Inhalt der Vorlesung B2

3. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

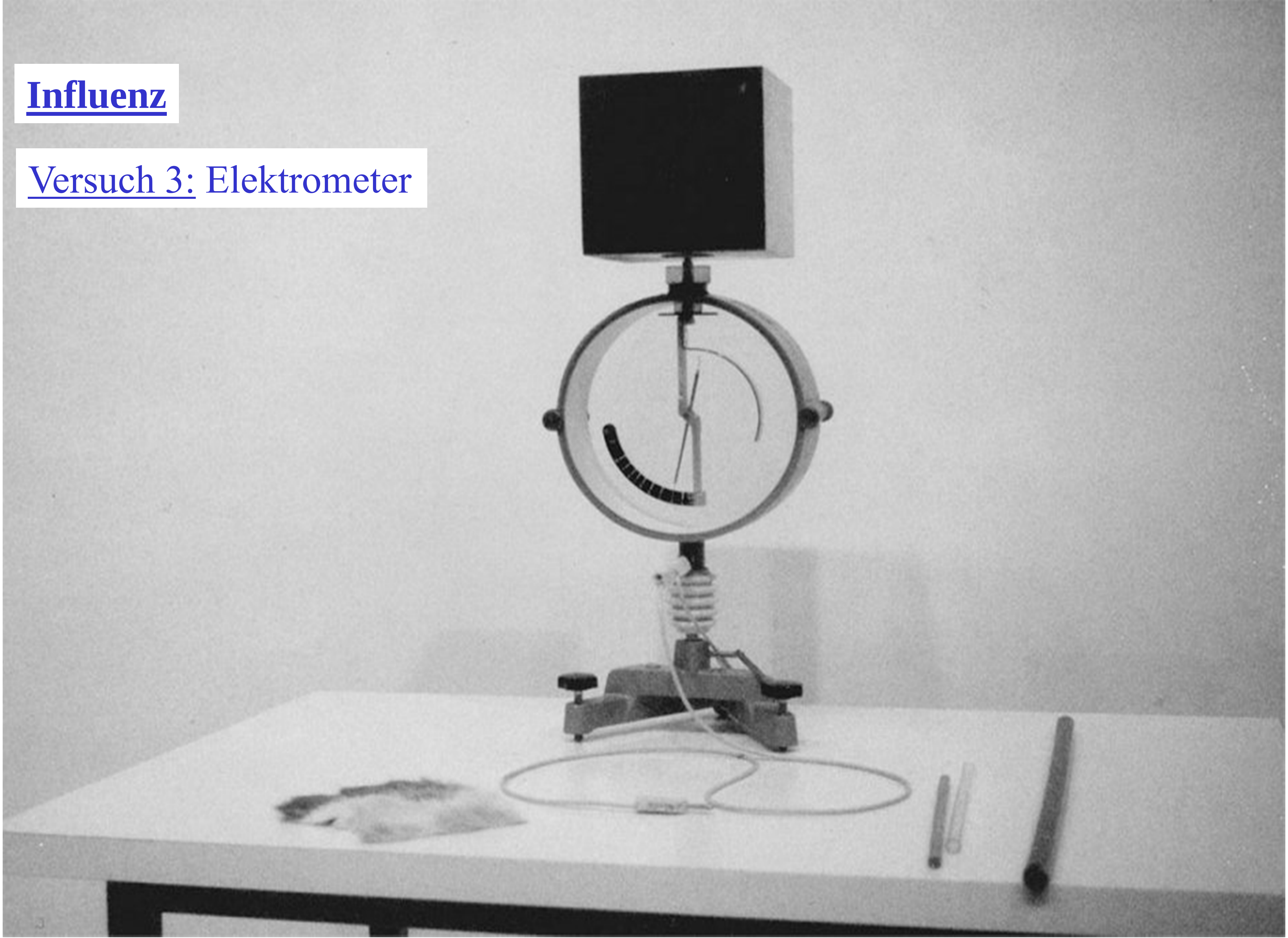
Einleitung
Ladungen & Elektrostatische Felder
Elektrischer Strom
Magnetostatik
Zeitlich veränderliche Felder - Elektrodynamik
Wechselstromnetzwerke
Die Maxwell'schen Gleichungen
Elektromagnetische Wellen & Strahlung
Relativität der Felder

4. Optik

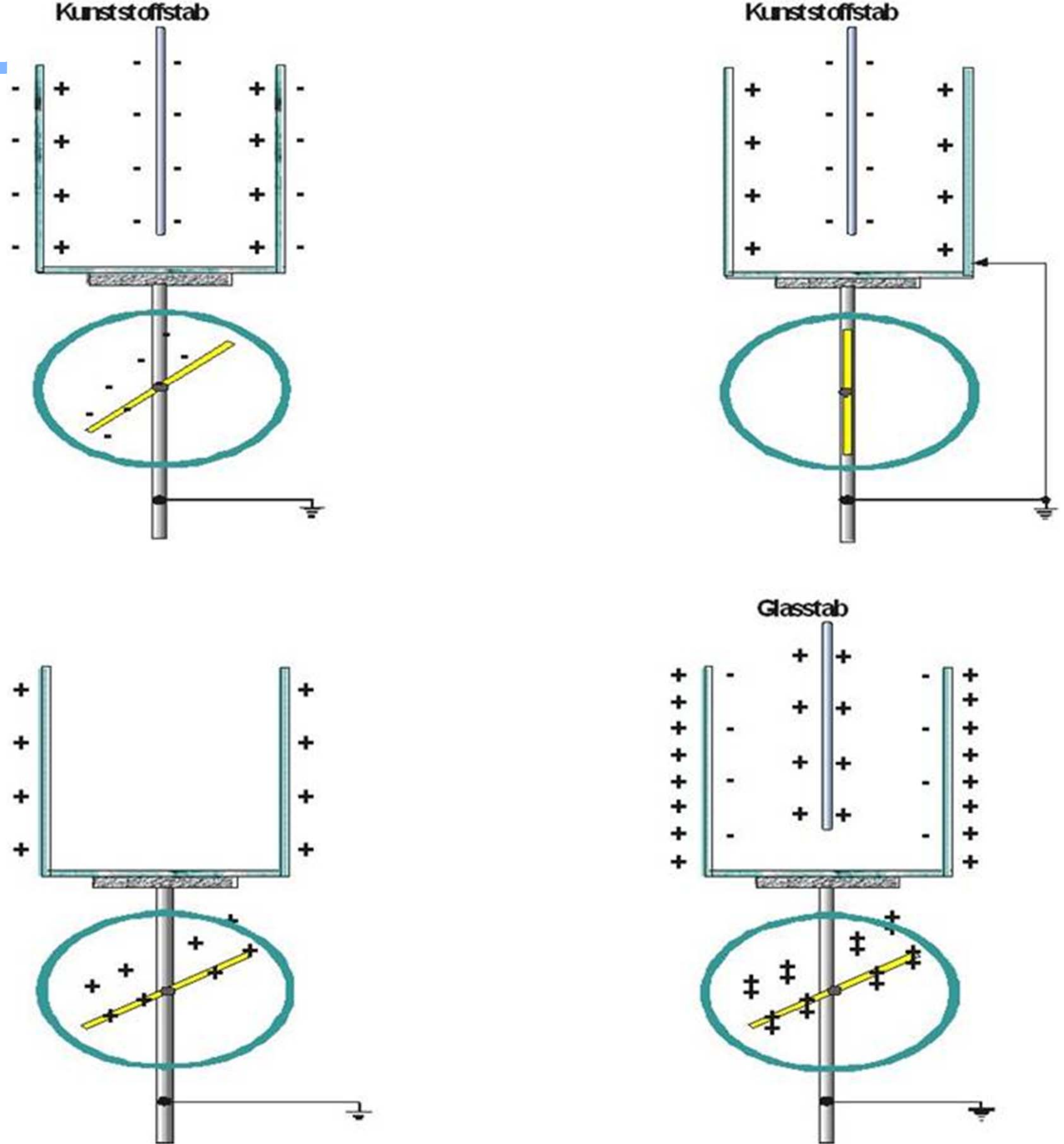
Licht als elektromagnetische Welle
Geometrische Optik
Optische Abbildungen
Wellenoptik

Influenz

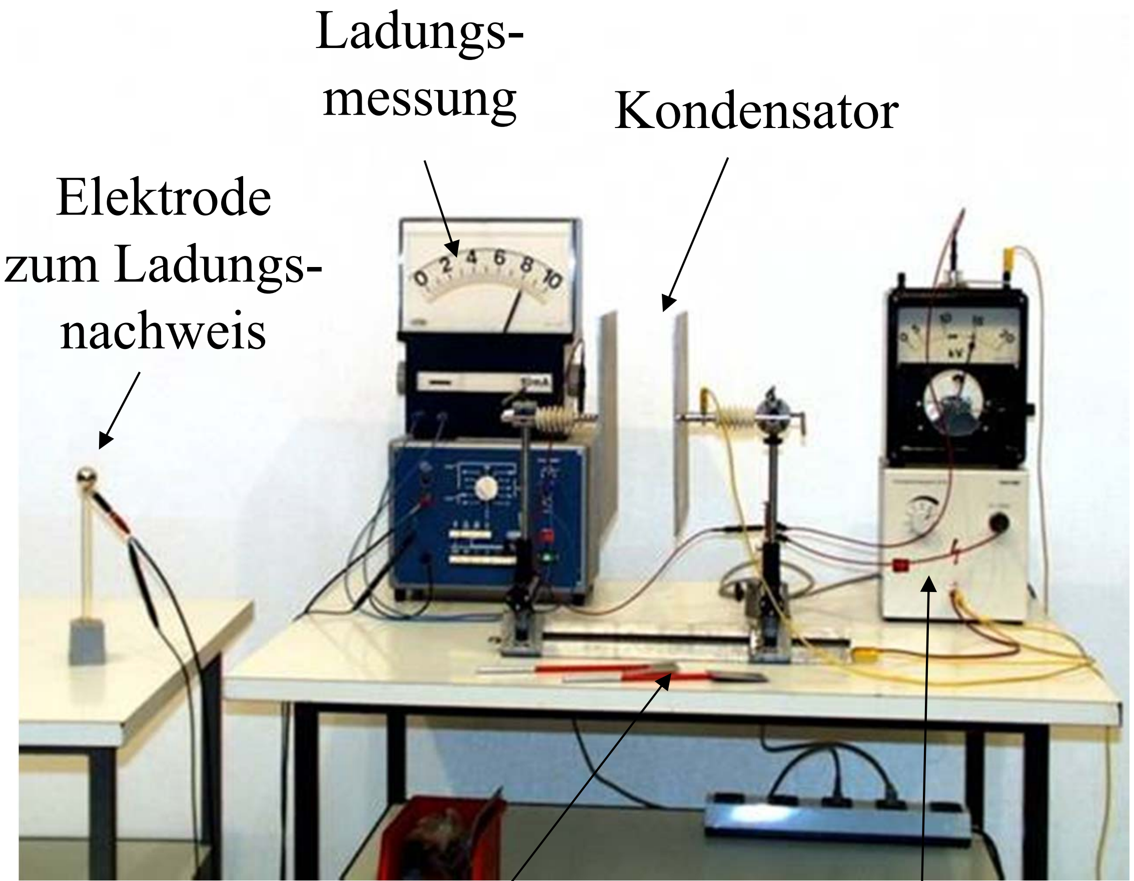
Versuch 3: Elektrometer

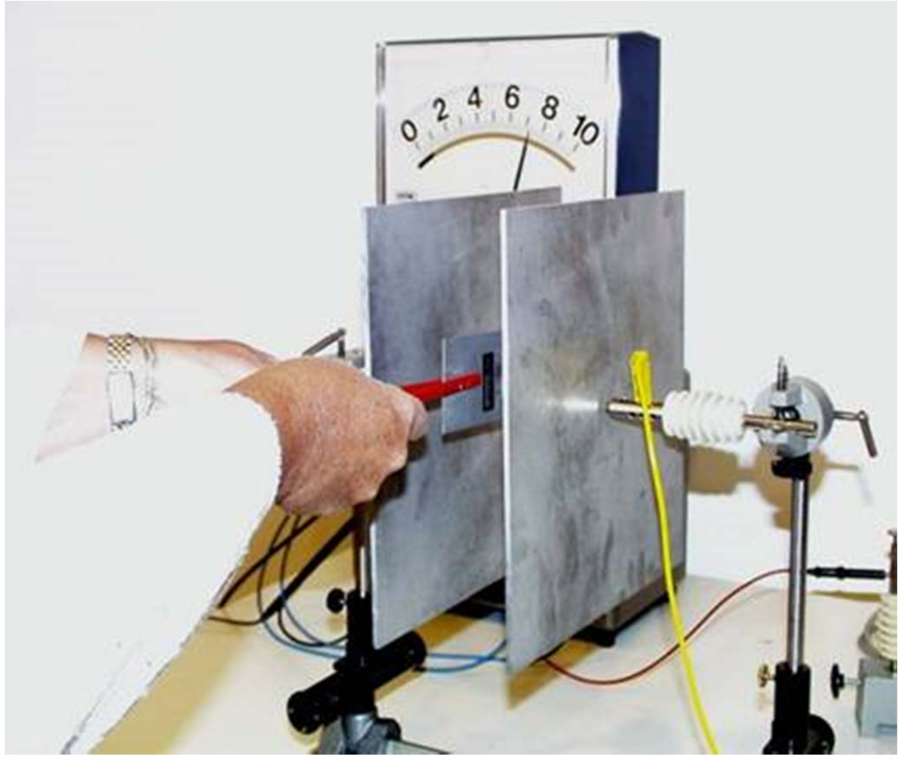


Erklärung des Versuches:



Versuch 6: Leitende Kugeln im Feld

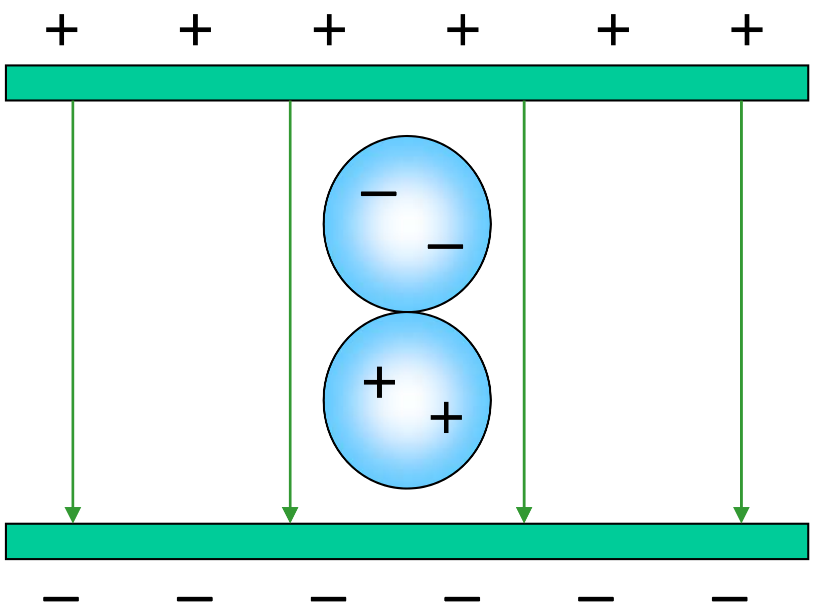




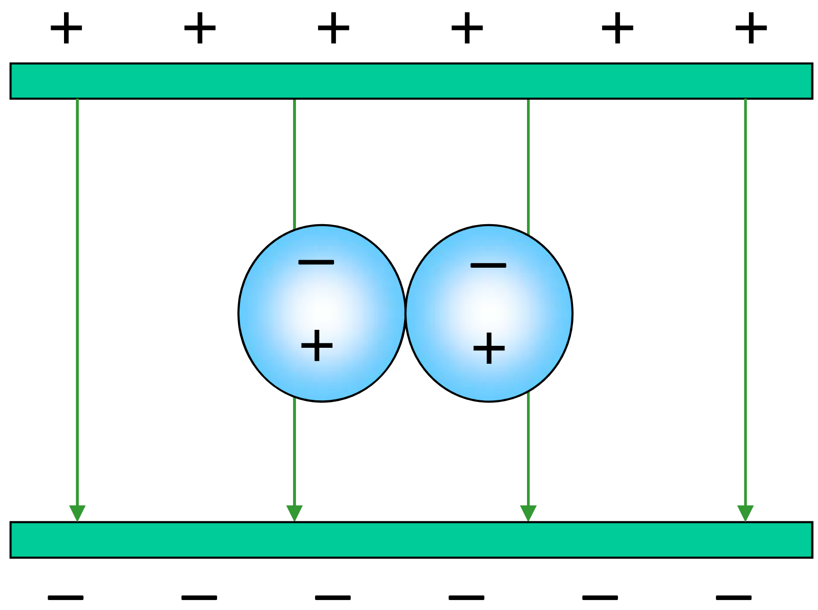
Die elektrisch neutralen Löffel werden zusammengedrückt in das elektrische Feld geführt. Dann werden sie getrennt und aus dem Feld genommen. Danach tragen sie jeweils eine Ladung mit unterschiedlichem Vorzeichen.

Erklärung:

Wenn man leitende Kugeln in ein elektrisches Feld bringt, verschieben sich die in ihnen frei beweglichen Ladungen aufgrund der Influenz.



Nach der Trennung im Feld sind die Kugeln elektrisch geladen.



Wenn die Kugeln parallel zu den Platten ins Feld gebracht werden, dann werden die Ladungen auf jeder einzelnen aufgrund der Influenz verschoben. Nach der Trennung und dem Entfernen aus dem Feld gleichen sich die Ladungen aber wieder aus, und die Kugln sind ungeladen.

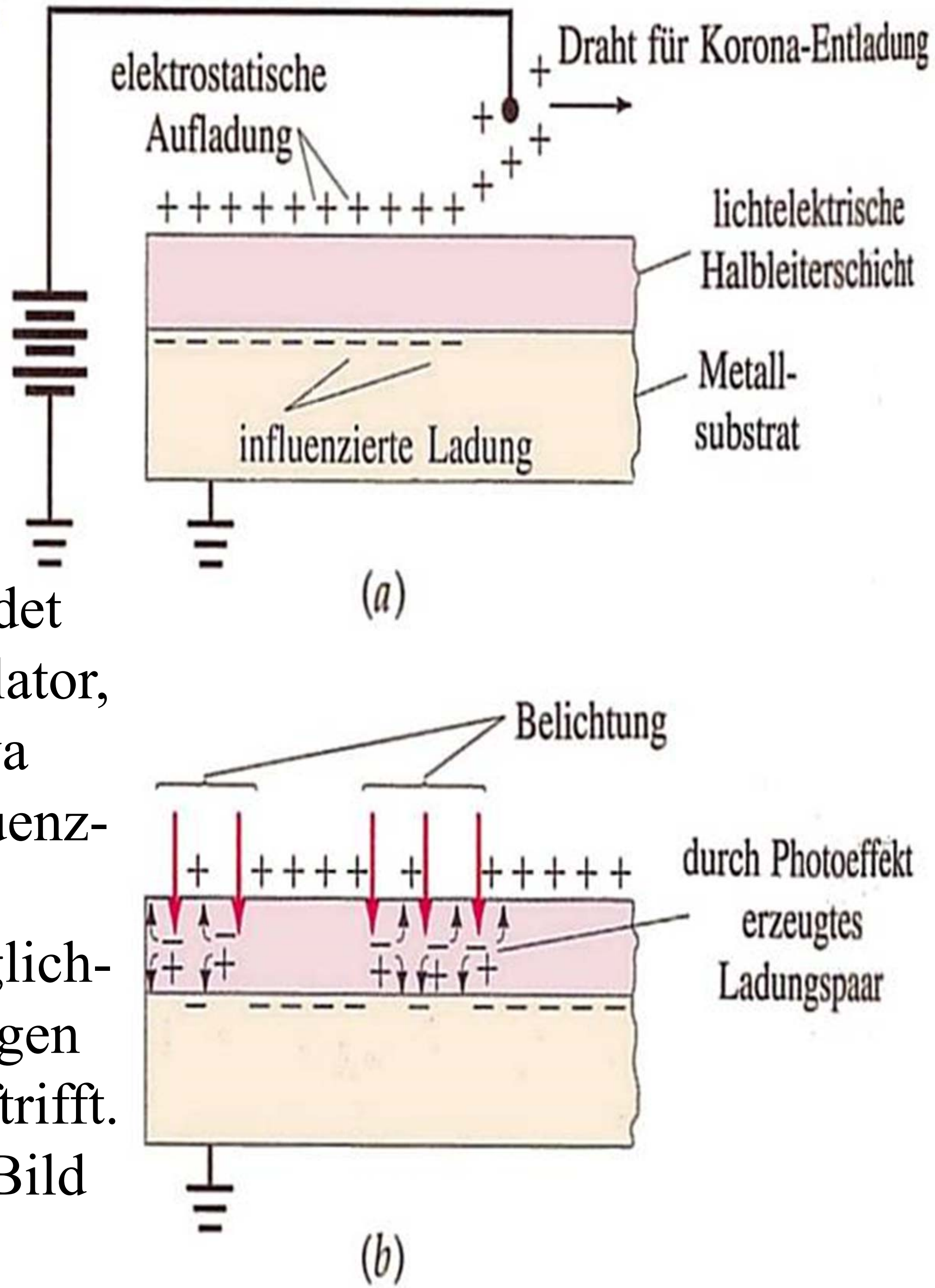
Versuch 8: Prinzip des Fotokopierers

Funktionsweise eines Fotokopierers:
(erfunden 1937 von Chester Charlton „Xerographie“ = trockenes Schreiben)

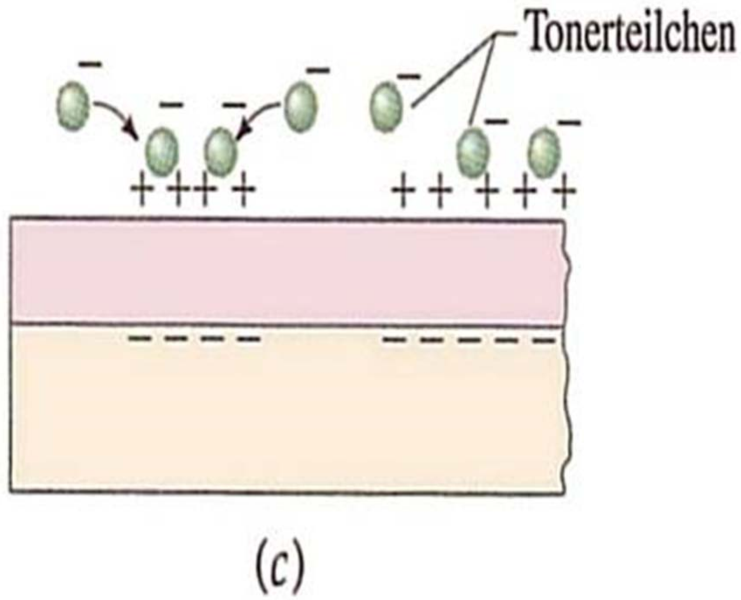
Der Kopiervorgang läßt sich in vier Schritte zerlegen:

(a) Elektrostatische Aufladung eines lichtempfindlichen Halbleiters, der sich auf einem Metallsubstrat befindet (lichtempfindlicher HL: dunkel-Isolator, hell-Leiter). Die Platte wird auf etwa 1000V aufgeladen ⇒ negative Influenzladung auf dem Metallsubstrat.

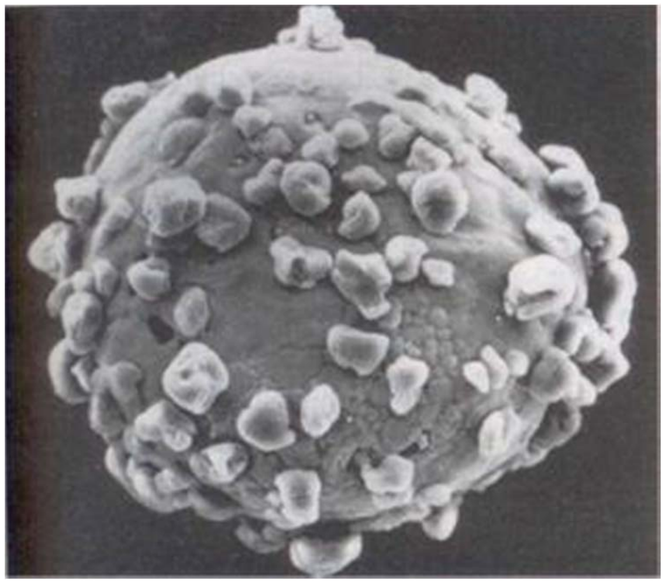
(b) Optische Belichtung führt zu beweglichen Ladungspaaren im HL ⇒ Ladungen neutralisieren sich wo das Licht auftrifft. optisches Bild ⇒ elektrostatisches Bild



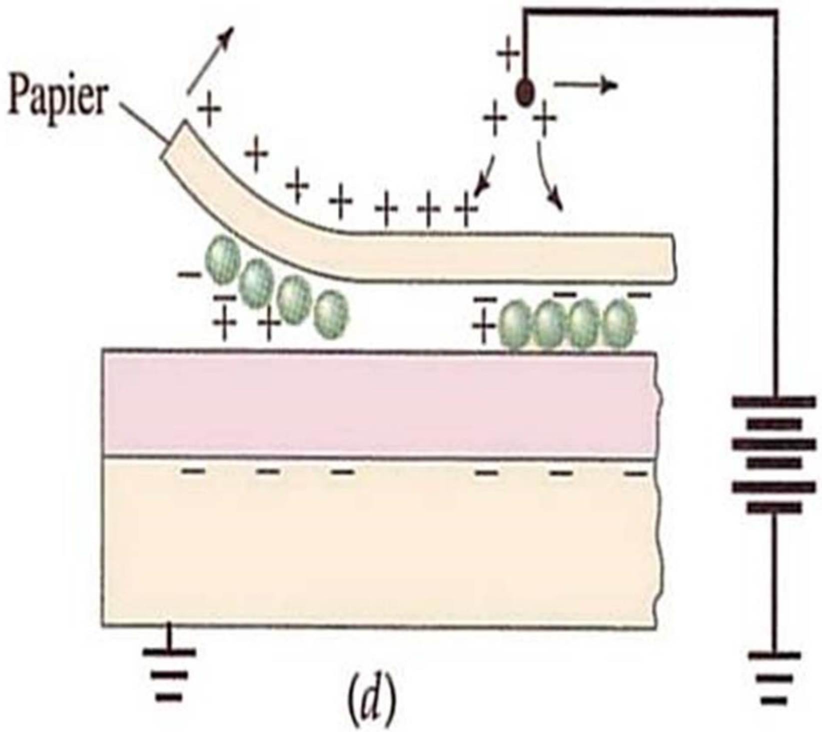
(c) Negativ geladene Tonerteilchen lagern sich an den Gebieten positiver Ladung an ⇒ „Tonerbild“



(d) Der Toner wird an ein positiv geladenes Blatt Papier weitergegeben. Kurzes Erhitzen verbindet den Toner mit dem Papier ⇒ Papierbild

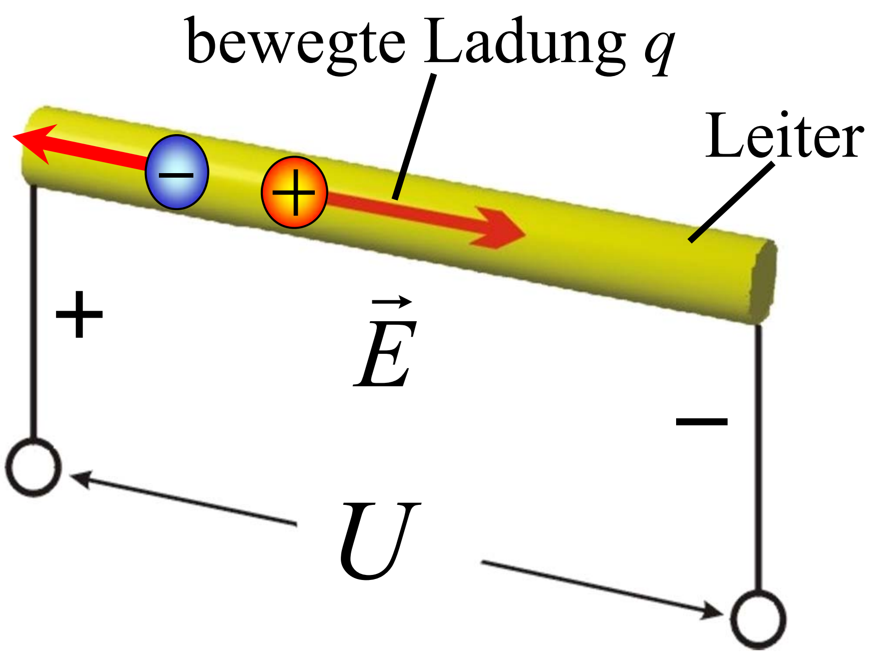


Elektronenmikroskopaufnahme von Tonerteilchen, die an einem größeren Teilchen „kleben“.



Fließende Ladungen in Leitern: Der elektrische Strom

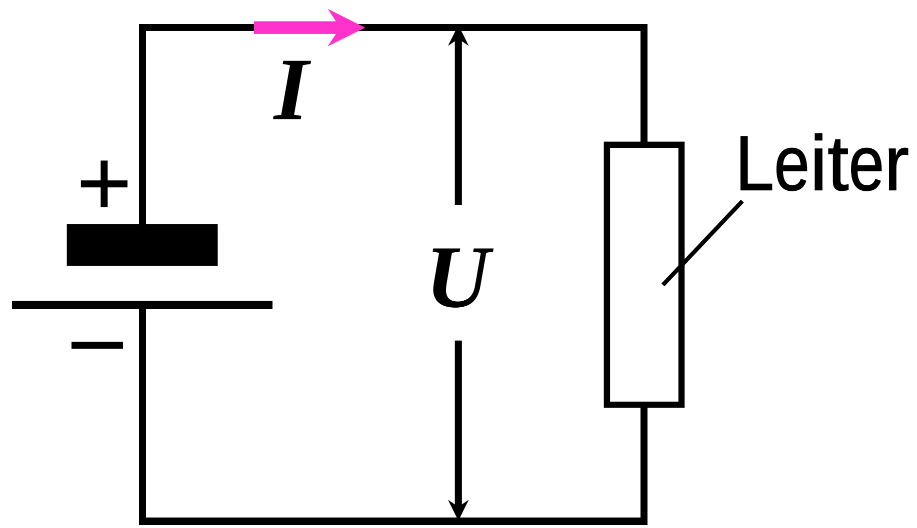
In einem Leiter sind die elektrischen Ladungen frei beweglich. Legt man an solch einen Leiter eine Potentialdifferenz (Spannung) ΔU dann geraten diese Ladungen in Bewegung. Es fließt ein *elektrischer Strom*.



Definition und Einheit des Stomes:

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad [I] = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{Ampere}$$

Häufig benutzt man ein idealisiertes Ersatzschaltbild für einen Stromkreis:

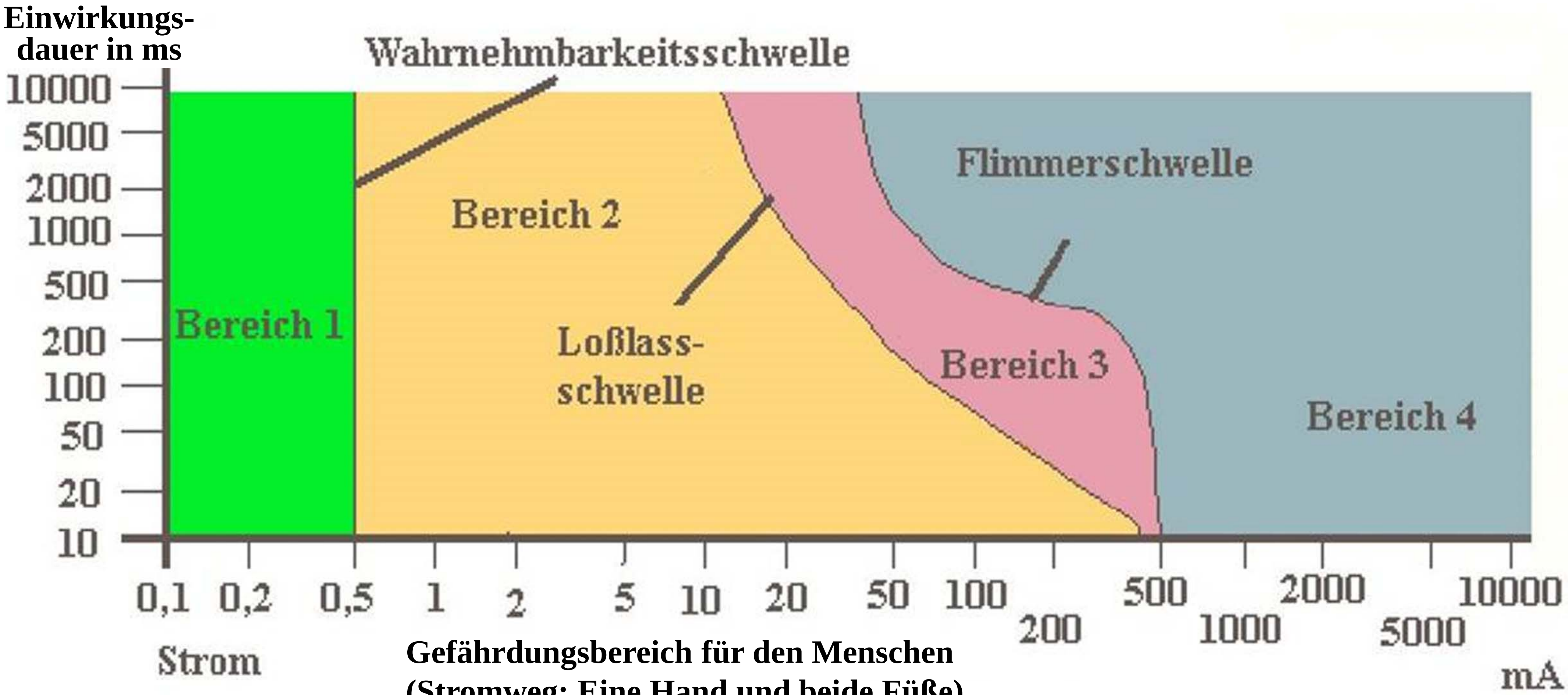


Spannungsquelle: $U = \text{const.}$

——— = verlustfreier Leiter

d.h. die Eigenschaften des Stromkreises werden nur durch den Leiter bestimmt.

Veranschaulichung von Stromstärken durch ihre Wirkung auf den Menschen:



Gefährdungsbereich für den Menschen (Stromweg: Eine Hand und beide Füße)

Bereich 1: Wechselströme in diesem Bereich werden von den meisten Menschen nicht wahrgenommen.

Bereich 2: Es ist ein Kribbeln zu spüren, auch schmerzhafte Verkrampfungen sind möglich. Direkte Schäden sind kaum zu befürchten.

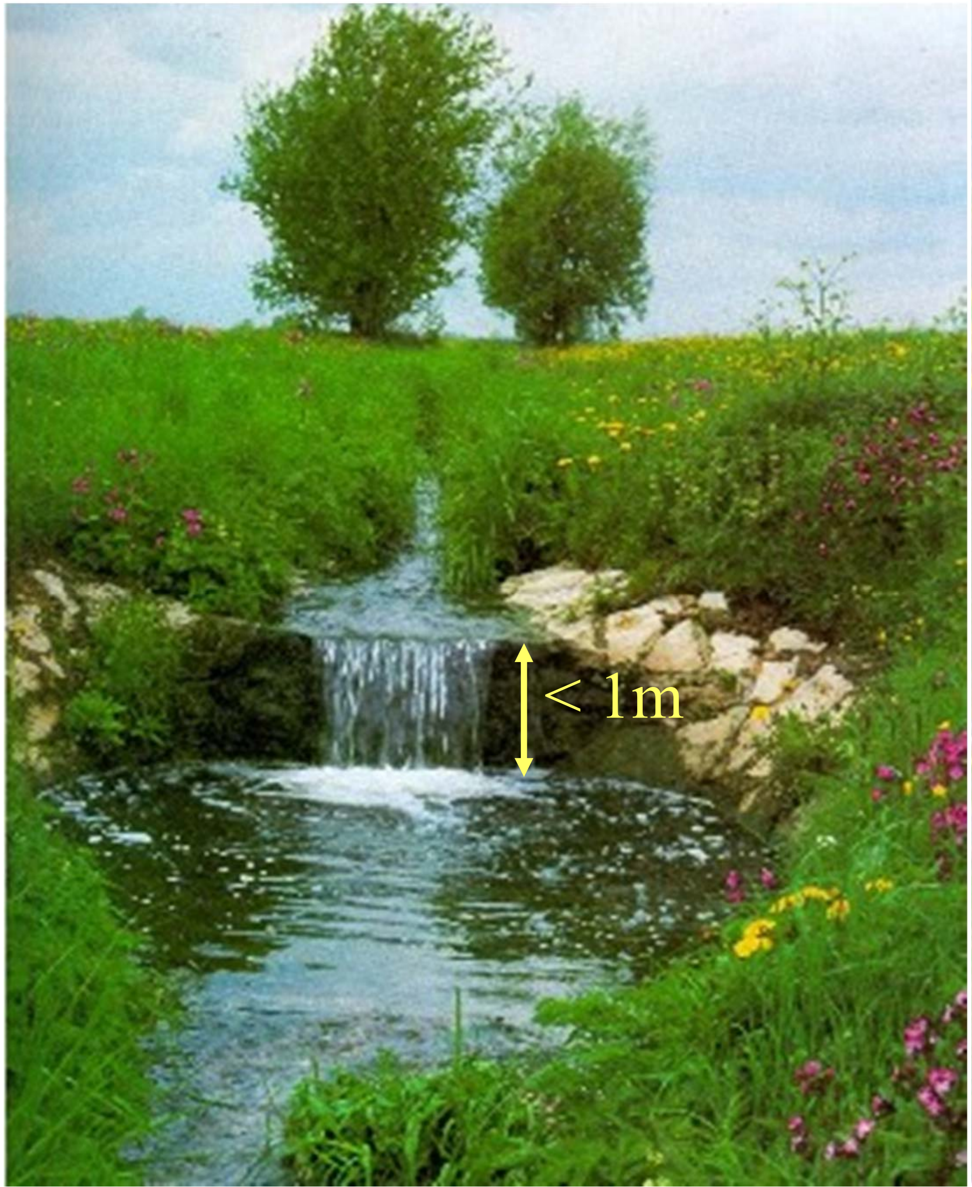
Bereich 3: Die Stromquelle kann auf Grund von Muskelverkrampfung nicht mehr losgelassen werden.

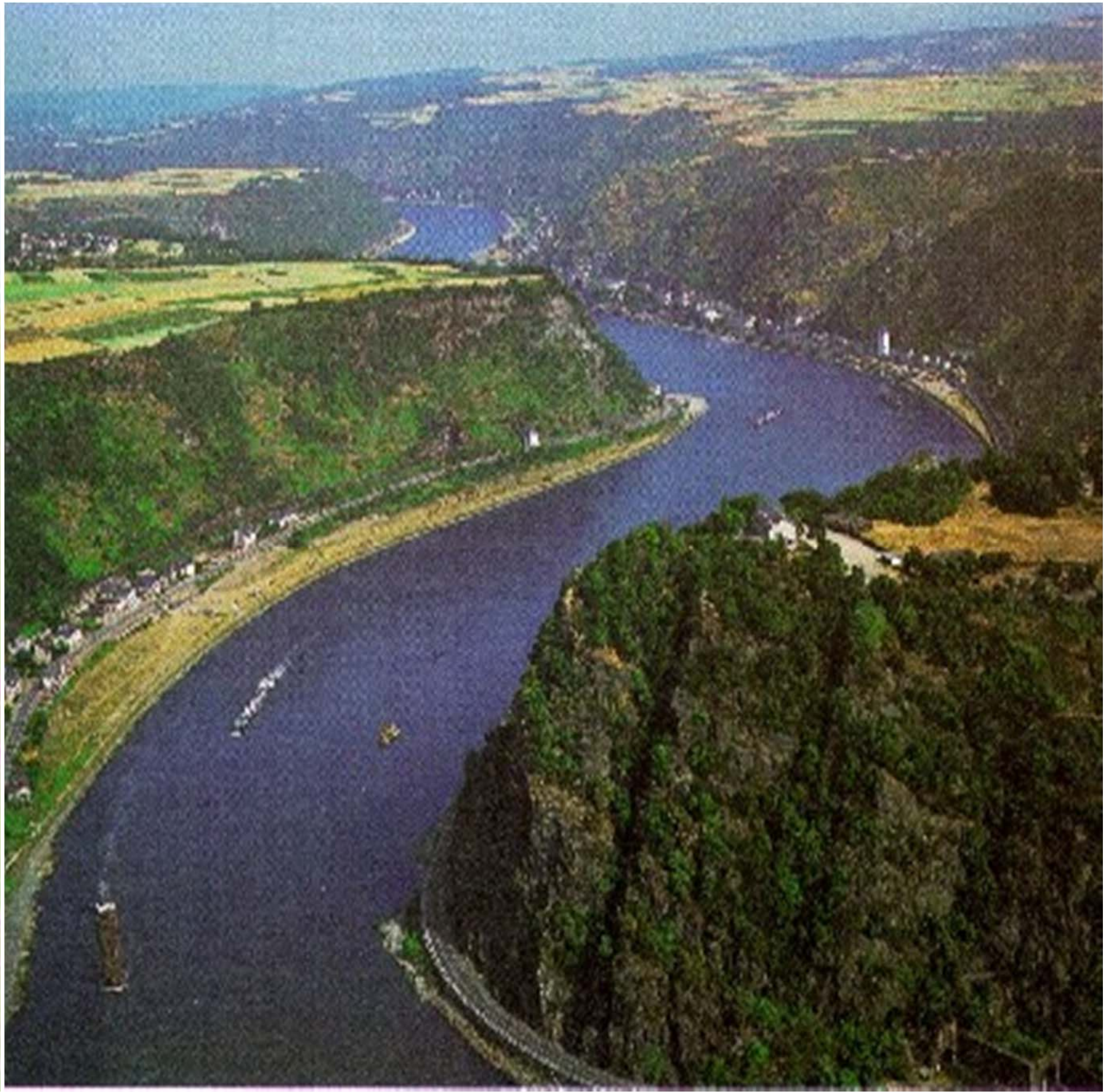
Bereich 4: Schwere Schädigung und häufig tödliche Stromwirkung, z.B. durch Herzkammerflimmern.

Veranschaulichung von Strom und Spannung durch fließendes Wasser

Kleiner Bach: geringer Strom,
geringe Spannung

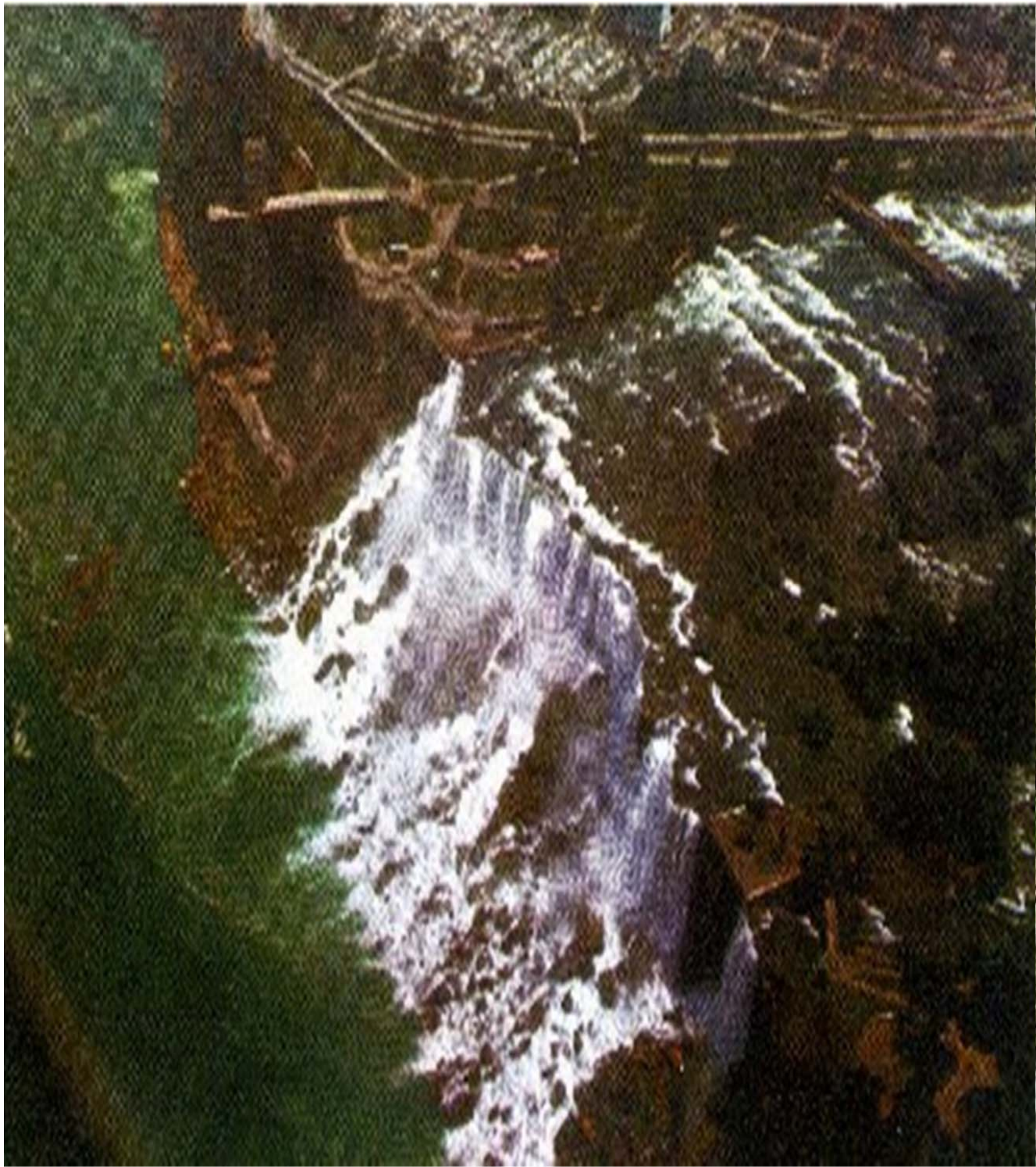
Der Rhein: großer Strom,
kleine Spannung

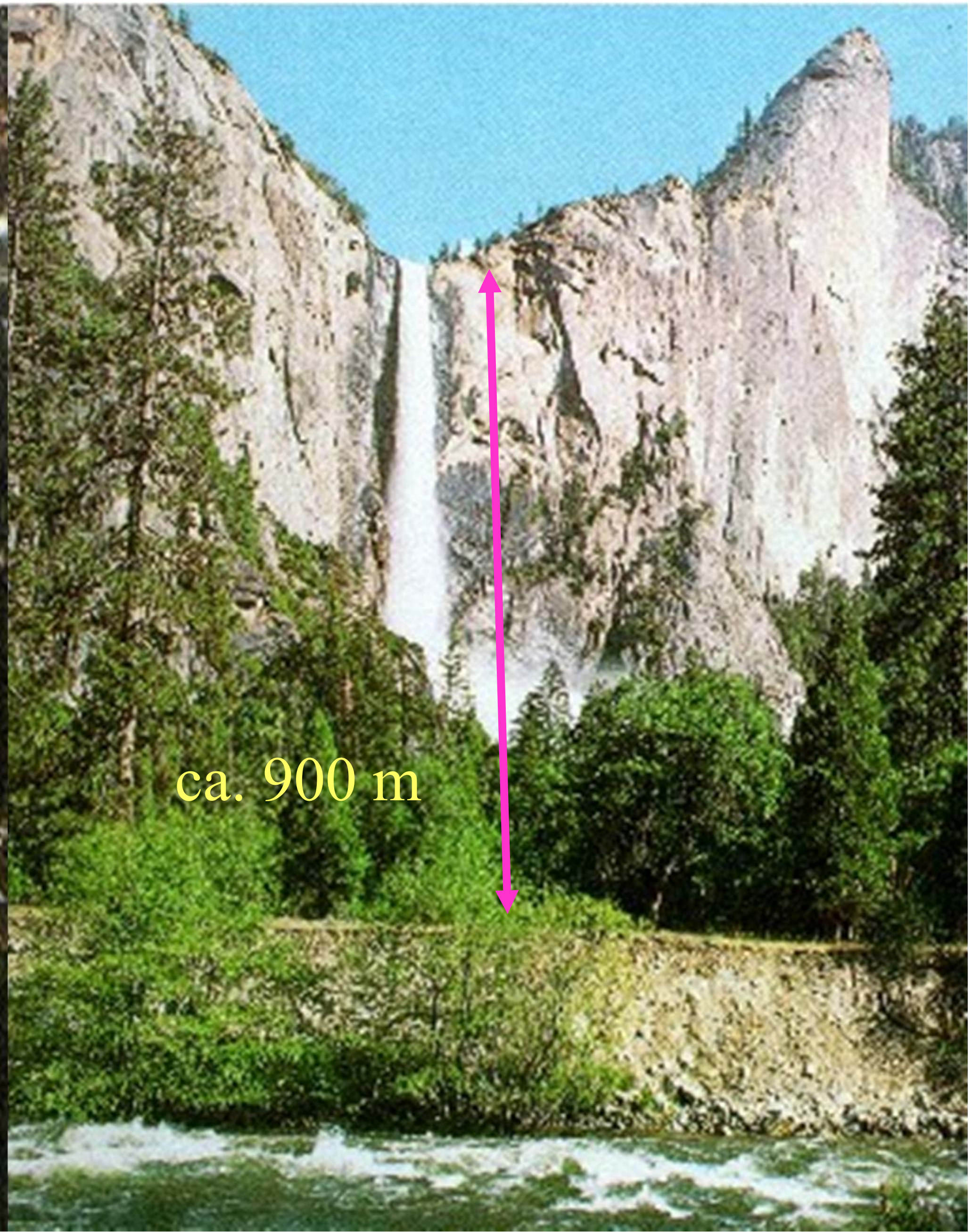




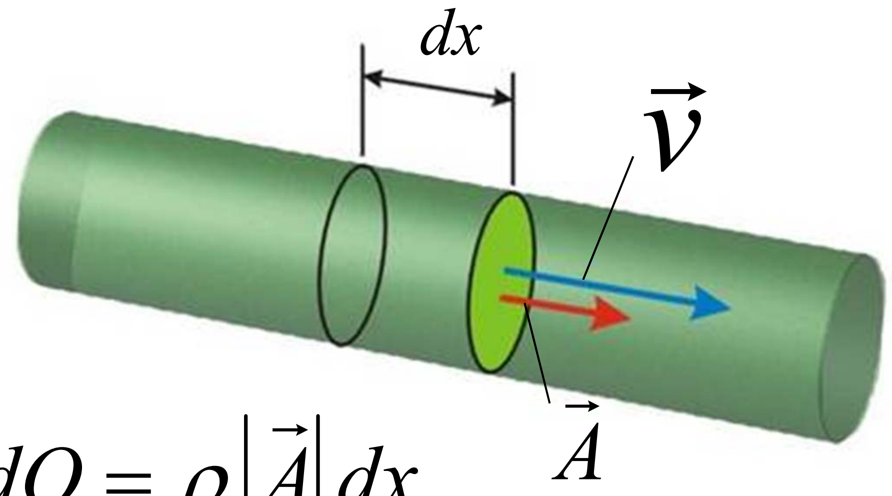
Niagara-Fälle: hoher Strom,
hohe Spannung

Yosemite-Park: mittlerer Strom,
sehr hohe Spannung





Wir wollen nun die Geschwindigkeit der Ladungen in einem Leiter berechnen. Die Ladung dQ im Teilvolumen $dV = A\,dx$ ist:



$$dQ = \rho \left|\vec{A}\right| dx$$

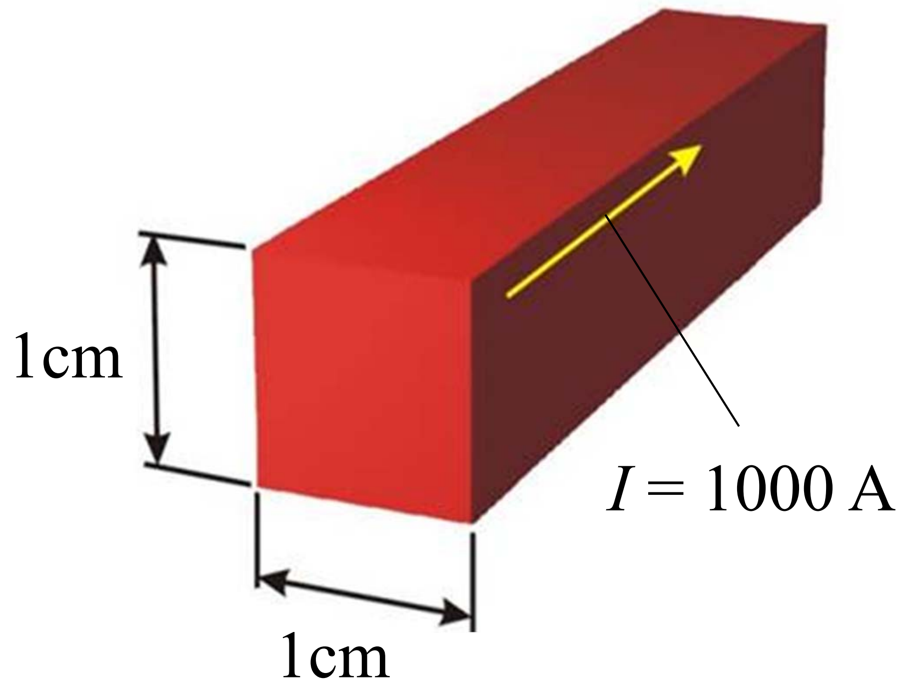
Die Ladungen bewegen sich in der Zeit dt um die Strecke dx. Dann ist der Strom:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \rho \left|\vec{A}\right| \frac{dx}{dt} = \rho\, A\, v$$

Dann ist die Geschwindigkeit der Ladungen (Elektronen):

$$v = \frac{I}{\rho\, A}$$

Beispiel: Kupferleiter



In 1 cm^3 Kupfer sind $8\cdot10^{22}$ Atome. Wenn jedes Atom ein frei bewegliches Elektron liefert, ist die Ladungsdichte:

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

$$= \frac{8\cdot10^{22}\cdot1.6\cdot10^{-19}\,\text{C}}{1\,\text{cm}^3} = 1.28\cdot10^4\,\frac{\text{C}}{\text{cm}^3}$$

Damit wird die Elektronengeschwindigkeit im Leiter:

$$v = \frac{I}{\rho\,a} = \frac{1000\,\text{C/s}}{1.28\cdot10^4\,\text{C}/\text{cm}^3\cdot1\,\text{cm}^2}$$

$$= 0.078\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 1\,\frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad (!!!)$$

Beispiele für Leiter und Halbleiter:

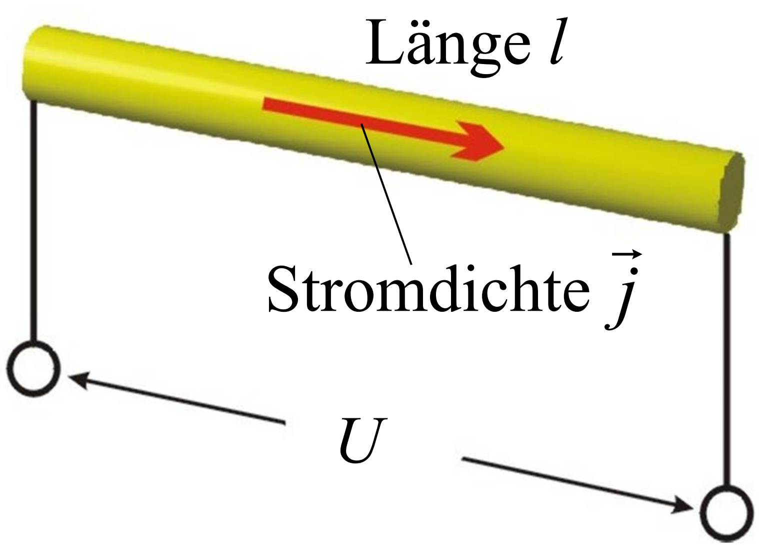
- Metalle, vor allem Cu und Ag
- Quecksilber, bei $T < 10$ K sogar „Supraleiter“
- Dotiertes Si und Ge (Halbleiter)
- Salzlösungen
- ionisierte Gase (Lichtbogen)
- Vakuum (wenn freie Elektronen vorhanden)

Beispiele für Nichtleiter

- Keramik, Kunststoffe
- Gase bei niedriger Temperatur
- reines Vakuum
- Glas (bei nicht zu hohen Temperaturen)

Das Ohm'sche Gesetz

Legt man an einen Leiter eine Spannung U, so entsteht in ihm ein homogenes elektrisches Feld E. Wenn ein Strom der Stärke I durch eine Fläche A eines Leiters fließt, dann zeigt der Vektor der Stromdichte $\vec{j}$ in die Fließrichtung der Ladungen und hat den Betrag: $j = \dfrac{I}{A}$



Die Stärke des fließenden Stromes ist proportional zum angelegten elektrischen Feld E, genauer gilt:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

σ ist die Leitfähigkeit eines Stoffes. Sie ist eine spezifische Materialkonstante. Ihre Einheit ist

$$[\sigma] = \left[\frac{j}{E}\right] = \frac{\mathrm{A/m^2}}{\mathrm{V/m}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}} = \frac{1}{(\mathrm{V/A})\mathrm{m}}$$

Das Verhältnis aus der angelegten Spannung U zum fließenden Strom I in einem Stromkreis nennt man den „*Widerstand*" R des Kreises, d.h. $R = U / I$.

Er hat die Einheit: $1\,\mathrm{V/A} = 1\,\Omega = 1\,\mathrm{Ohm}$

Material	$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad [\rho] = \Omega\,\mathrm{m}$	spezifischer Widerstand ϱ bei 20 °C/$\Omega \cdot$ m
Silber		$1{,}6 \cdot 10^{-8}$
Kupfer		$1{,}7 \cdot 10^{-8}$
Aluminium		$2{,}8 \cdot 10^{-8}$
Wolfram		$5{,}5 \cdot 10^{-8}$
Eisen		$10 \cdot 10^{-8}$
Blei		$22 \cdot 10^{-8}$
Quecksilber		$96 \cdot 10^{-8}$
Chrom-Nickel-Stahl		$100 \cdot 10^{-8}$
Kohlenstoff		$3500 \cdot 10^{-8}$
Germanium		0,45
Silicium		640
Holz		$10^{8} \ldots 10^{14}$
Glas		$10^{10} \ldots 10^{14}$
Hartgummi		$10^{13} \ldots 10^{16}$
Bernstein		$5 \cdot 10^{14}$
Schwefel		$1 \cdot 10^{15}$

Im Leiter nehmen wir ein homogenes elektrisches Feld an. Dann ist die Potentialdifferenz an den Leiterenden:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = U = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= \left|\vec{E}\right| l = \frac{\left|\vec{j}\right|}{\sigma} l = \frac{l}{\sigma} \frac{I}{A}$$

Dabei ist A die Querschnittsfläche und l die Länge des Leiters. Daraus folgt sofort:

$$U = \frac{l}{\sigma A} I$$

Der Ausdruck

$$R = \frac{l}{\sigma A}$$

ist der *Widerstand* des Kreises. Er gibt den Zusammenhang von Strom I und Spannung U wieder. Generell gilt

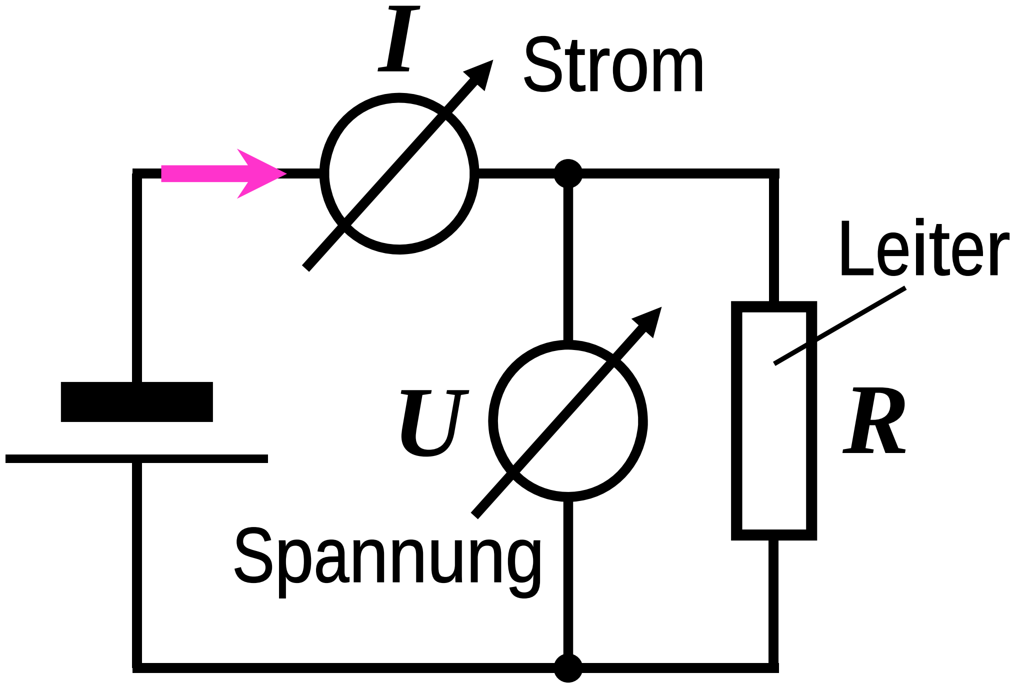
$$U = R(U, I, T, \ldots) \cdot I$$

d.h. der Widerstand hängt von unterschiedlichen Größen ab.

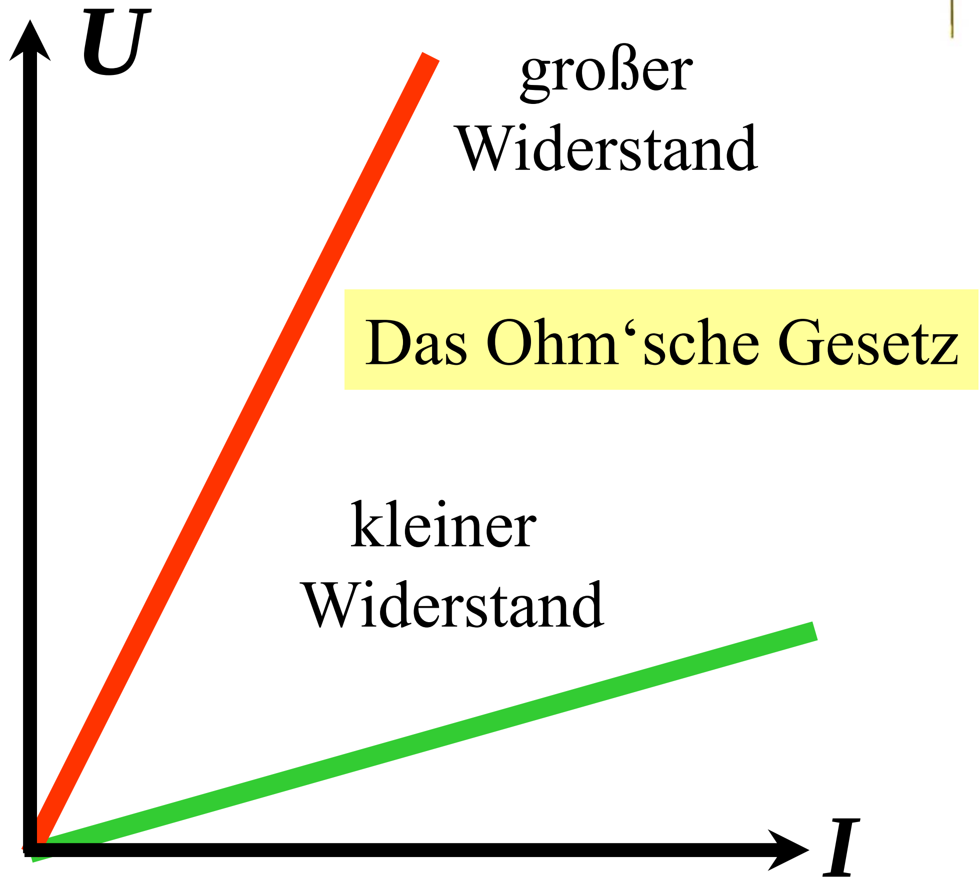
Bei bestimmten Leitern ist der Widerstand praktisch konstant. Dann gilt das „*Ohm'sche Gesetz*“ :

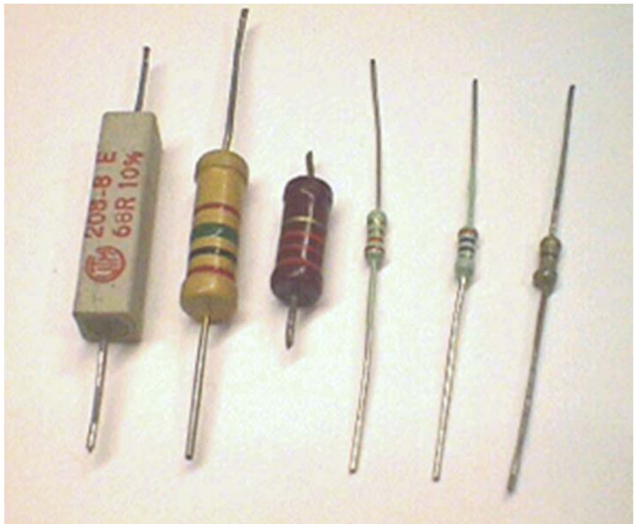
$$\boxed{U = R \cdot I \quad (R = \text{const.})}$$

Genereller Aufbau eines Stromkreises:



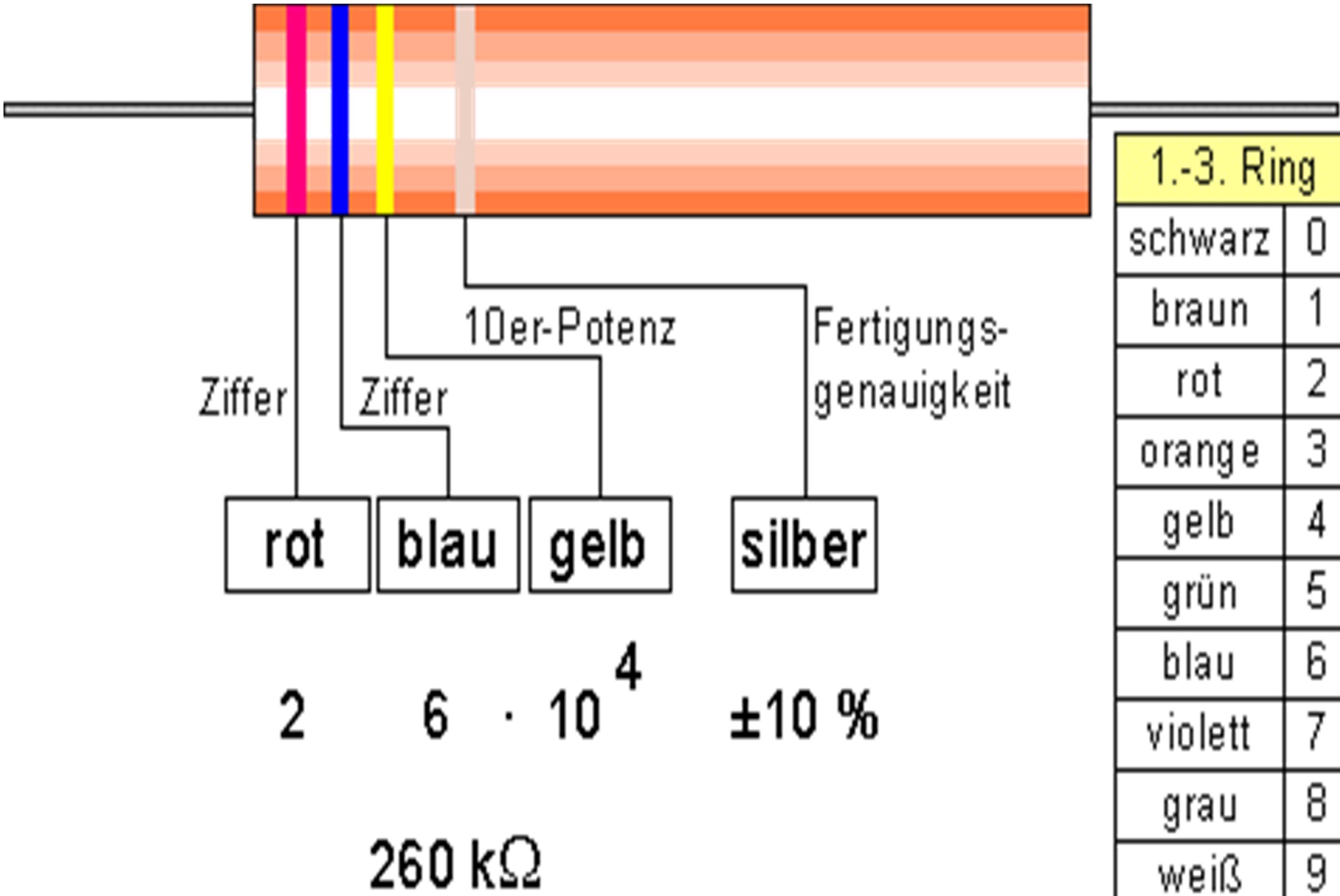
Der Widerstand wird durch die Messung der Spannung *U* und des Stroms *I* ermittelt. Bei der Strommessung liegt das Meß-gerät in der Leitung („Durchfluß-messung“), bei der Spannungs-messung parallel zu den Kontakten.





Georg Simon Ohm
(1789-1854)

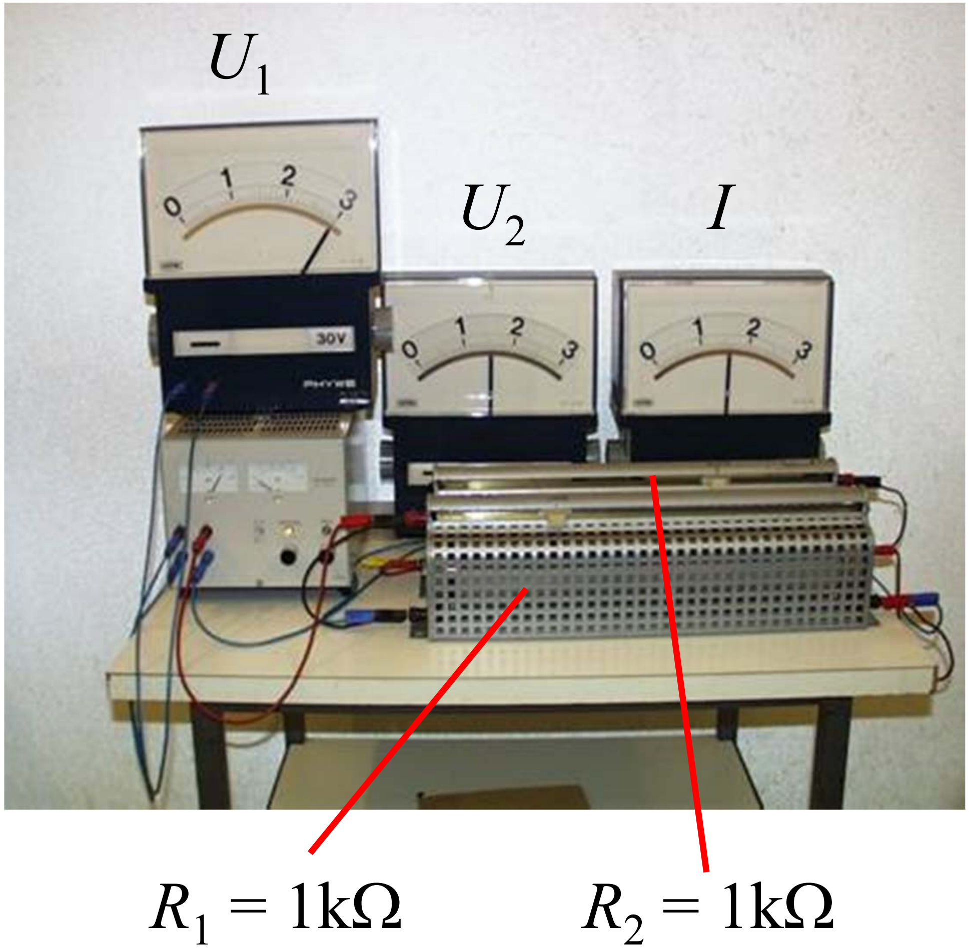
Farbcode auf Widerständen:

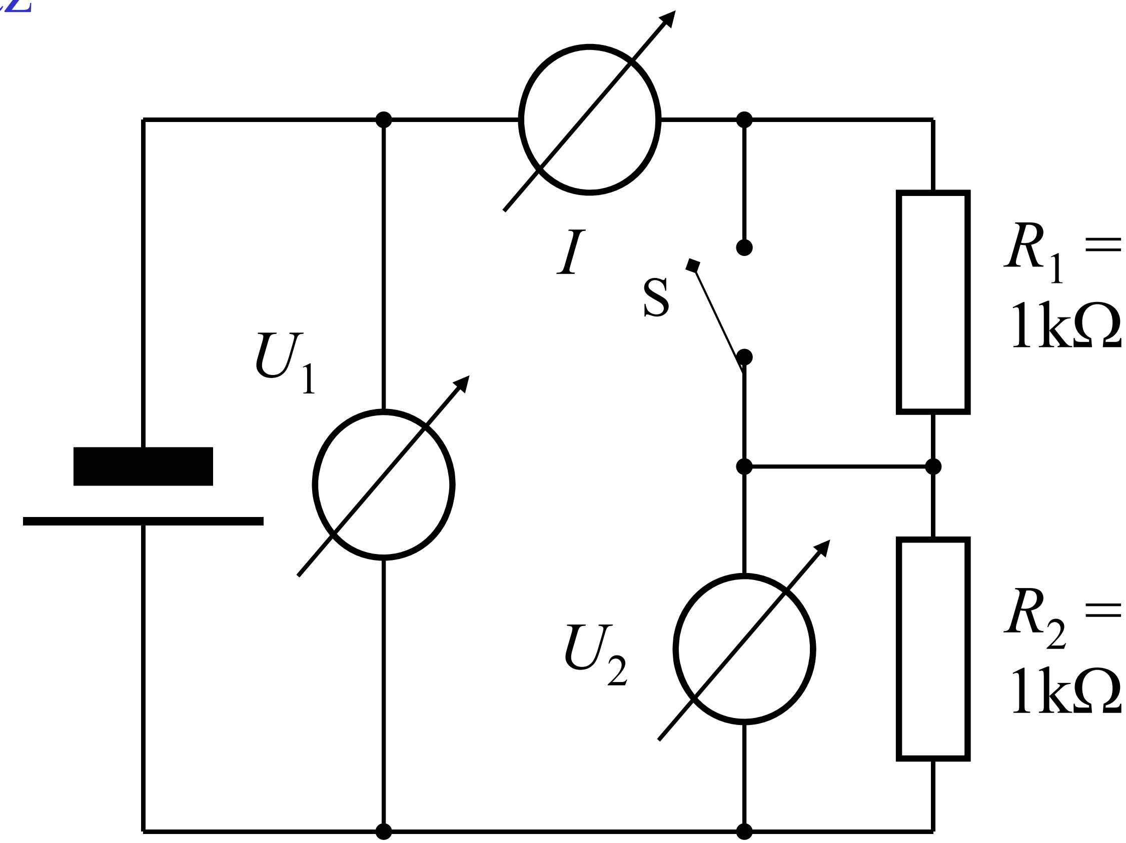


1.-3. Ring	
schwarz	0
braun	1
rot	2
orange	3
gelb	4
grün	5
blau	6
violett	7
grau	8
weiß	9

4. Ring	
braun	±1 %
rot	±2 %
gold	±5 %
silber	±10 %
ohne	±20 %

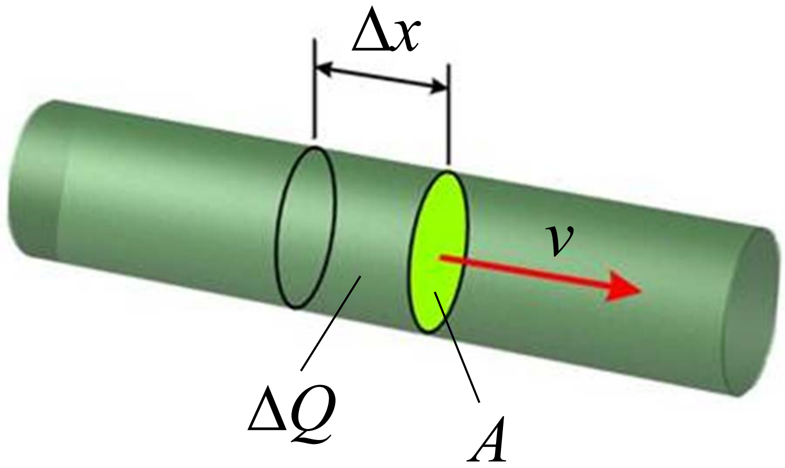
Versuch 9: Zum Ohm'schen Gesetz





Wenn der Schalter S geschlossen wird, dann halbiert sich der Gesamtwiderstand und der Strom I verdoppelt sich.

Die elektrische Leistung



Die Geschwindigkeit der Ladungen im Leiter ist (siehe Abschnitt 4.3.6):

$$v = \frac{I}{\rho\, A} = \text{const.}$$

Die Kraft auf die Ladung ΔQ ist:

$$\vec{F} = \Delta Q\, \vec{E} = \Delta Q \frac{U}{\Delta x}$$

Als geleistete Arbeit erhält man dann:

$$\Delta W = F\, \Delta x = \Delta Q\, U = \rho\, A\, \Delta x\, U$$

Die Zeit Δt, die die Ladung ΔQ benötigt, um die Strecke Δx zu durchlaufen, ist:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\rho\, A}{I} \Delta x$$

Damit folgt die Leistung zu:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\rho\, A\, \Delta x\, U}{\rho\, A\, \Delta x / I} = U\, I$$

Mit einem Widerstand R und dem Ohm'schen Gesetz ergibt sich für die elektrische Leistung:

$$\boxed{P = U\, I = I^2 R = \frac{U^2}{R} \qquad [P] = 1\,\text{Watt}}$$

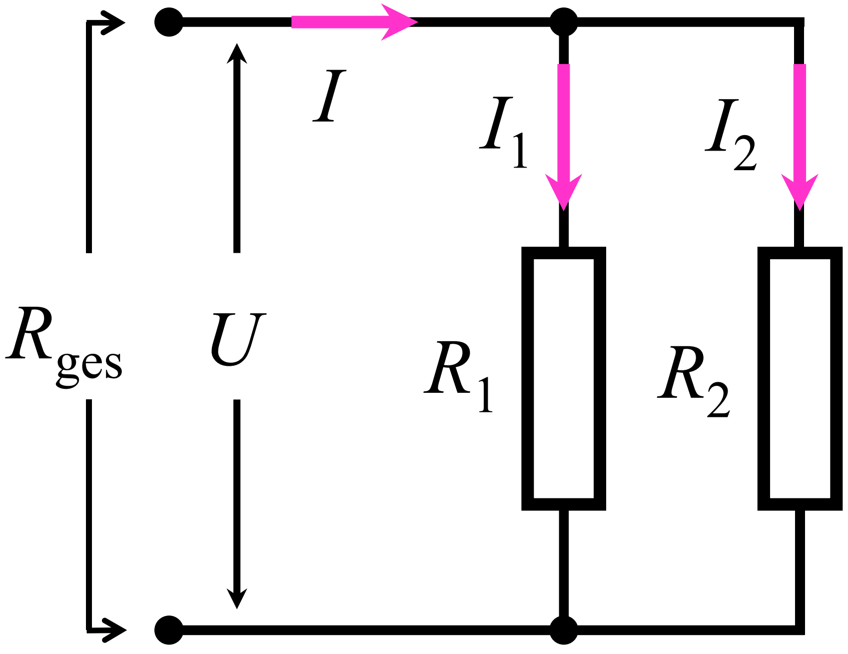
Die geleistete Arbeit ist dann

$$W = \int_0^t P\, d\tau = P \cdot t = U\, I\, t$$

[W] = Watt·s
oder
[W] = kWh

Parallel- und Serienschaltung von Widerständen

Zunächst die *Parallelschaltung* zweier Widerstände betrachtet:



Die Ströme durch die Widerstände sind:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{und} \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

Der Gesamtstrom ist dann:

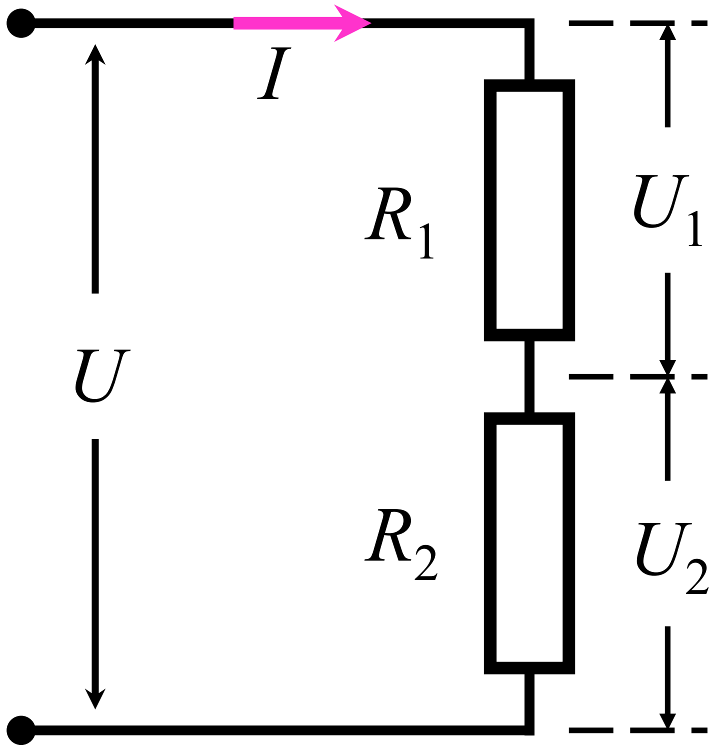
$$I_{ges} = I_1 + I_2 = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Hieraus ergibt sich der Gesamtwiderstand:

$$R_{ges} = \frac{U}{I_{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Allgemein erhält man für eine beliebige Anzahl N von parallel geschalteten Widerständen:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$



Bei der *Serienschaltung* ergibt sich für die Gesamtspannung:

$$U = U_1 + U_2$$

Außerdem gilt jeweils:

$$U_1 = R_1 I \quad \text{und} \quad U_2 = R_2 I$$

$$\Rightarrow U = I\left(R_1 + R_2\right) = I\, R_{\text{ges}}$$

Daraus folgt sofort

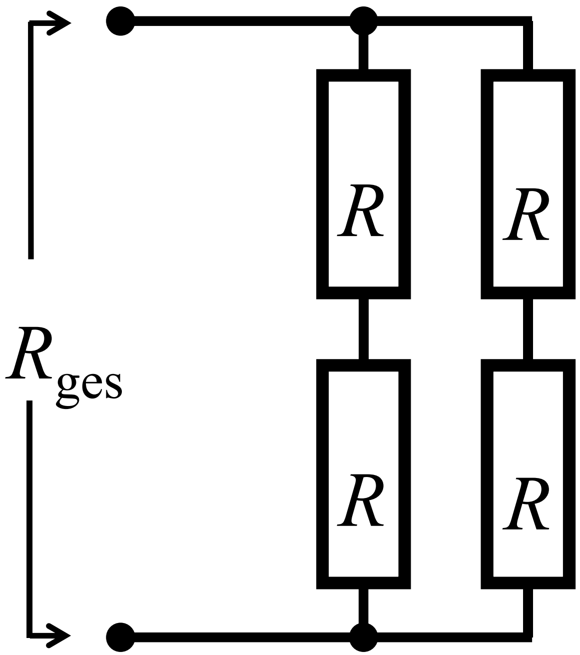
$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$

und für N Widerstände in Reihe

$$\boxed{R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{N} R_{\text{i}}}$$

Beispiel:

$$R_{\text{ges}} = ?$$



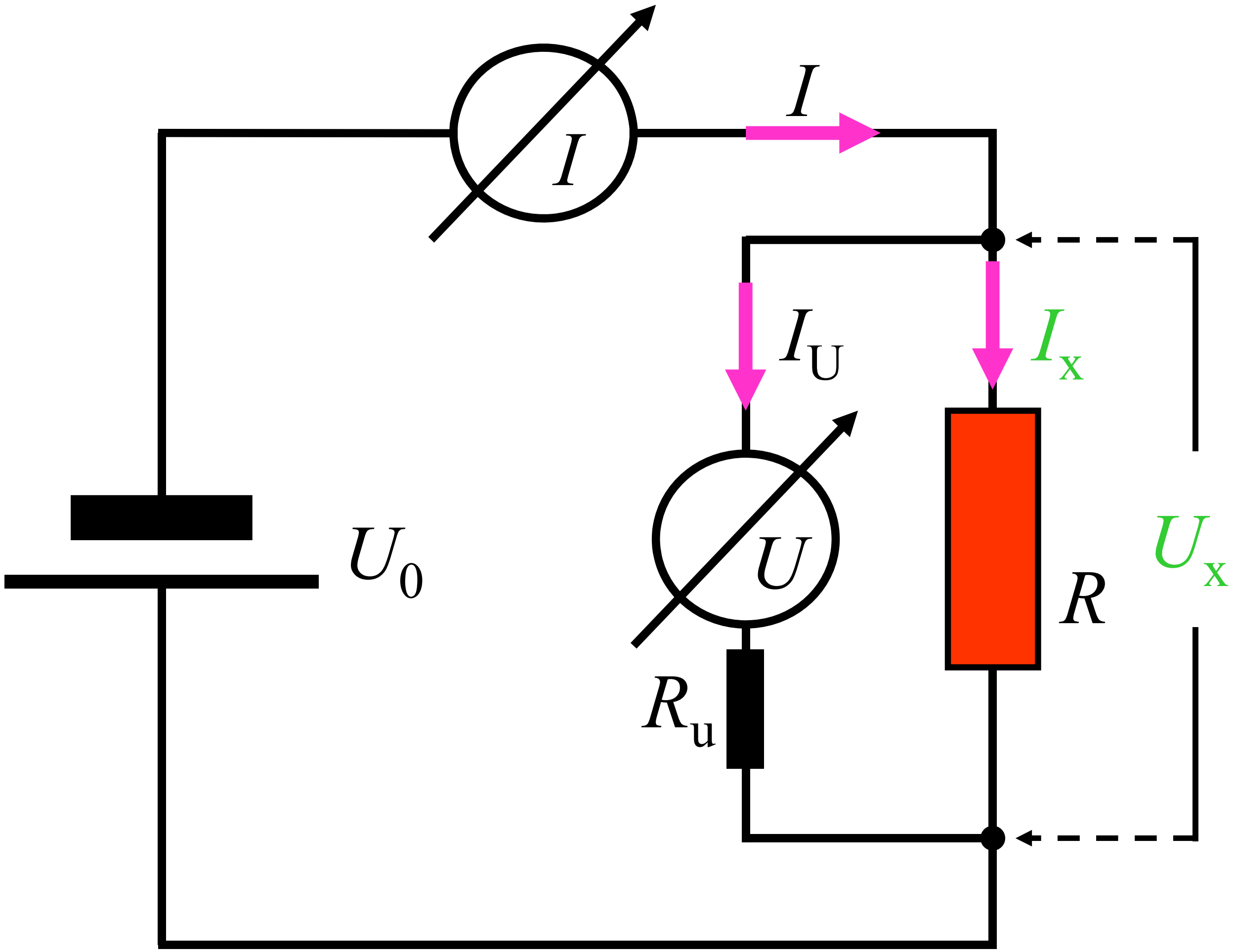
Lösung:

$$R_{\text{ges}} = \frac{(2R)(2R)}{(2R)+(2R)} =$$

$$= \frac{4R^2}{4R} = R$$

Strom- und Spannungsmessung

Jedes Meßinstrument (Volt- oder Amperemeter) hat einen endlichen Innen-widerstand. Wir betrachten die folgende Schaltung:



Es sollen der Strom I_x und die Spannung U_x bestimmt werden.

- Die Spannung wird exakt gemessen, da $U = U_x$.
- Das Voltmeter hat den Innen-widerstand R_u. Es gilt:

$$I_x = \frac{U_x}{R}, \quad I_U = \frac{U_x}{R_U}$$

Das (ideale) Ampèremeter zeigt den Gesamtstrom:

$$I = I_x + I_u = U_x \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_u} \right)$$

Daraus folgt:

$$\lim_{R_\mathrm{U}\to\infty} I = \frac{U_\mathrm{x}}{R} = I_\mathrm{x}$$

Ein Spannungsmessgerät muß also einen möglichst großen Innenwiderstand haben, damit die Strommessung nicht merklich beeinflußt wird.

Beispiele: Innenwiderstände von Voltmetern.

(i) Drehspulinstrumente:

$$\frac{dR_\mathrm{U}}{dU} = 10 - 20\,\mathrm{k\Omega/V}$$

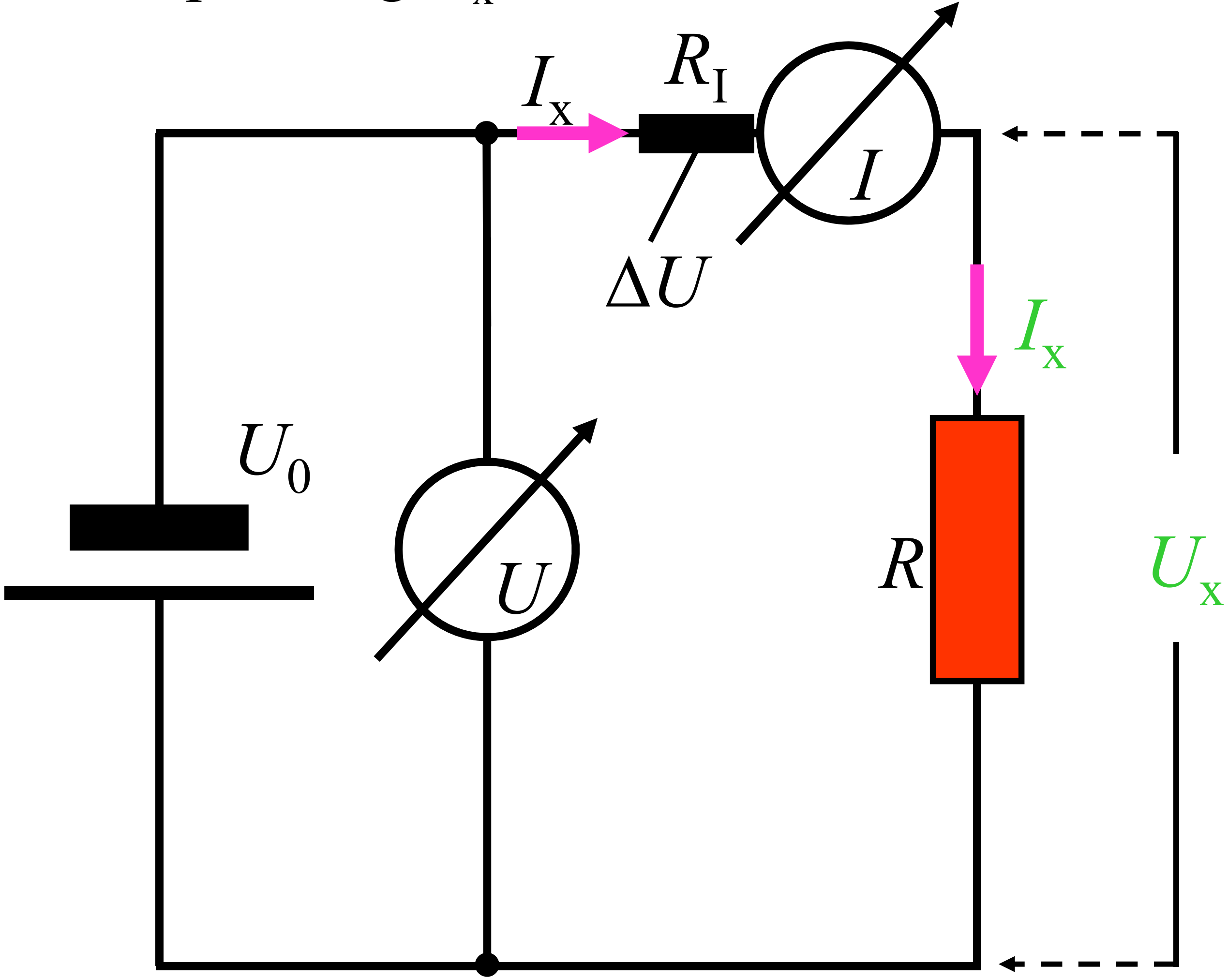
(ii) Elektronische Voltmeter, z.B. Digitalvoltmeter

$$R_\mathrm{U} > 10\,\mathrm{M\Omega}$$

(iii) Elektrostatisches Voltmeter

$$R_\mathrm{U} \to \infty$$

Wir betrachten nun die folgende Schaltung. Wieder sollen der Strom I_x und die Spannung U_x bestimmt werden:



- Der Strom wird exakt gemessen, da $I = I_x$.
- Das Ampèremeter hat den Innenwiderstand R_I. Es gilt:

$$U = U_0 = U_x + \Delta U$$

Dabei ist: $\Delta U = R_I \, I_x$

Die vom (idealen) Voltmeter gemessene Spannung ist daher:

$$U = U_x + R_I \, I_x$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow \quad \lim_{R_\mathrm{I} \to 0} U = U_\mathrm{x}$$

Ein Strommessgerät muß also einen möglichst kleinen Innenwiderstand haben, damit die Spannungsmessung nicht merklich beeinflußt wird.

Beispiele: Innenwiderstände von Ampèremetern.

(i) Drehspulinstrumente:

$$R_\mathrm{I} \approx 1 - 100\,\Omega$$

(ii) Elektronische Ampèremeter, z.B. Digitale Ampèremeter

$$R_\mathrm{I} < 0.2\,\Omega$$

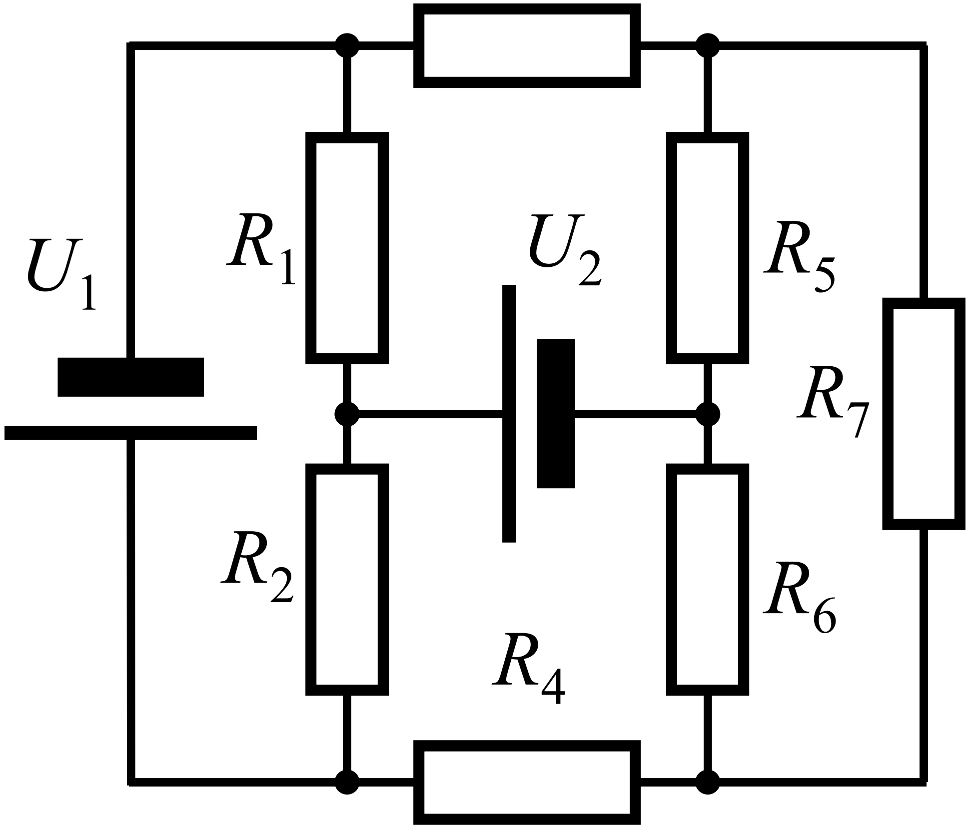
(iii) Stromwandler (DCCT):

$$R_\mathrm{I} < 1\,\mathrm{m}\Omega$$

Netzwerke und Kirchhoff'sche Regeln

Jetzt sollen Spannungen und Ströme in beliebigen Netzwerken berechnet werden.

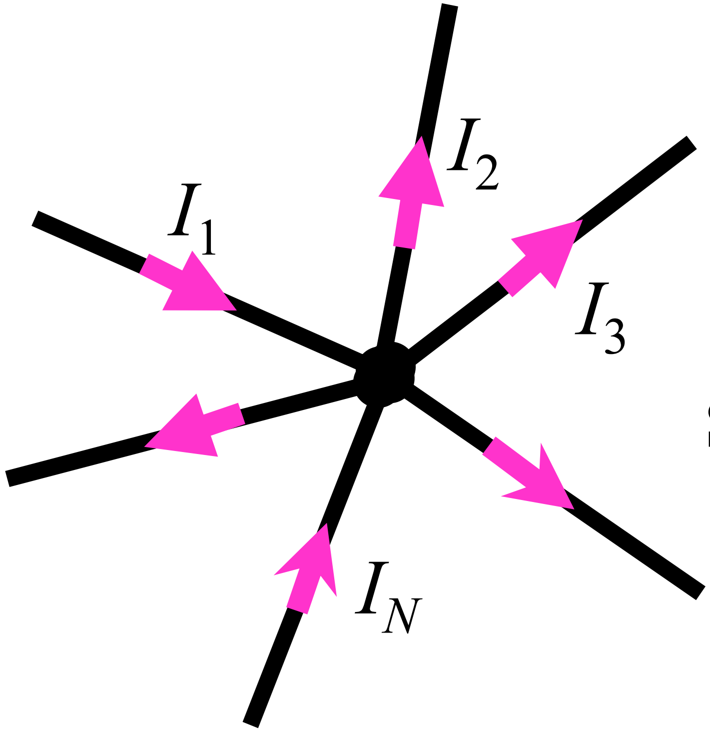
Beispiel:



Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

Hierfür verwendet man die beiden „*Kirchhoff'schen Regeln*".

(i) Die Knotenregel

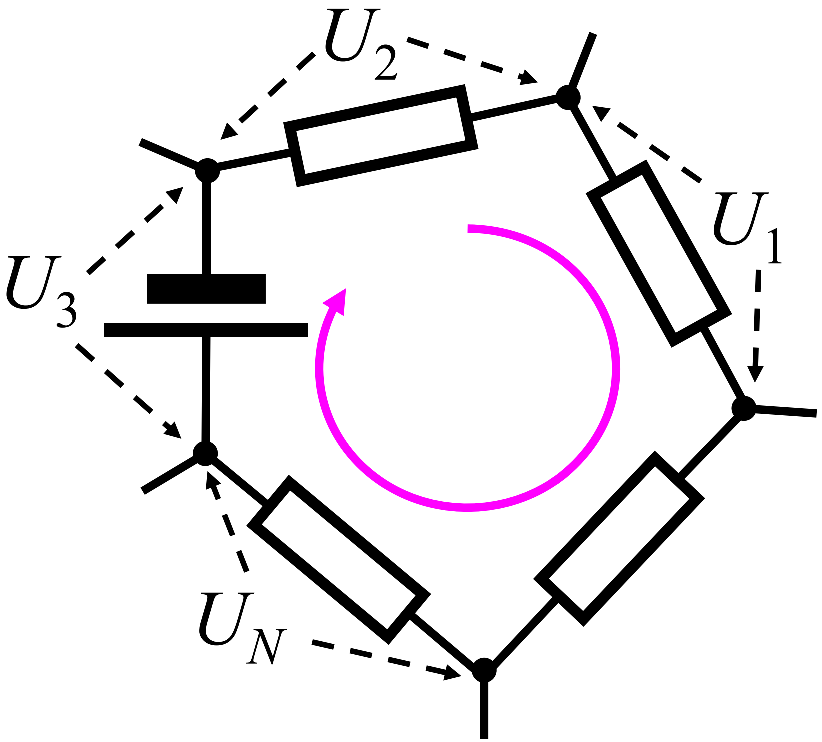


Wegen der Ladungserhaltung fließt nur soviel Strom in einen Knoten, wie auch wieder herausfließt.

In jedem Knoten verschwindet daher die Summe aller N Ströme:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} I_i = 0}$$

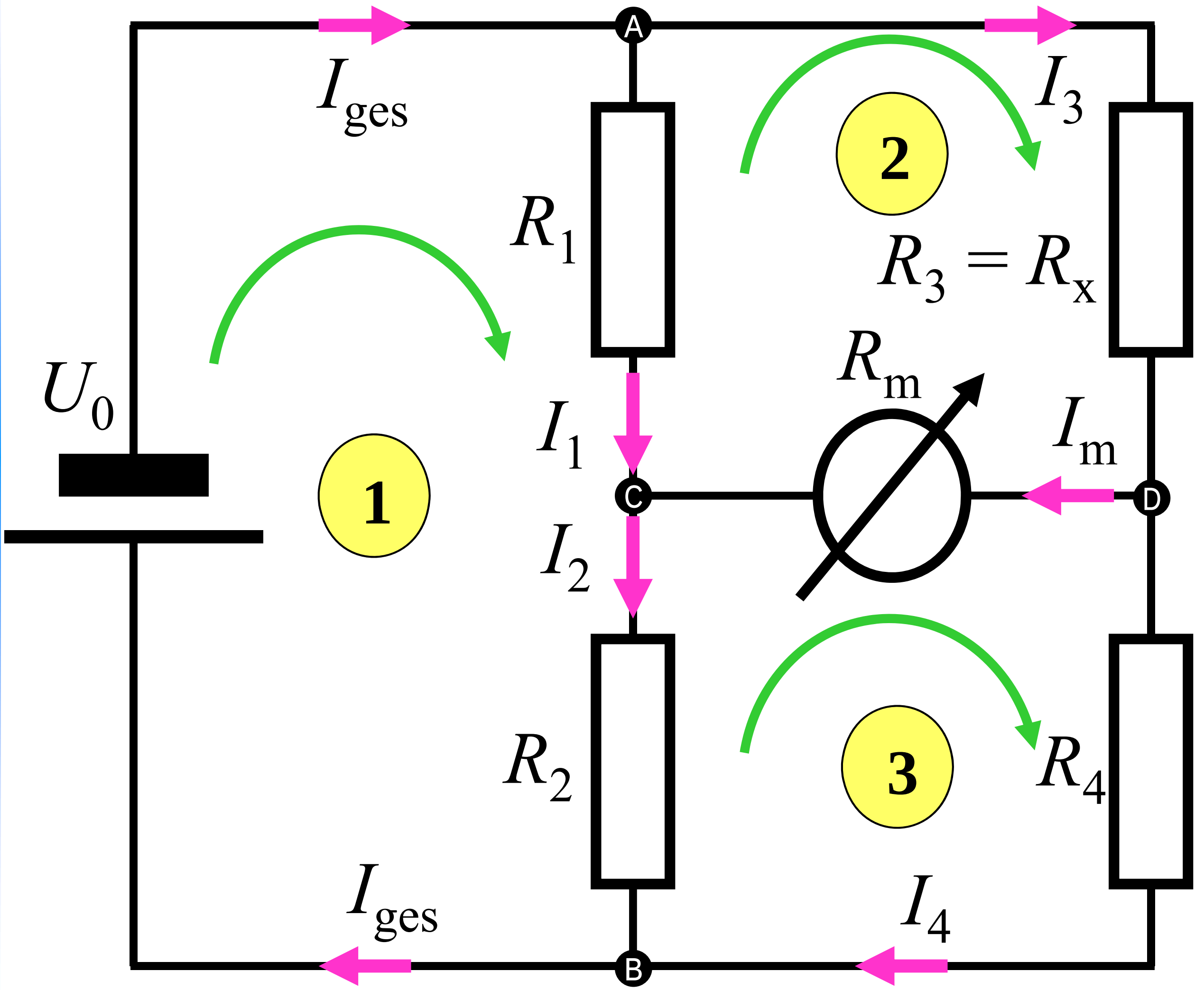
(ii) Die Maschenregel



In jeder geschlossenen Masche verschwindet die Summe aller Spannungen:

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = 0$$

Beispiel: Die Wheatstone'sche Brücke



Wir nehmen an, daß $R_3 = R_x$ unbekannt ist. Man soll R_1 so variieren, daß $I_m = 0$ wird (Kompensationsmethode zur Messung von Widerständen).

Masche 1: $-U_0 + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$

Masche 2: $I_3 R_3 + I_m R_m - R_1 I_1 = 0$

Masche 3: $I_4 R_4 - I_2 R_2 - I_m R_m = 0$

Knoten: $I_{ges} = I_1 + I_3 = I_2 + I_4$ (A,B)

$$I_1 + I_m = I_2 \qquad \text{(C)}$$

$$I_3 = I_m + I_4 \qquad \text{(D)}$$

Mit diesen 6 Gleichungen lassen sich die Ströme I_1, I_2, I_3, I_4, I_m und I_{ges} berechnen. Wenn die Brücke abgeglichen ist, dann gilt $I_m = 0$ (Meßinstrument zeigt keinen Strom an):

$$\text{(C)} \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2$$

$$\text{(D)} \quad \Rightarrow \quad I_3 = I_4$$

Daraus folgt mit $R_x = R_3$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad I_3 R_x - I_1 R_1 = 0$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad I_3 R_4 - I_1 R_2 = 0$$

und weiter:

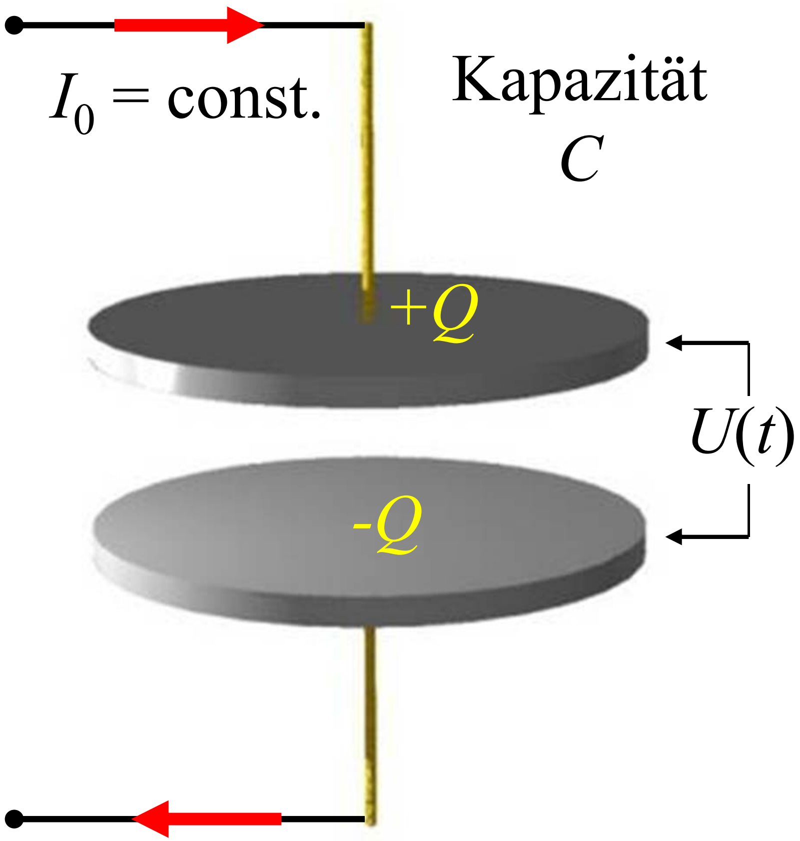
$$\frac{R_x}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}$$

Auflösen nach R_x ergibt dann:

$$\boxed{R_x = R_4 \frac{R_1}{R_2}}$$

Da die Widerstände R_1, R_2, R_4 genau bekannt sind, ergibt sich R_x ebenfalls mit sehr hoher Genauigkeit.

Schaltungen mit Kondensatoren



Wenn in einen Kondensator ein Strom fließt, dann lädt er sich auf. Die gespeicherte Ladung im Kondensator mit der Kapazität C ist:

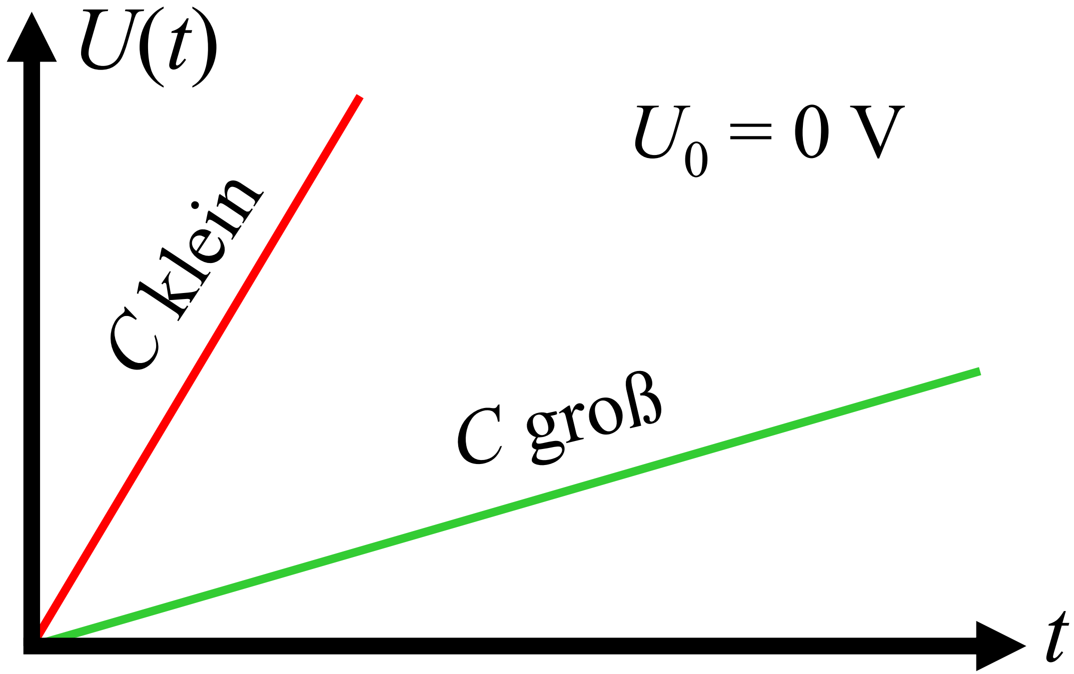
$$\boxed{Q = C \cdot U}$$

Dann ist der Aufladestrom:

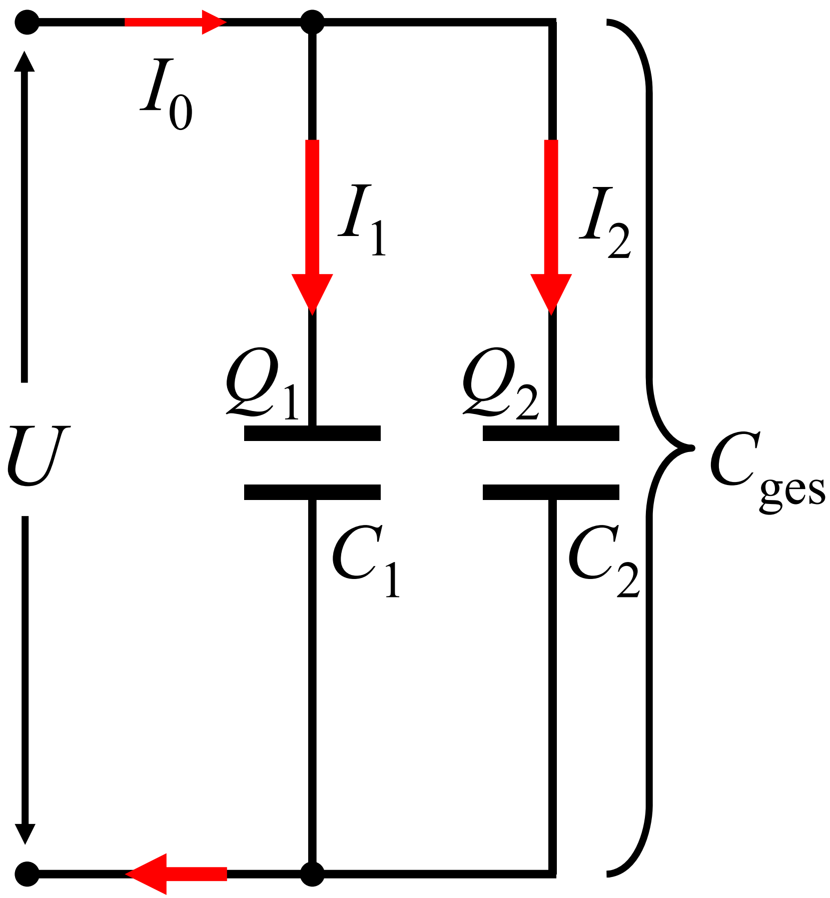
$$\frac{dQ}{dt} = I_0 = C\frac{dU}{dt}$$

Nach der Zeit t ist dann die Spannung:

$$U(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_0\, d\tau = \frac{I_0}{C}t + U_0$$



(i) Parallelschaltung von Kondensatoren



Für jeden einzelnen Kondensator gilt:

$$Q_1 = C_1 U \quad Q_2 = C_2 U$$

Die Gesamtladung auf den Kondensatorplatten ist:

$$\begin{aligned} Q_{ges} &= Q_1 + Q_2 \\ &= C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2) U \\ &= C_{ges} U \end{aligned}$$

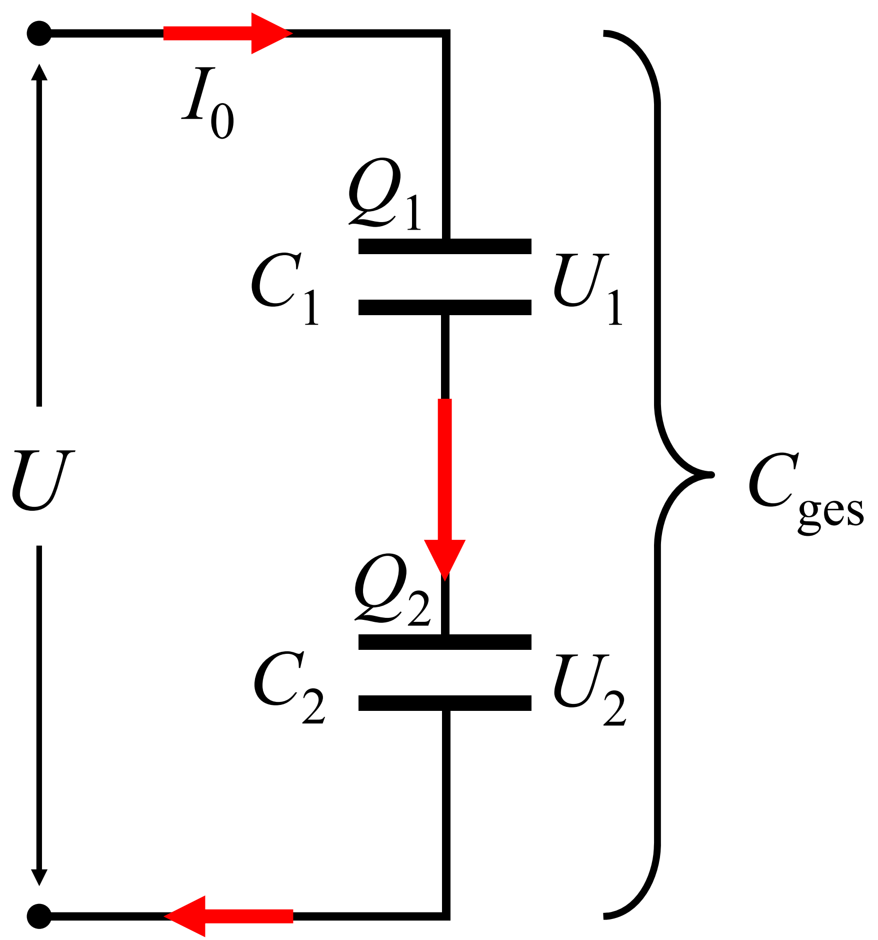
Daraus folgt sofort:

$$C_{ges} = C_1 + C_2$$

Dies läßt sich einfach auf N parallel geschaltete Kondensatoren verallgemeinern. Es ergibt sich:

$$\boxed{C_{ges} = \sum_{i=1}^{N} C_i}$$

(ii) Serienschaltung von Kondensatoren



Für jeden einzelnen Kondensator gilt jetzt (mit $Q_1 = Q_2 = Q$):

$$Q = C_1 U_1 \qquad Q = C_2 U_2$$

Die Gesamtspannung setzt sich aus den Einzelspannungen zusammen:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$= Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = Q\frac{1}{C_{\text{ges}}}$$

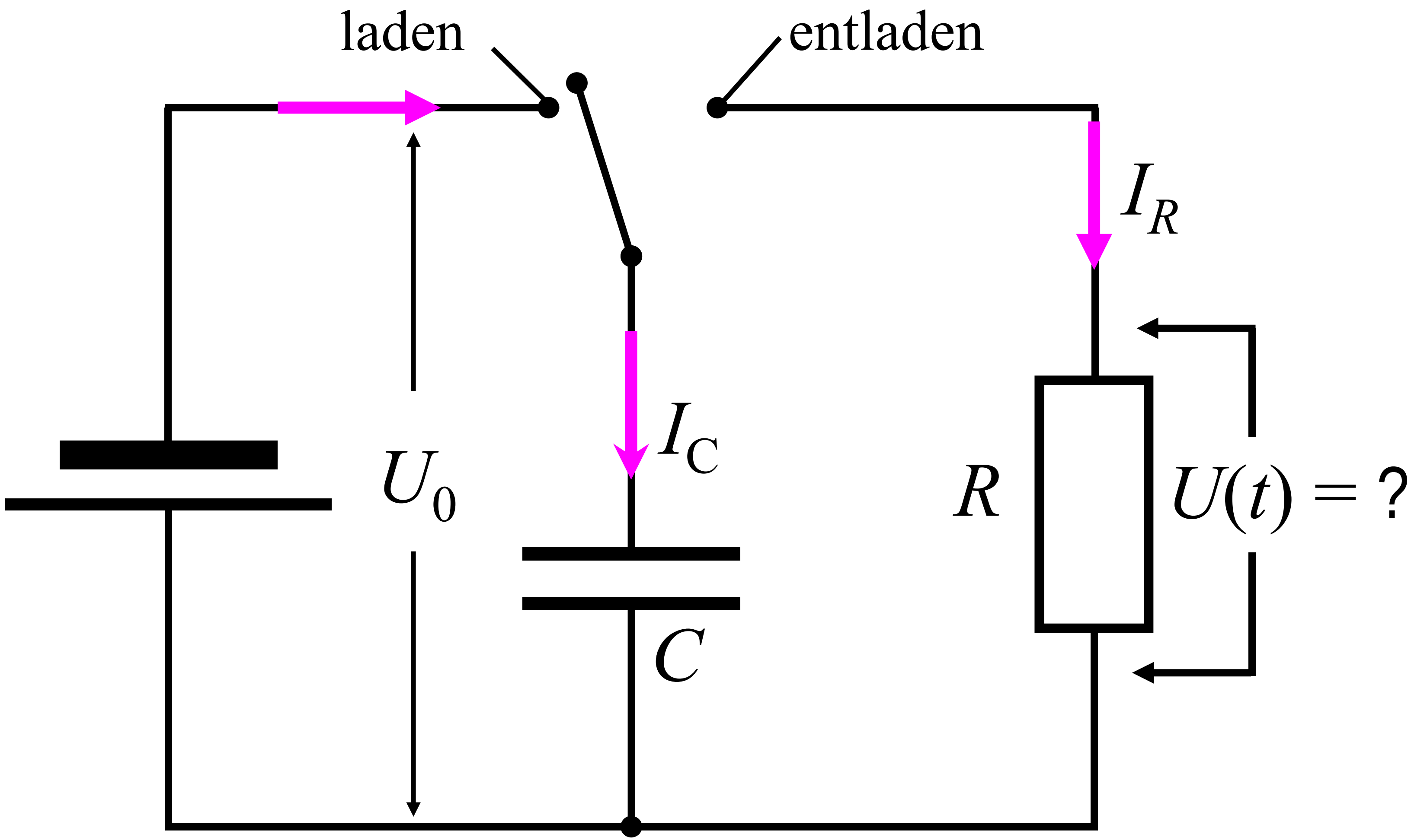
Daraus folgt sofort:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Dies läßt sich wieder einfach auf N in Serie geschaltete Kondensatoren verallgemeinern. Es ergibt sich:

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}}$$

Laden und Entladen von Kondensatoren



Zunächst wird der Kondensator über den Schalter mit der Batterie verbunden und lädt sich dabei auf die Spannung U_0 auf. Danach wird auf den Widerstand R umgeschaltet, so daß über ihn der Strom I_R abfließt. Es soll der Spannungsverlauf $U(t) = R\, I_R(t)$ berechnet werden.

Für die Spannungen gilt:

$$\frac{dQ_C}{dt} = I_C = -C\frac{dU}{dt} \quad \text{und} \quad I_R = \frac{U}{R}$$

Da beim Entladen $I_C = I_R$ ist, folgt:

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}U(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dU(t)}{dt} + \frac{1}{RC}U(t) = 0$$

Dies ist eine lineare, homogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $U(t)$. Ihre Lösung lautet:

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Dabei ist U_0 die Spannung zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Spannung $U(t)$ und damit auch der Entladestrom $I_R(t) = U(t)/R$ klingen exponentiell ab mit der Zeitkonstanten:

$$\tau = RC$$

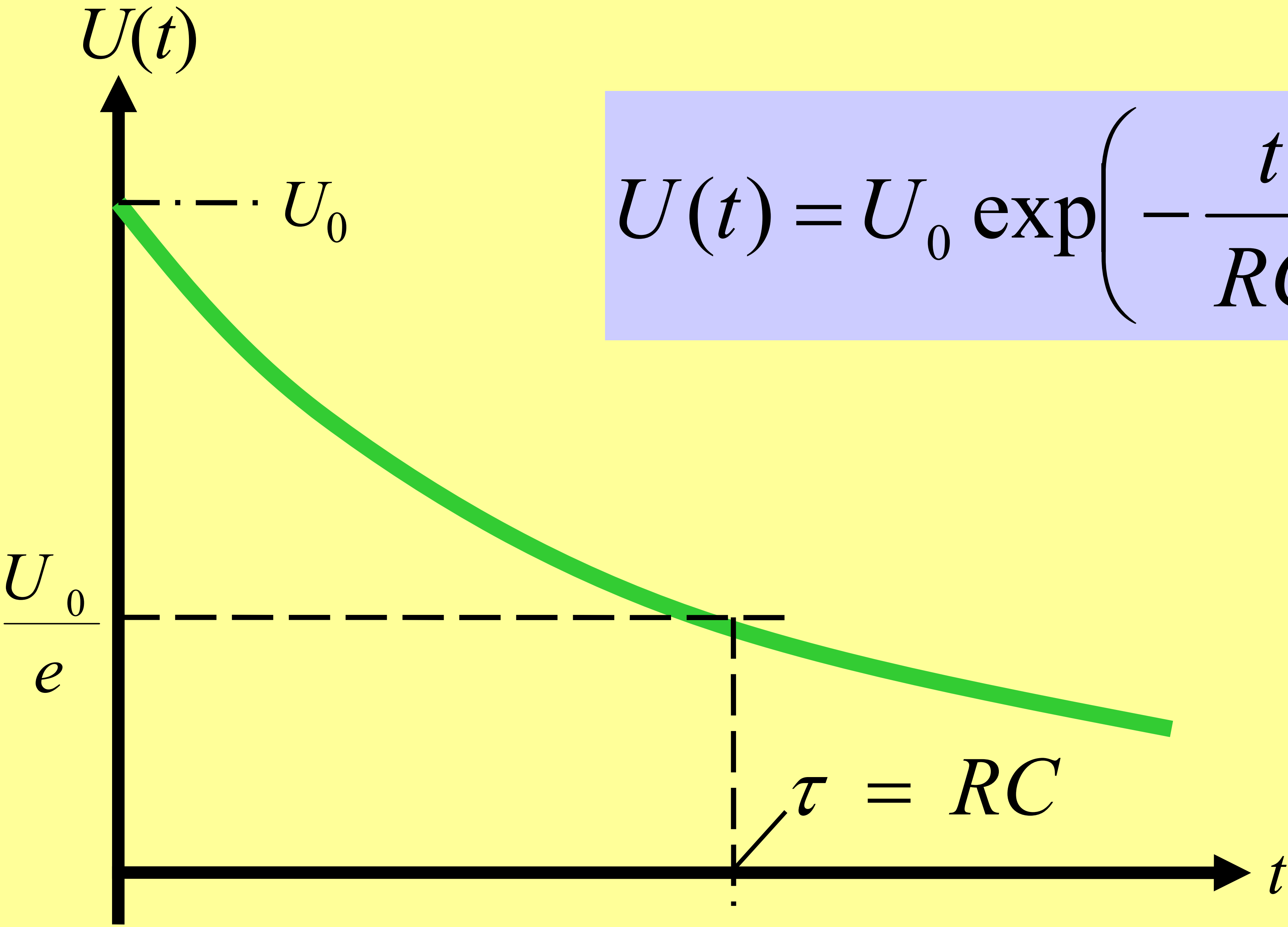
$$[\tau] = 1\frac{\text{V}}{\text{A}}\frac{\text{A s}}{\text{V}} = 1\,\text{s}$$

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

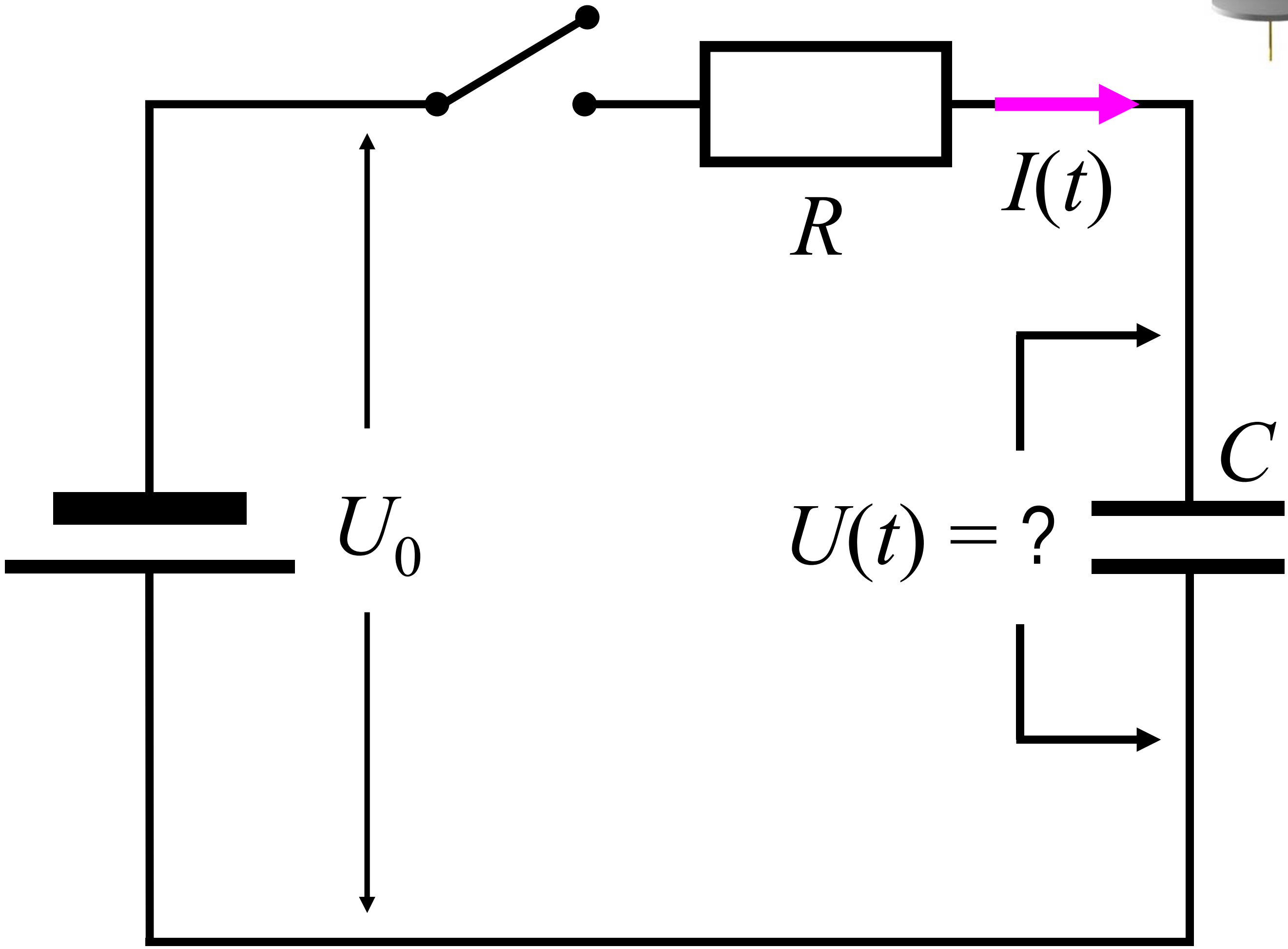
$$I_R(t) = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Entladekurve eines Kondensators

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$



Es soll nun die Spannung $U(t)$ berechnet werden, die über einem Kondensator der Kapazität C beim Aufladen über einen Widerstand R abfällt.



Der Strom durch den Kondensator ist:

$$I(t) = \frac{U_0 - U(t)}{R}$$

Gleichzeitig gilt:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) = C\frac{dU(t)}{dt}$$

Daraus ergibt sich durch Gleichsetzen wieder eine DGL für $U(t)$:

$$C\frac{dU(t)}{dt} = \frac{U_0 - U(t)}{R}$$

Dies läßt sich umformen zu:

$$\frac{dU(t)}{dt}+\frac{1}{RC}U(t)=\frac{U_0}{RC}$$

Es handelt sich um eine lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die jetzt aber *inhomogen* ist.

Die Lösung der homogenen Gleichung lautete (siehe Entladung):

$$U_\mathrm{h}(t)=A\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Eine partikuläre Lösung $U_\mathrm{p}(t)$ ergibt sich leicht aus der Bedingung:

$$\lim_{t\to\infty}U_\mathrm{p}(t)=U_0$$

Also gilt für die Gesamtlösung:

$$U(t)=U_\mathrm{p}(t)+U_\mathrm{h}(t)$$

$$U(t)=U_0+A\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Die Konstante A ist mit der Anfangsbedingung $U(t)=0$ für $t=0$ festgelegt:

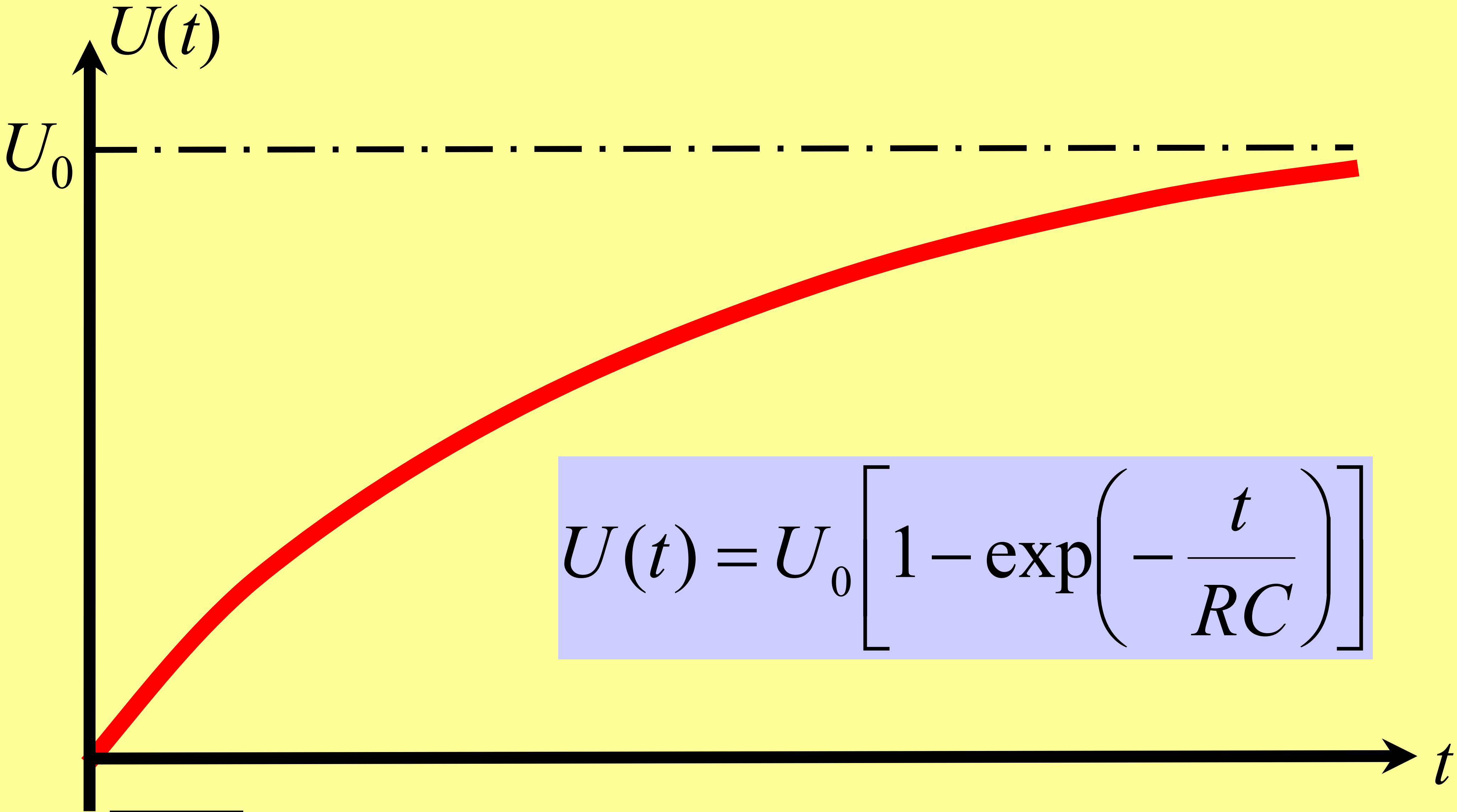
$$U(0)=U_0+A=0$$

$$\Rightarrow A=-U_0$$

Damit ergibt sich die gesuchte Aufladekurve eines Kondensators:

$$U(t)=U_0\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

Aufladekurve eines Kondensators



$$U(t) = U_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$