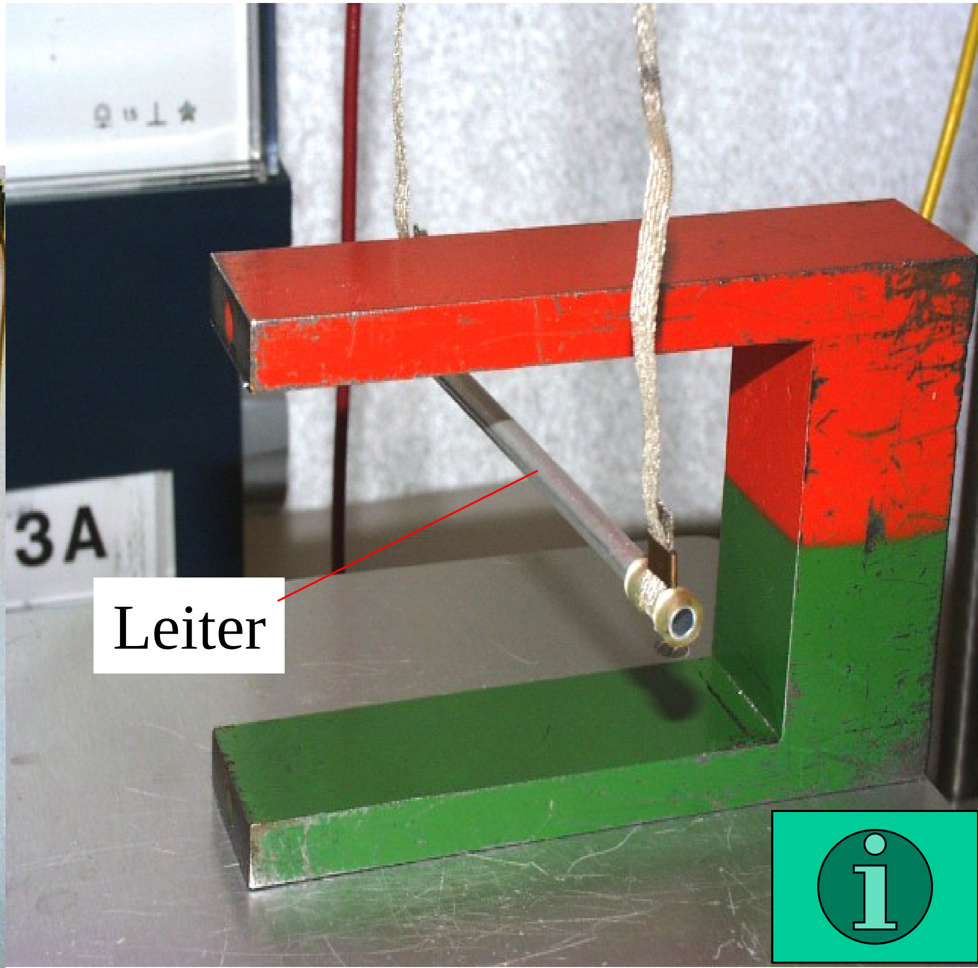
Da $B \propto U_{\mathrm{H}}$ kann durch Messen der Hall-Spannung das Magnetfeld B bestimmt werden. Vor allem aus kleinen Halbleiterstreifen gefertigte Sonden werden häufig zur Magnetfeldmessung verwendet (⇒ „Hallsonden“).

Es werden positive und negative Hall-Konstanten gemessen (Elektronenleitung und „Löcherleitung“).

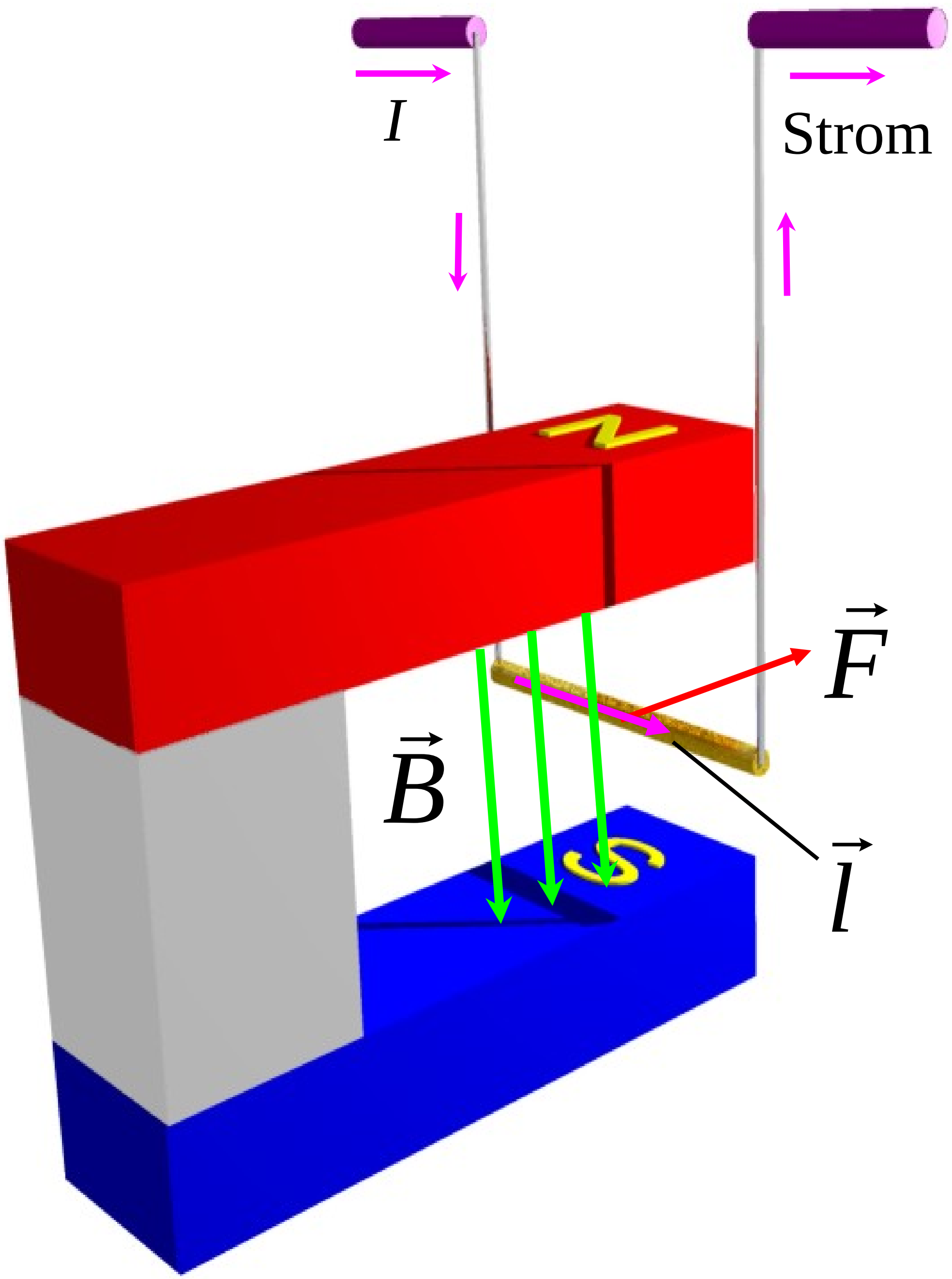
Die Kraft auf einen Leiter im Magnetfeld

Versuch: Leiterschaukel im Magnetfeld





Der stromdurchflossene Leiter wird je nach Richtung des Stromflusses in den Magneten hineingezogen oder herausgedrückt.



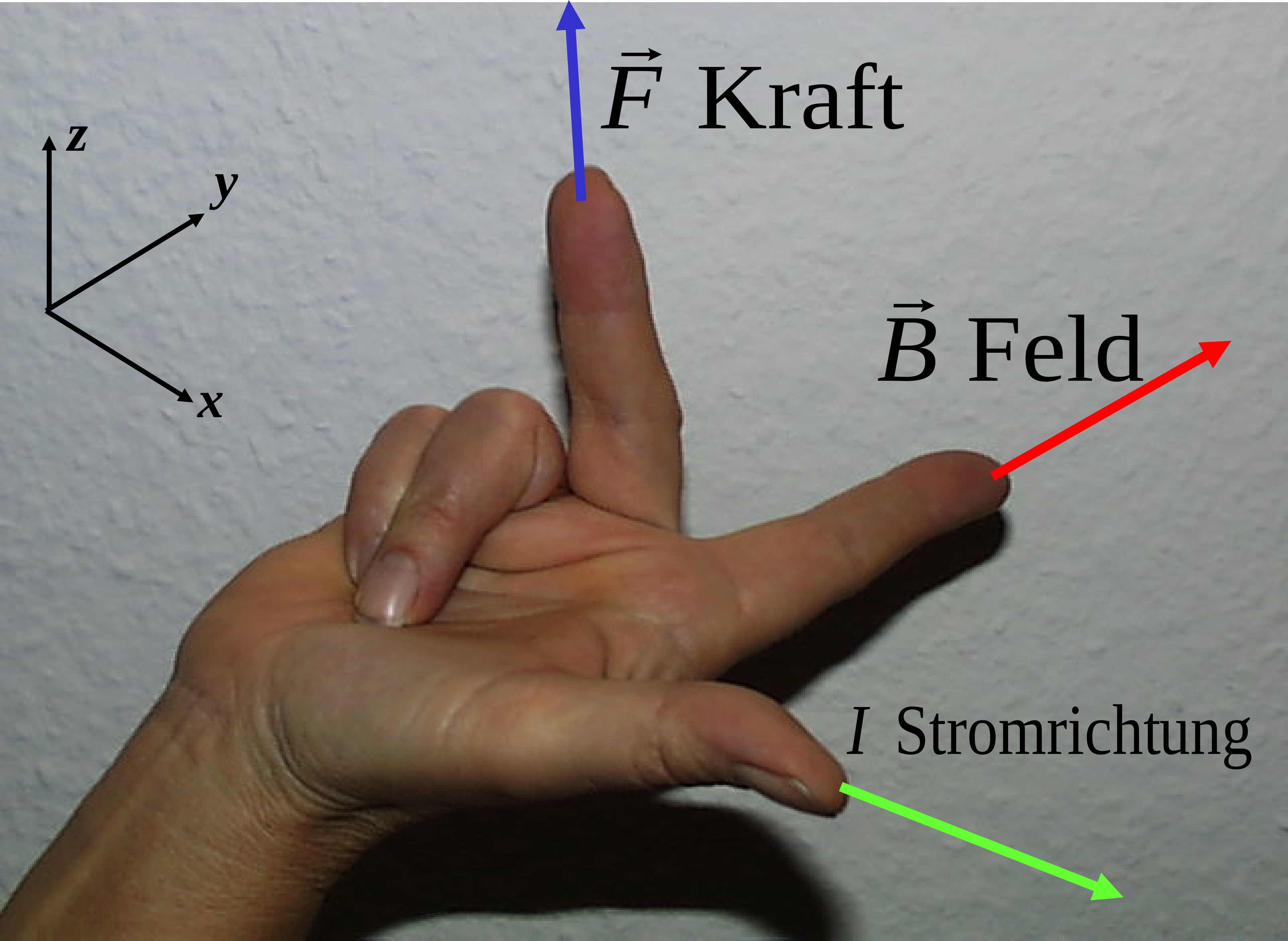
Auf einen stromdurchflossenen Leiter der Länge *l* wirkt im Magnetfeld eine Kraft *F*. Dabei findet man experimentell:

$$\vec{F} \perp \vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{F} \perp \vec{l}$$

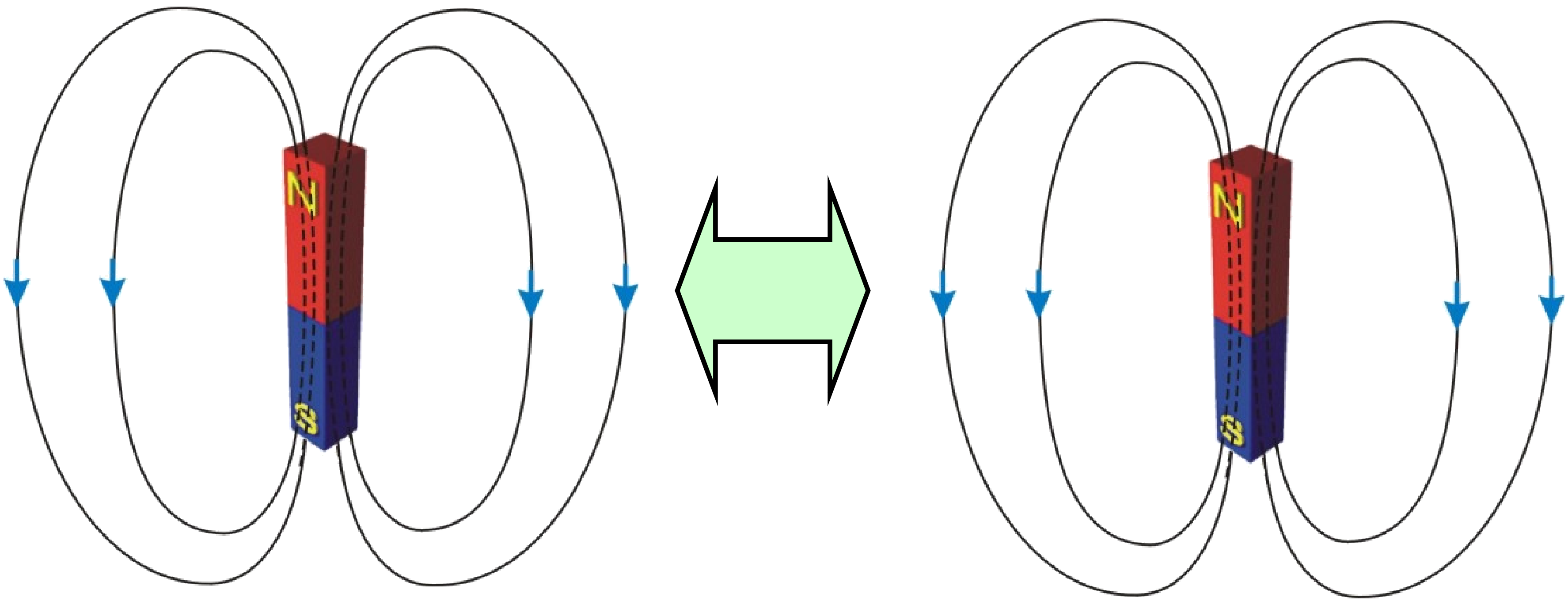
Dabei ist $\vec{l}$ ein Vektor, der in die Richtung des Stromflusses zeigt. Der Betrag von $\vec{l}$ gibt die Länge des Leiterstückes an, das vom homogenen Magnetfeld *B* durchsetzt wird.

Für die Kraft auf das Leiterstück ergibt sich quantitativ:

$$\boxed{\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}}$$

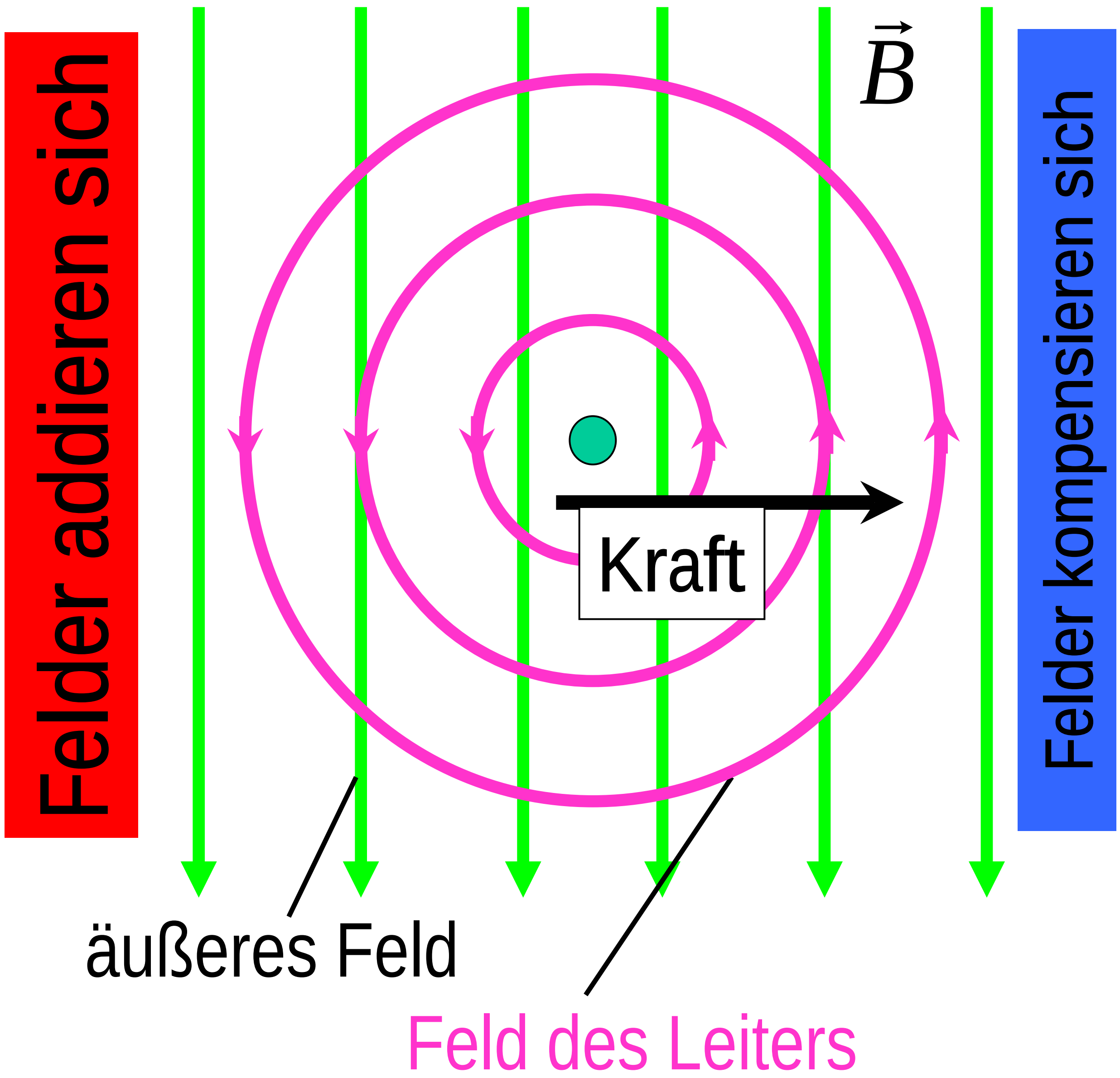

$\vec{F}$ Kraft
$\vec{B}$ Feld
I Stromrichtung
z
y
x

Um die Auslenkung der Leiterschaukel qualitativ zu erklären, machen wir uns zunächst die Abstoßung zweier Stabmagneten klar:



Abstoßung !!

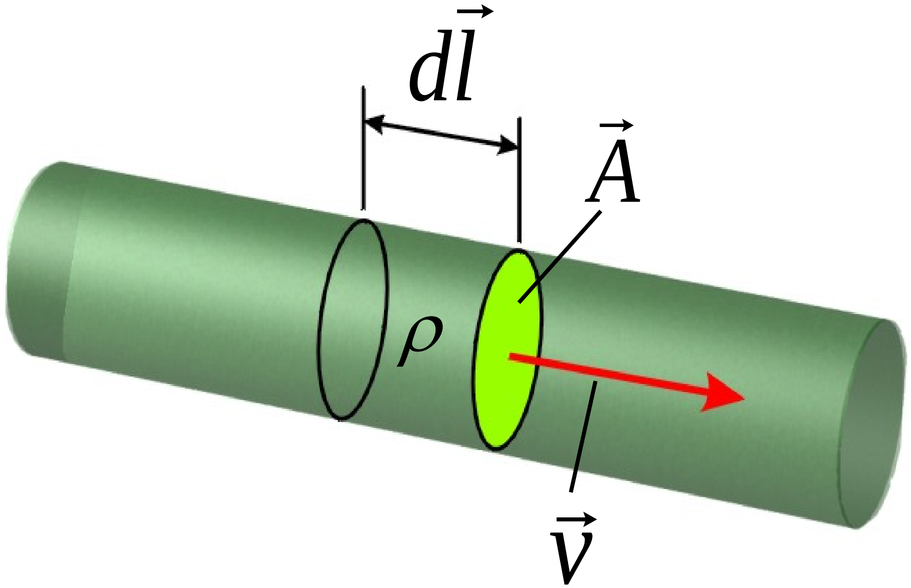
Qualitative Erklärung der Kraftwirkung auf die Leiterschaukel:



Auf der linken Seite addieren sich die Felder, und auf der rechten Seite kompensieren sie sich.

Der Leiter weicht in diesem inhomogenen Magnetfeld in die Richtung mit dem kleineren Feld aus.
$\Rightarrow$ Die Kraft weist nach rechts.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass diese Kraftwirkung äquivalent zur Lorentz-Kraft auf eine einzelne Ladung ist. Wir betrachten die folgende Situation in einem Leiter-stück der Länge $d\vec{l}$:



Es ist dann:

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

Wir hatten bereits für den Strom die Formel

$$I = \rho\,|\vec{v}\,\|\,\vec{A}| = \rho v A$$

hergeleitet. Die Ladungsdichte ρ und die Geschwindigkeit v der Ladungen lassen sich ausdrücken durch:

$$\rho = \frac{dQ}{Adl} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

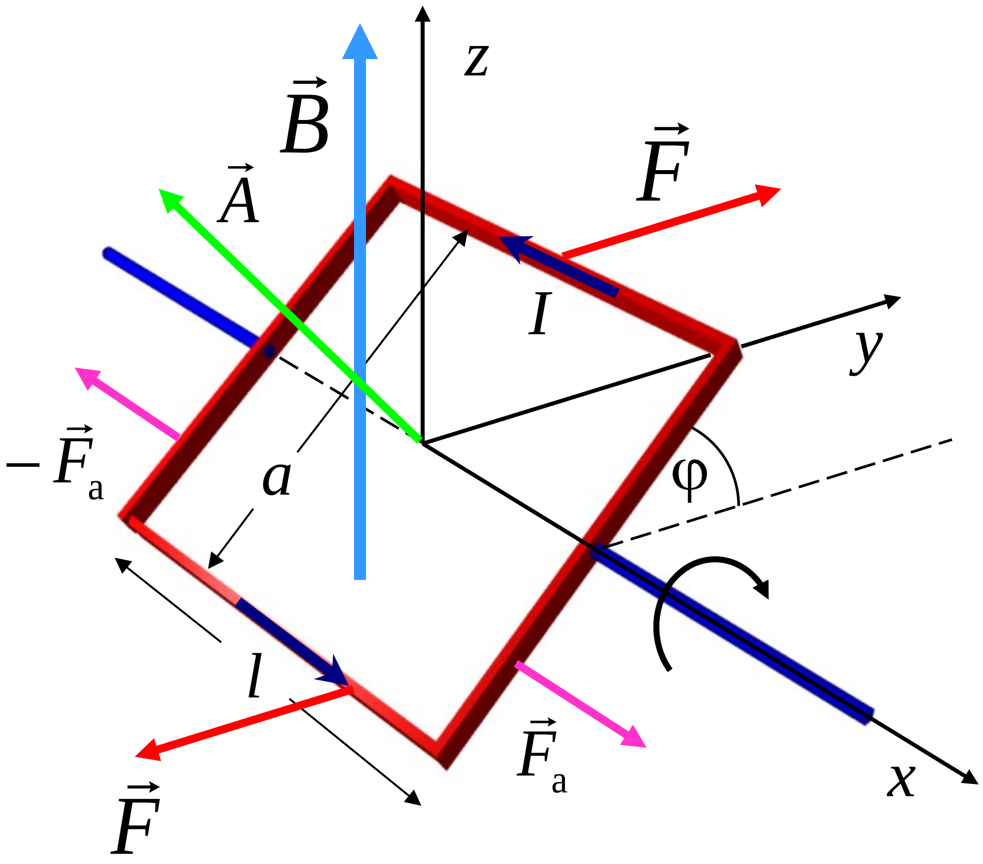
Einsetzen ergibt:

$$d\vec{F} = \rho v A d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{dQ}{Adl}\frac{dl}{dt} d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= dQ\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = dQ\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Dies ist der Ausdruck für die Lorentz-Kraft auf eine Ladung dQ.

Das magnetische Moment



Eine von einem Strom *I* durchflossene rechteckige Leiterschleife mit den Kantenlängen *a* und *l* befindet sich um die *x*-Achse drehbar in einem homogenen Magnetfeld *B*.

Die parallel zur *x*-Achse wirkenden Kräfte F_a heben sich gegenseitig auf. Dagegen erzeugen die Kräfte *F* auf die Seiten *l* ein Drehmoment um die *x*-Achse der Stärke

$$\vec{M} = 2\left(\left|\vec{F}\right| \frac{a}{2} \sin\varphi \right) \vec{e}_x = a\left|\vec{F}\right| \sin\varphi\, \vec{e}_x$$

Die Kraft auf die Leiterseiten ist

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} = I\,l\,B_z\,\vec{e}_y$$

wobei:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

Dann wird das Drehmoment:

$$\vec{M} = I\,\underbrace{a\,l}_{=A}\,B_z \sin\varphi\,\vec{e}_x$$

Es wird wieder eine Flächennormale $\vec{A}$ definiert, deren Betrag

$$\left|\vec{A}\right| = a\,l$$

beträgt. Dann kann das Drehmoment auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\vec{M} = I\,\vec{A} \times \vec{B}$$

Diese Beziehung gilt ganz allgemein für beliebig geformte Leiterschleifen.

Man ordnet einer Leiterschleife, durch die der Strom I fließt und die die Fläche $\vec{A}$ umschließt, das *magnetische Moment* $\vec{m}$ zu, mit:

$$\boxed{\vec{m} = I\,\vec{A}}$$

Damit ergibt sich für das auf eine Leiterschleife wirkende Drehmoment:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

Die Analogie zum wirkenden Drehmoment auf einen elektrischen Dipol ist zu erkennen. Es war:

$$\vec{M}_{\text{Dipol}} = \vec{p} \times \vec{E}$$

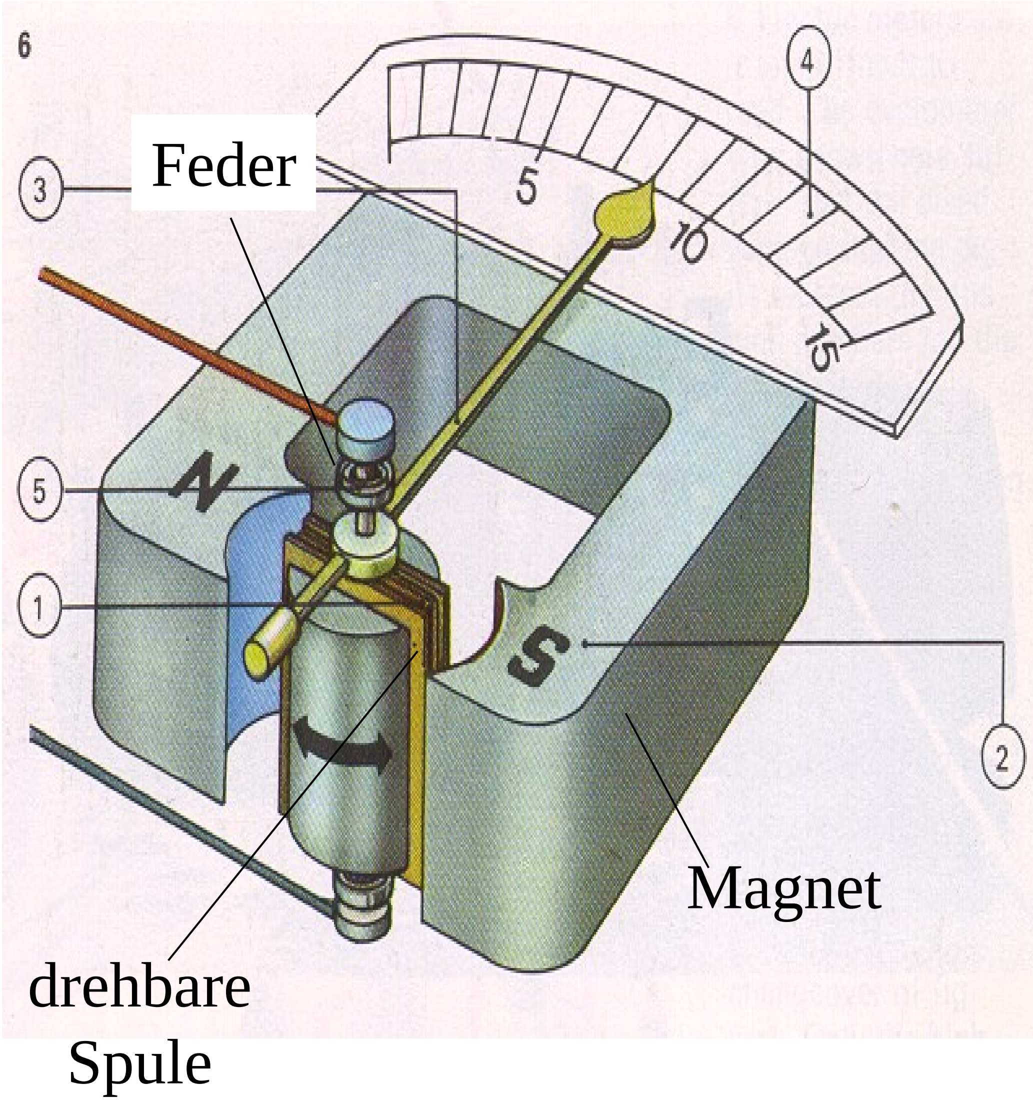
Das magnetische Moment ist also die zum elektrischen Dipolmoment äquivalente Größe.
Eine stromdurchflossene Leiterschleife richtet sich im Magnetfeld immer so aus, daß ihre Flächennormale parallel zum Magnetfeld steht.

Wenn die Leiterschleife ausgerichtet ist, dann verschwindet das Drehmoment, und es gibt auch keine resultierenden Kräfte auf die Gesamtschleife. Dies gilt sofern das Magnetfeld homogen ist, d.h.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 = \text{const.}$$

In einem *inhomogenen* Magnetfeld würde aber eine Kraft auf die stromdurchflossene Leiterschleife wirken. Dies ist analog zum elektrischen Dipol im inhomogenen elektrischen Feld ($\Rightarrow$ siehe Kapitel 4.2.12).

Beispiel 1: Prinzip des Ampèremeters



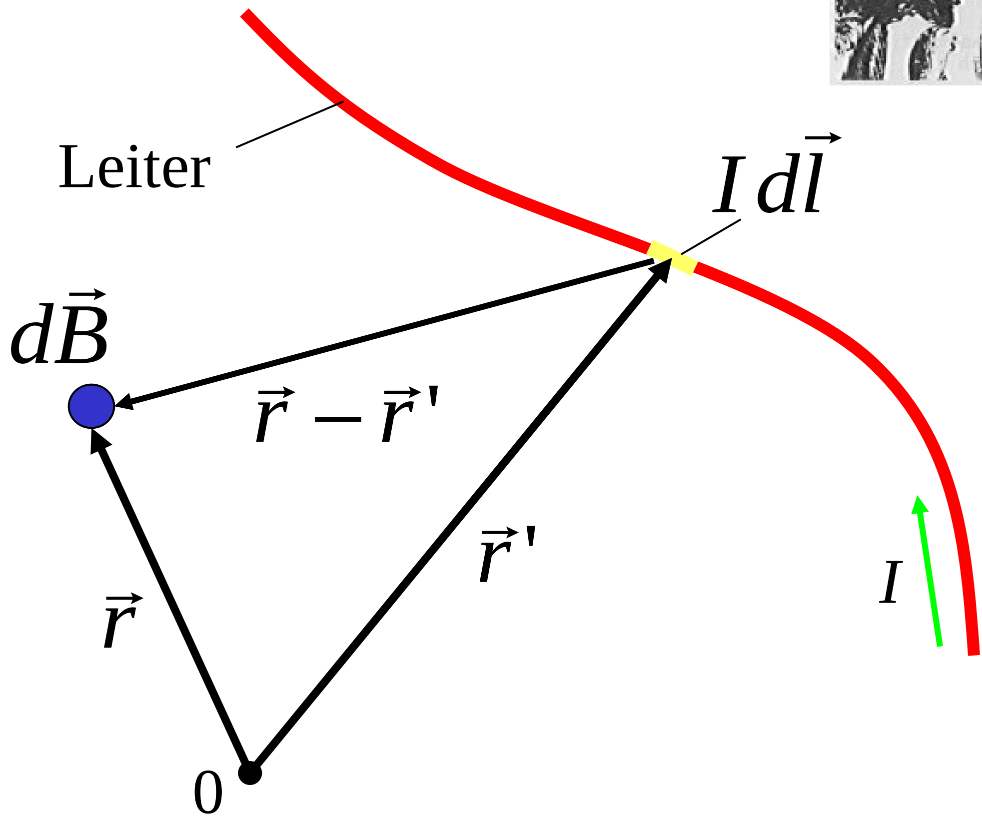
Jean Baptiste Biot
(1774-1862)

Das Biot-Savart'sche Gesetz

Das elektrostatische Feld konnte mit dem Superpositionsprinzip für jede beliebige Ladungsverteilung berechnet werden. Da es keine magnetischen Ladungen gibt, ist es recht schwierig, das statische Magnetfeld für eine beliebige Stromverteilung zu bestimmen.

Wir betrachten jetzt ein von einem Strom I durchflossenes Leiterelement $d\vec{l}$, dass sich am Ort $\vec{r}\,'$ befindet und am Ort $\vec{r}$ das Magnetfeld $d\vec{B}$ erzeugt.

Das *Biot-Savart'sche Gesetz* besagt, dass sich für $d\vec{B}$ das Folgende ergibt:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Das Feld eines stromdurchflossenen Leiters ist dann gegeben durch:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

Dabei ist das Integral entlang der Linie des Verlaufes des Leiters zu berechnen.

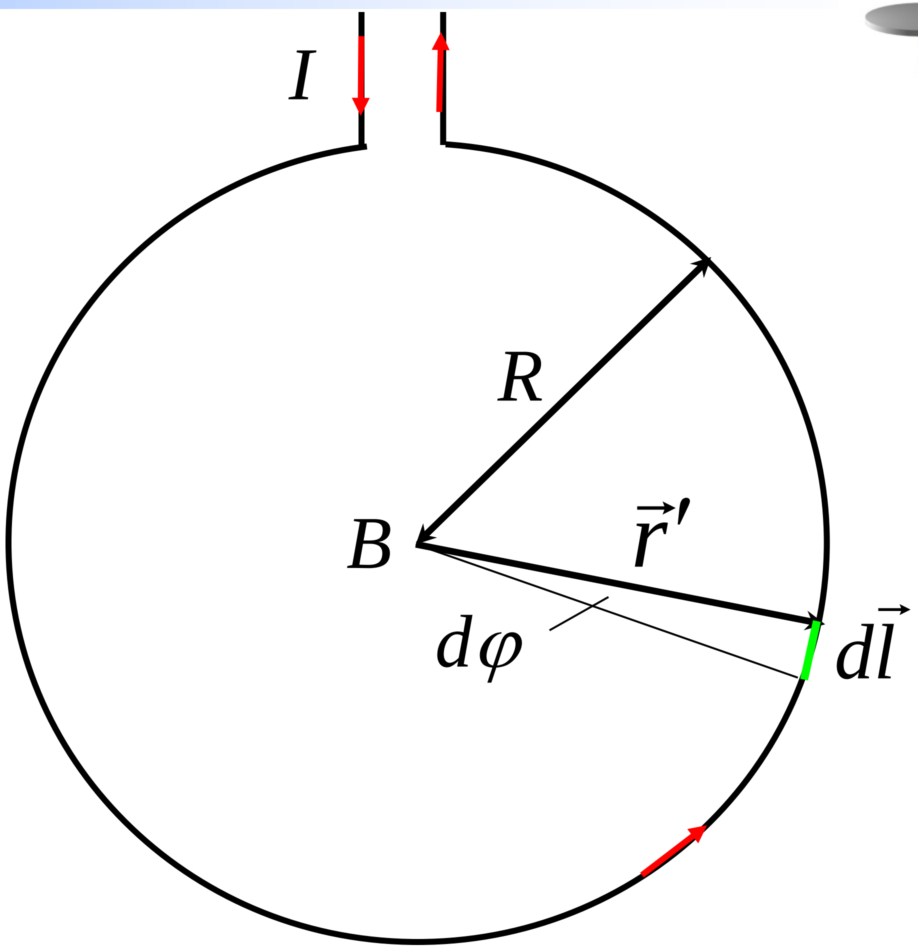
Beispiel 1: Das magnetische Feld im Zentrum einer kreisförmigen Leiterschleife.

Aus der Abbildung liest man ab:

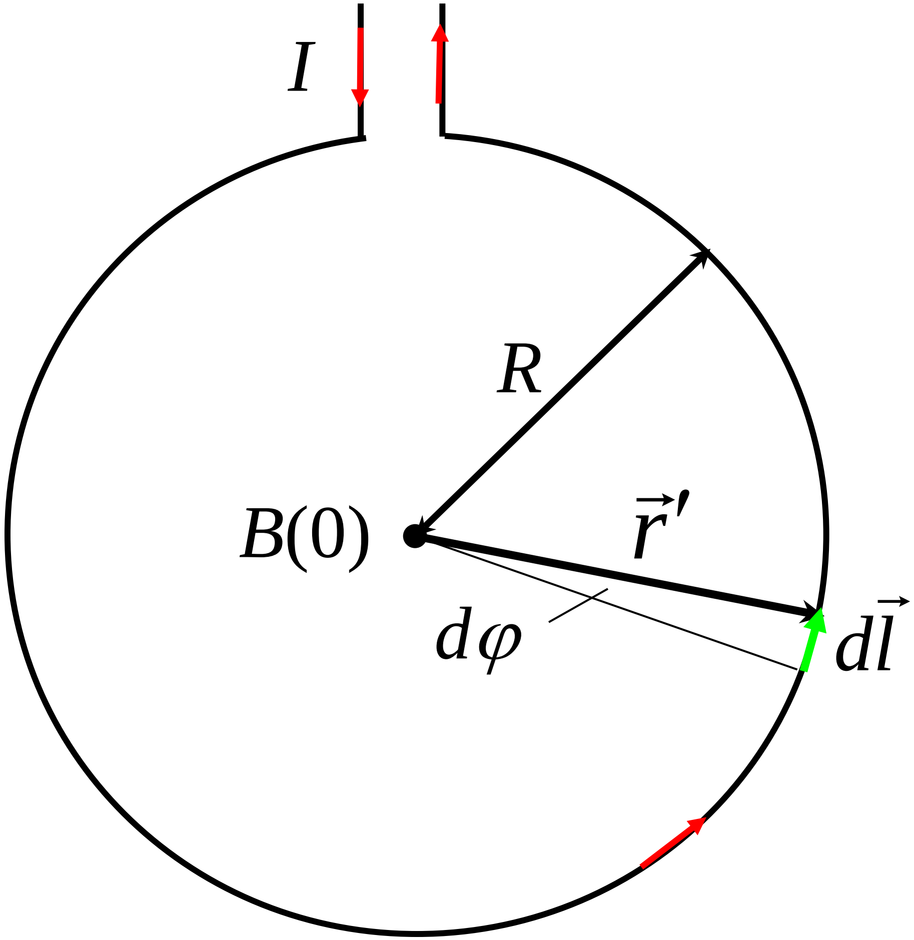
$$\vec{r} = \vec{0}, \; |\vec{r} - \vec{r}\,'| = R$$

$$d\vec{l} \perp \vec{r}\,'$$

Mit dem Biot-Savart Gesetz ergibt sich dann am Ort $\vec{r} = \vec{0}$:



$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|^3}$$



Aus der Zeichnung ergibt sich weiterhin:

$$\left|d\vec{l}\right| = Rd\varphi \quad \left|\vec{r}'\right| = R$$

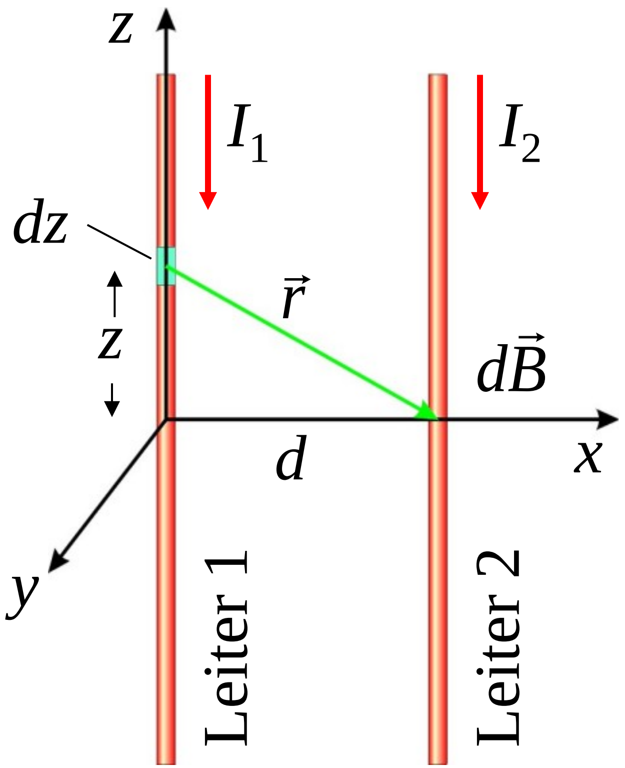
$$\Rightarrow d\vec{l} \times \vec{r}' = Rd\varphi R\,\vec{e}_\perp$$

Der Vektor $\vec{e}_\perp$ steht hierbei senkrecht auf der Leiterschleife. Einsetzen ergibt:

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_\perp \int_0^{2\pi} \frac{Rd\varphi R}{R^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\vec{e}_\perp \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_\perp$$

Es soll jetzt die Kraft zwischen zwei parallelen, unendlich langen Leitern berechnet werden.



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = \sqrt{d^2 + z^2}$$

Das vom Leiter 1 am Leiter 2 erzeugte Magnetfeld ist:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Es ist:

$$d\vec{l}_1 \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -dz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -d \cdot dz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$d\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ dB_{\mathrm{y}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit: $dB_{\mathrm{y}} = -\frac{\mu_0 I_1 d}{4\pi} \frac{dz}{\left(d^2 + z^2\right)^{3/2}}$

Der gesamte Leiter 1 erzeugt also am Ort des Leiters 2 das Feld:

$$B_y = -\frac{\mu_0 I_1 d}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\left(d^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 d}{4\pi} \frac{2}{d^2}$$

Vektoriell geschrieben: $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Kraft auf das Element $d\vec{l}_2$ des Leiters 2 ist:

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad d\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -dz \end{pmatrix}$$

Einsetzen des Magnetfeldes ergibt:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \begin{pmatrix} dz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Kraft pro Längeneinheit ist dann:

$$\boxed{\frac{dF}{dz} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}}$$

Zahlenwerte:

$$I_1 = I_2 = 1\mathrm{A}, \quad d = 1\mathrm{m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

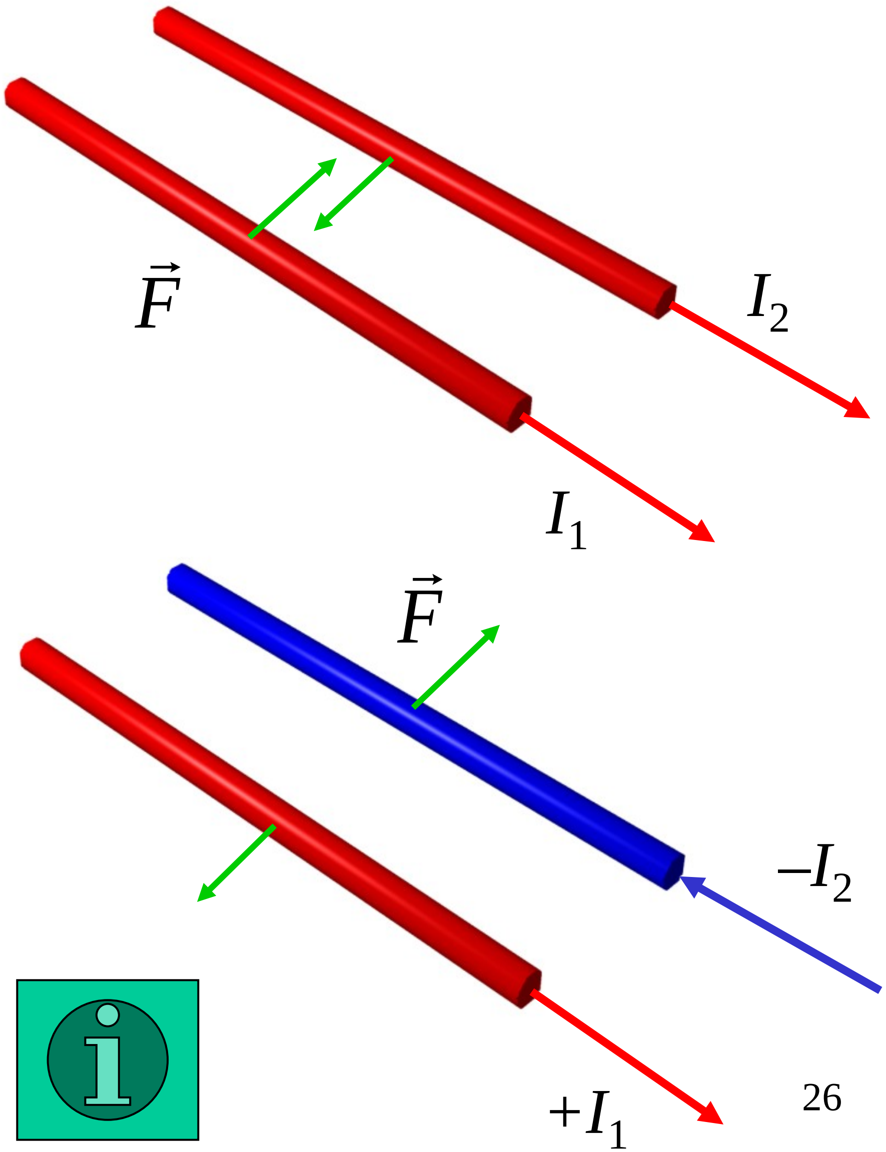
$$\frac{dF}{dz} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{m}} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Damit ist die Definition der Stromstärke gegeben:

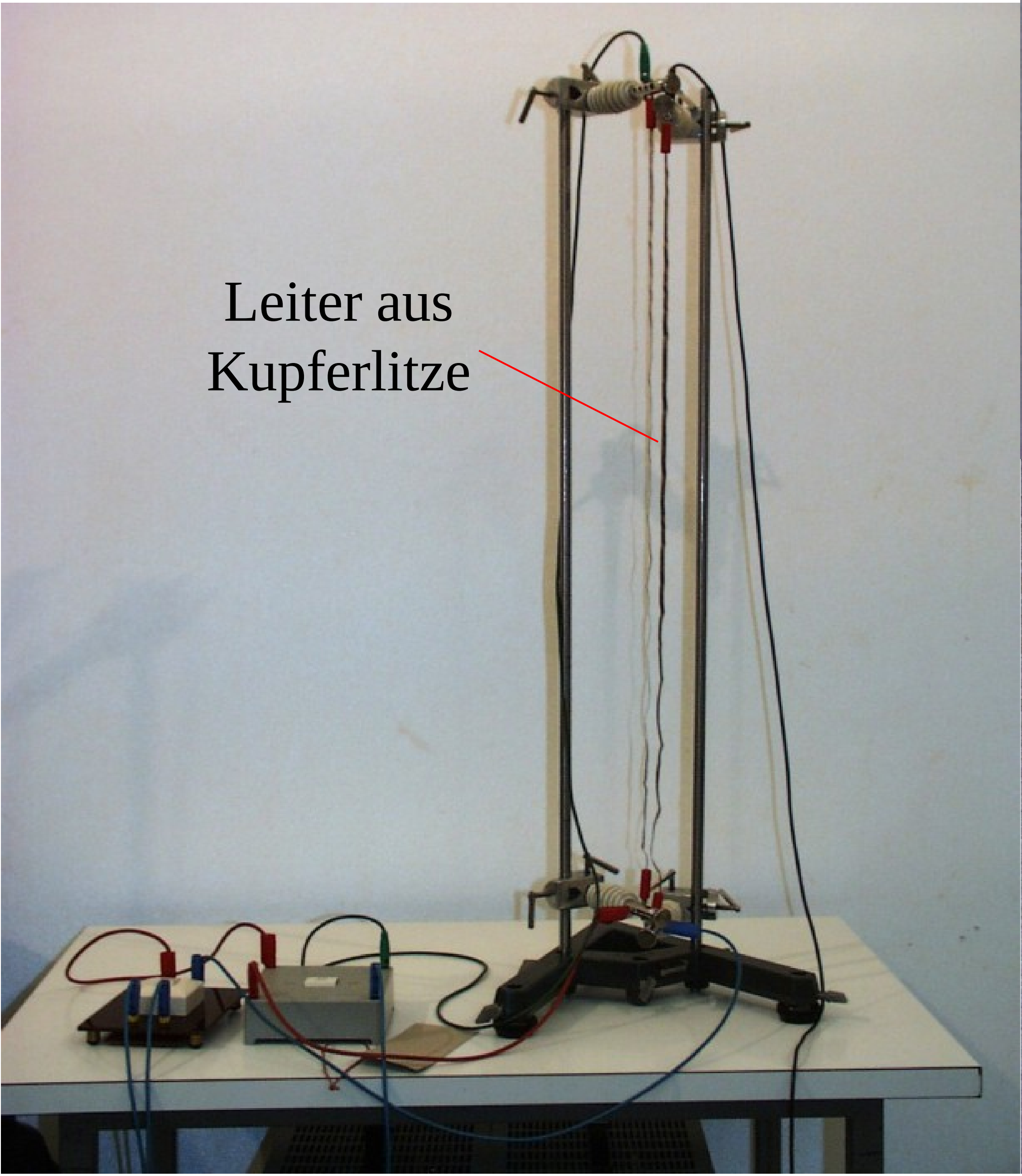
Definition der Stromstärke 1 A:
Wenn zwei parallele Leiter im Abstand von $d = 1$m von je 1A durchflossen werden, wirkt eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton pro Meter Länge.

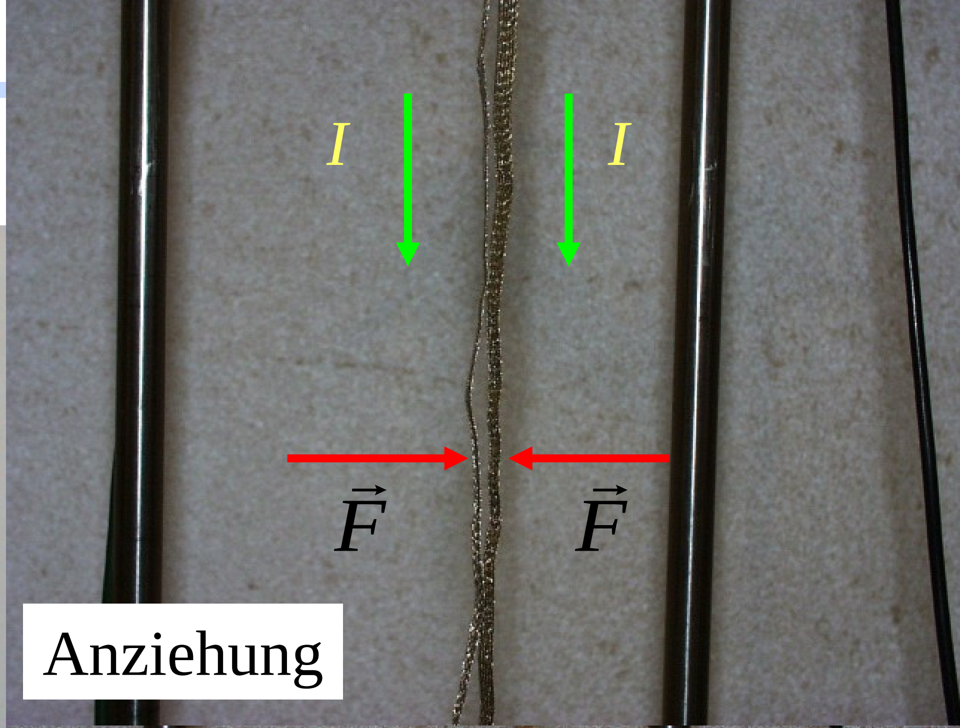
Ältere Definition der Stromstärke 1 A:
Pro Sekunde wird 1.118 mg Silber aus wässriger Lösung ausgeschieden, wenn ein Strom von 1A fließt.

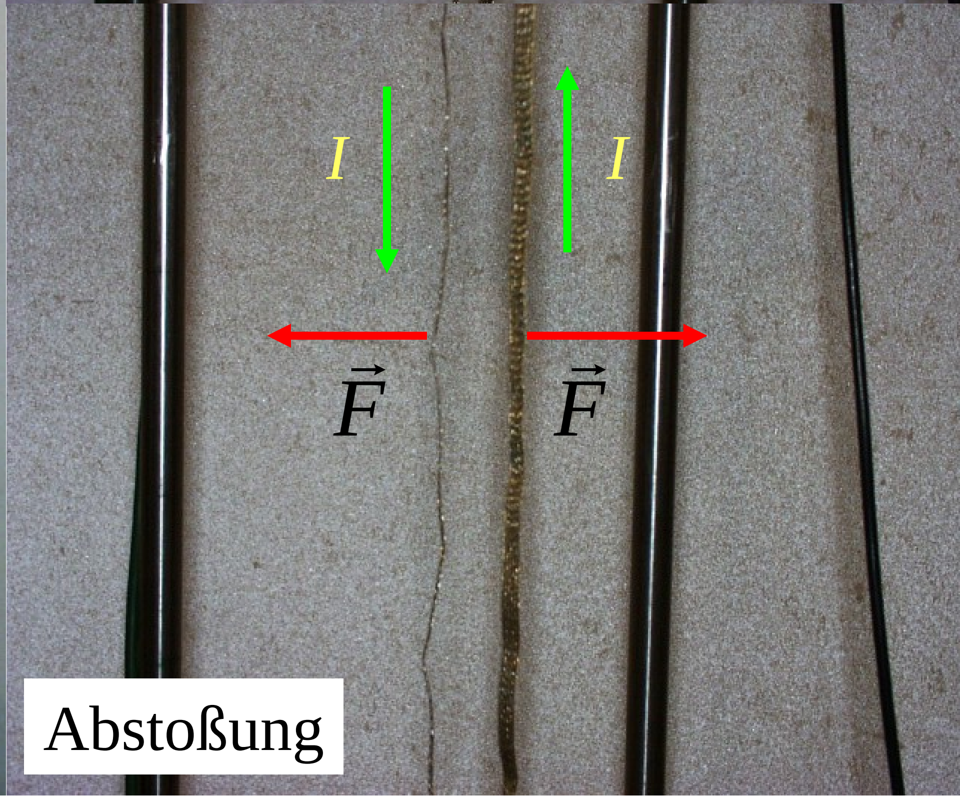
Die Richtung der Kraft hängt von der Stromrichtung ab:



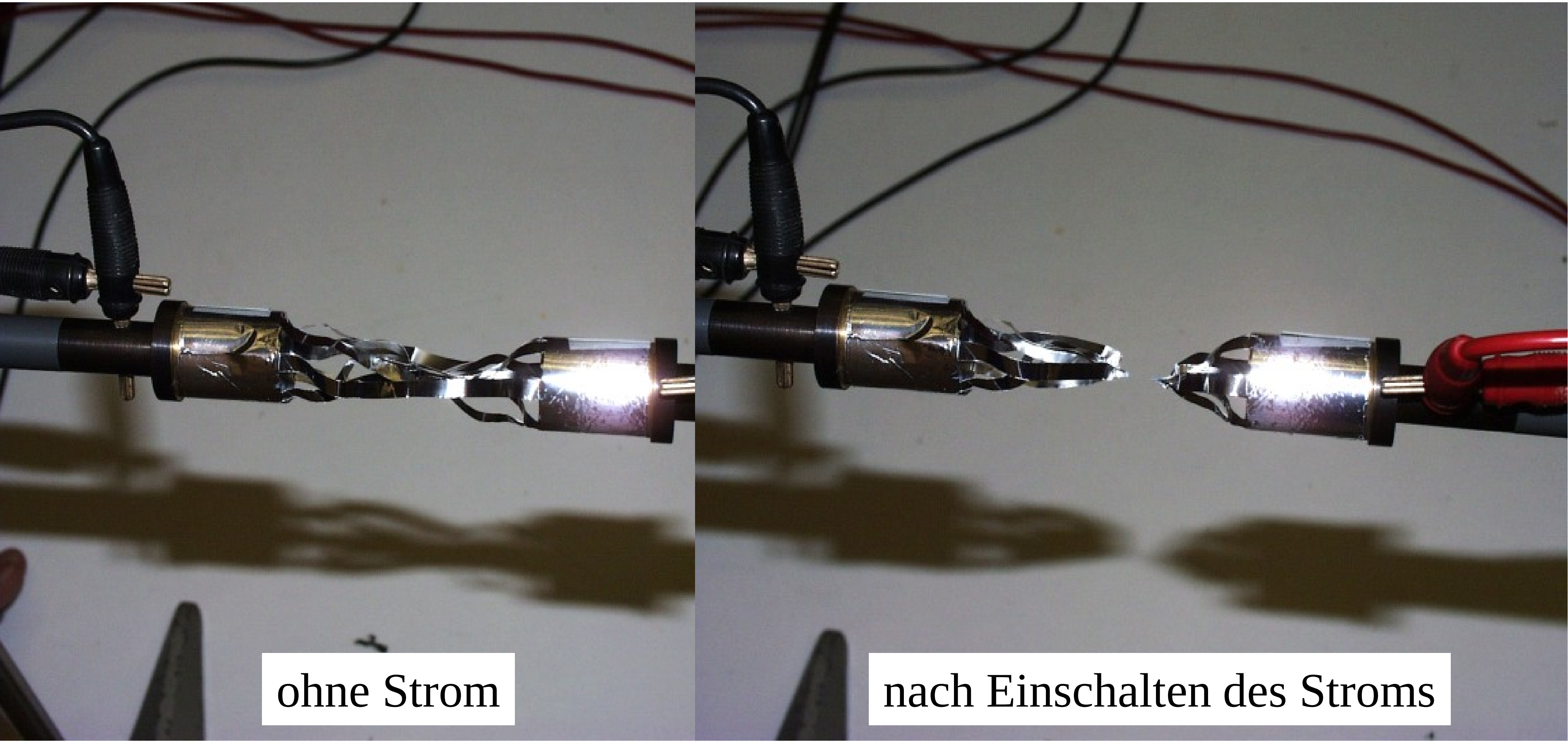
Versuch: Kraft zwischen zwei Leitern







Versuch: Der Pinch-Effekt



Ein aus mehreren dünnen parallelen Metallfolien gebildeter Leiter schnürt sich nach Einschalten des Stroms ein, bis er wegen Überhitzung schmilzt.

Die Maxwell-Gleichungen für das statische Magnetfeld

$$\text{(ii)} \quad \oiint_O \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\text{(iv)} \quad \oint_{\partial A} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$