Inhalt der Vorlesung A1

1. Einführung

- Methode der Physik
- Physikalische Größen
- Übersicht über die vorgesehenen Themenbereiche

2. Teilchen

A. Einzelne Teilchen

- Beschreibung von Teilchenbewegung
  - Kinematik: Quantitative Erfassung
  - Dynamik: Ursachen der Bewegung
- Kräfte
- Arbeit + Leistung, Energie
- Erhaltungssätze: Energie+Impulserhaltung
- Reibungskräfte
- Schwingungen

Ein anderes Beispiel, bei dem eine Reibung angenommen wird, die proportional zur Geschwindigkeit anwächst, ist der gedämpfte harmonische Oszillator.

Ungeachtet dieses Bezugs zur eben behandelten Reibung sind Schwingungsvorgänge von fundamentaler Bedeutung in der Physik.

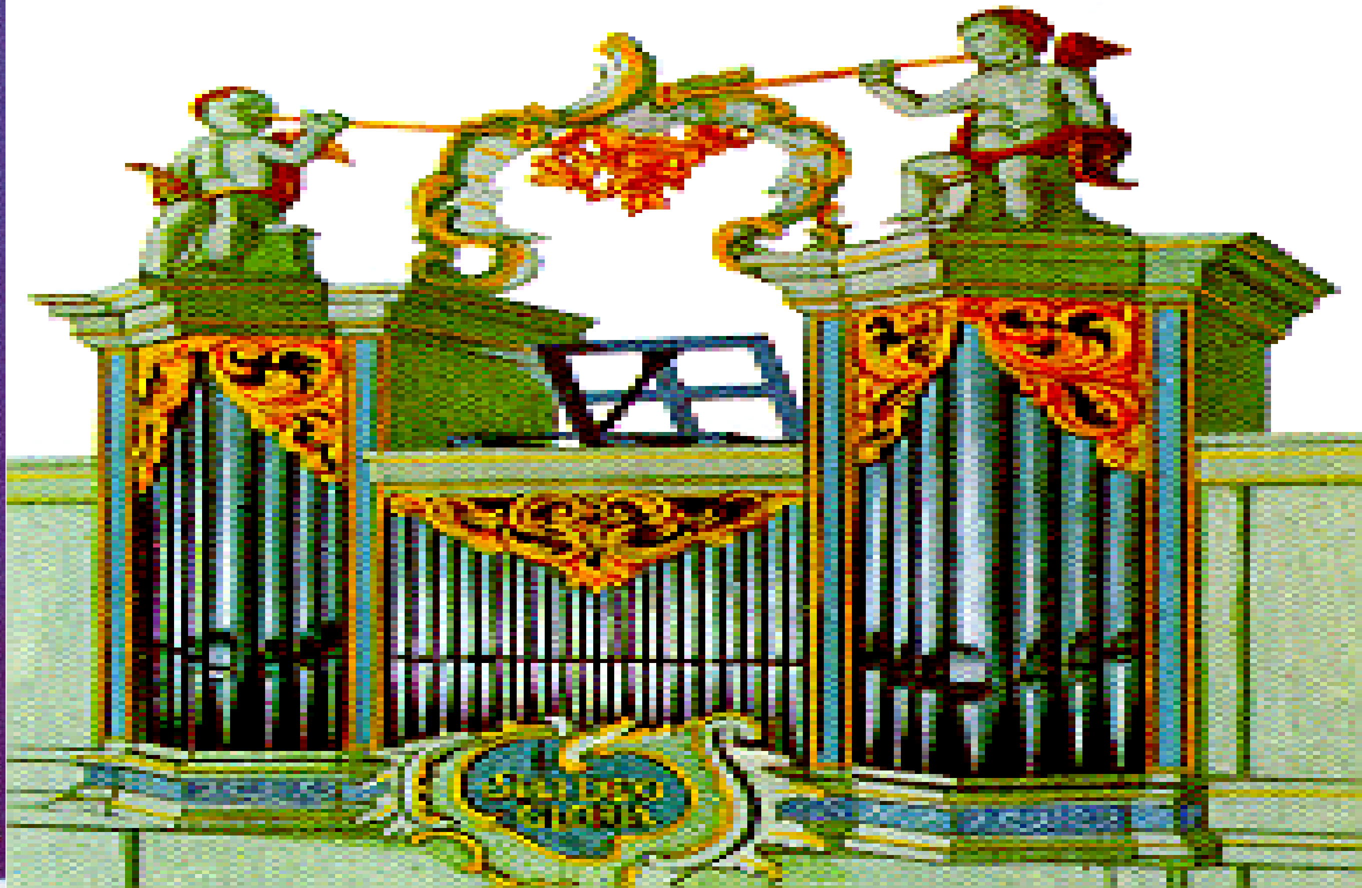
hier:

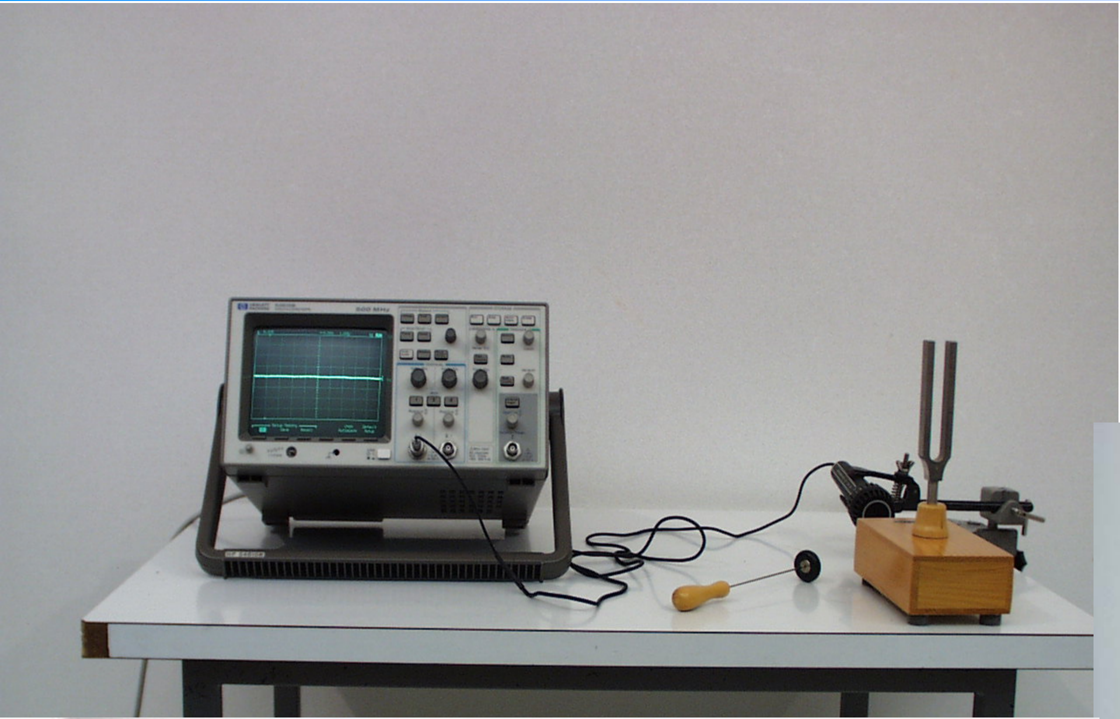
1) Ungedämpfter harmonischer Oszillator
2) Gedämpfter harmonischer Oszillator
3) Erzwungener harmonischer Oszillator

Schwingungen, harmonischer Oszillator

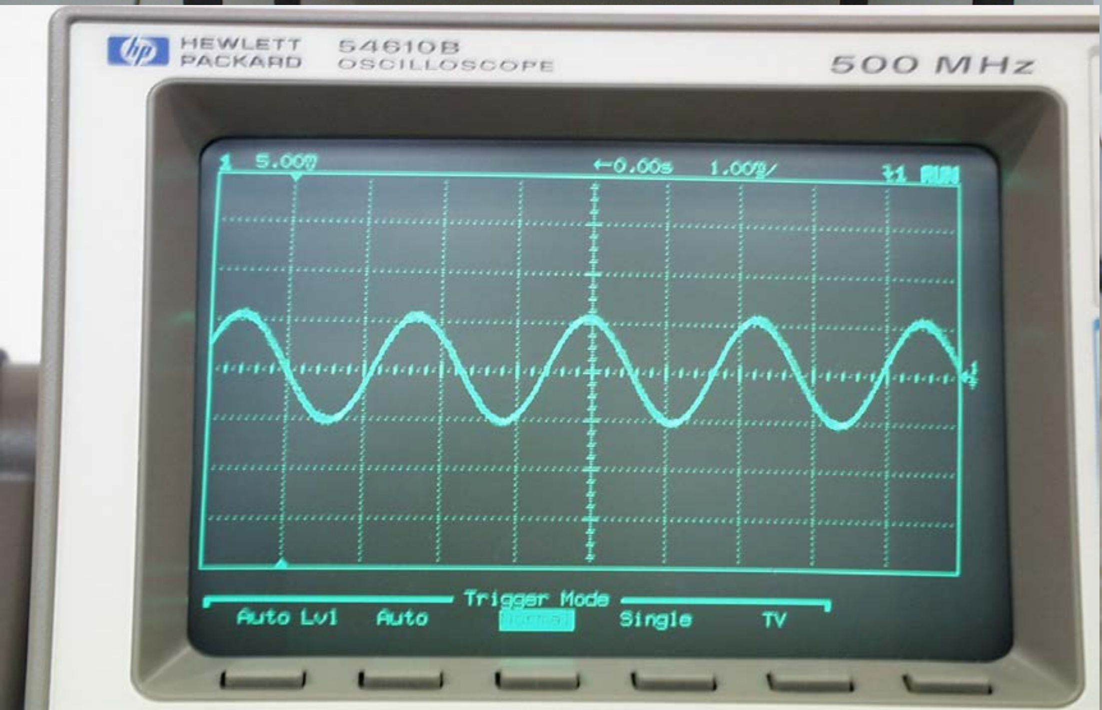
Einführung

Mechanische Schwingungen

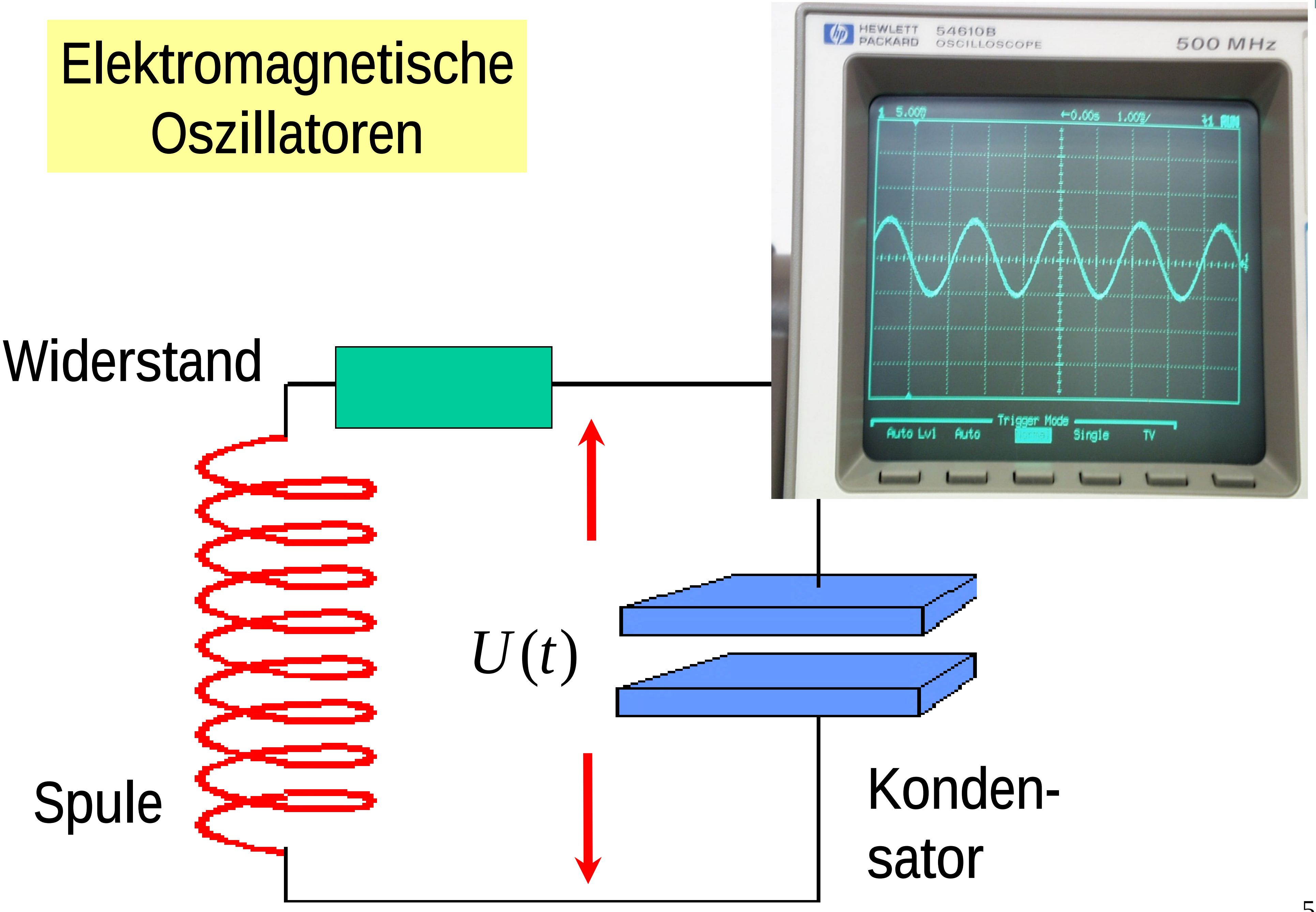




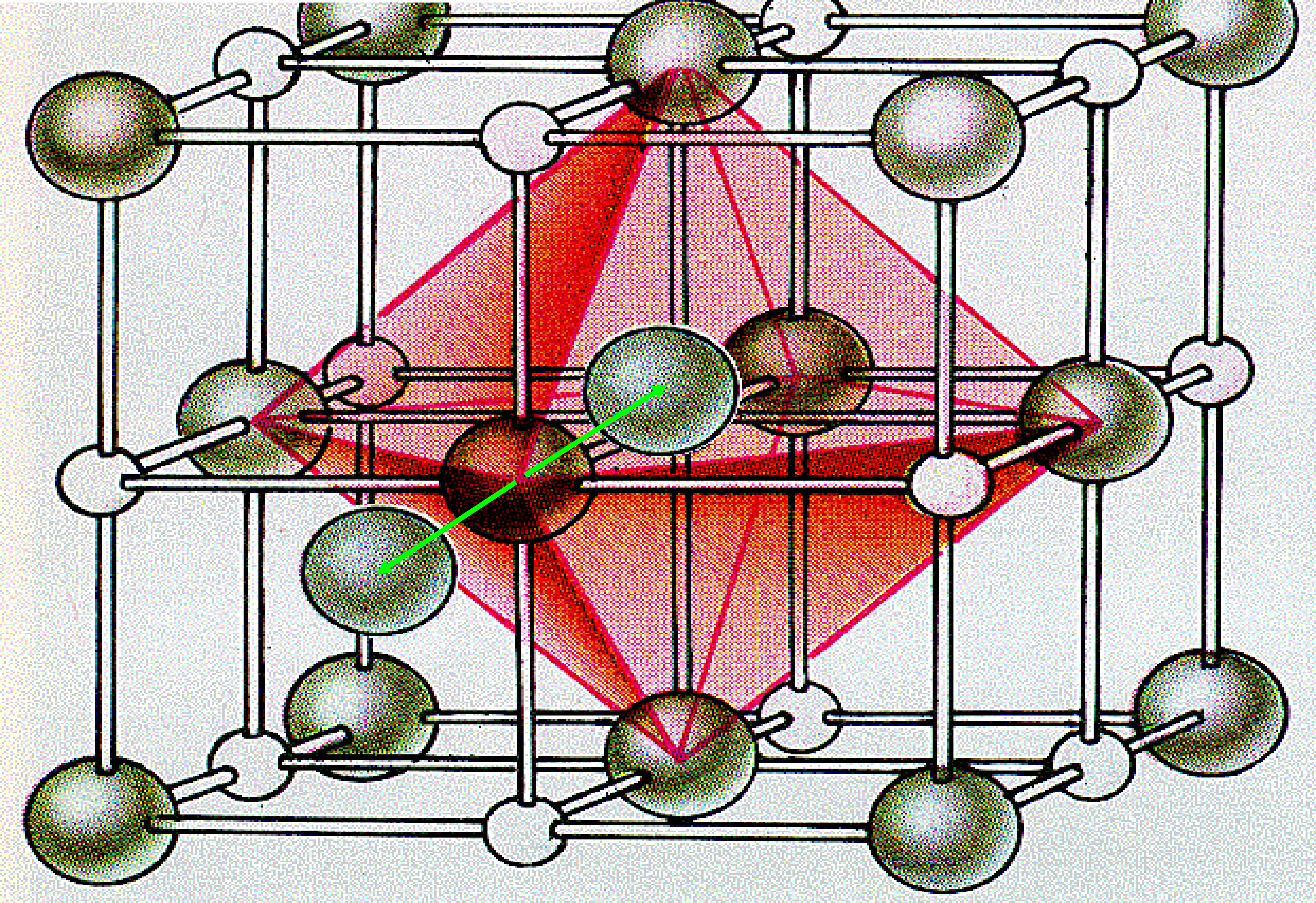
<u>Beispiel:</u> Schwingung einer Stimmgabel



Elektromagnetische Oszillatoren

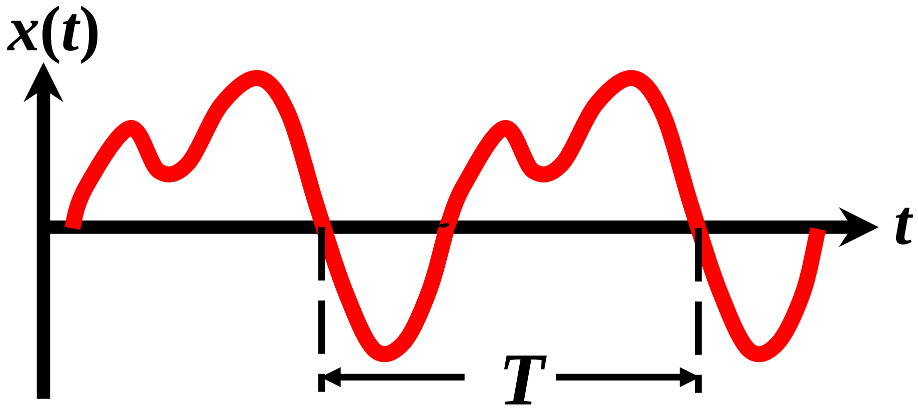


Schwingungen im atomaren Bereich



Schwingungen

Betrachtung eines zeitlich periodischen Vorgangs:



T **Periodendauer**

$\nu = 1/T$ **Frequenz**

$\omega = 2\pi\nu$ **Kreisfrequenz**

Im einfachsten Fall liegt nur *eine Sinusschwingung* der Art

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$$

vor. Dann spricht man von einer

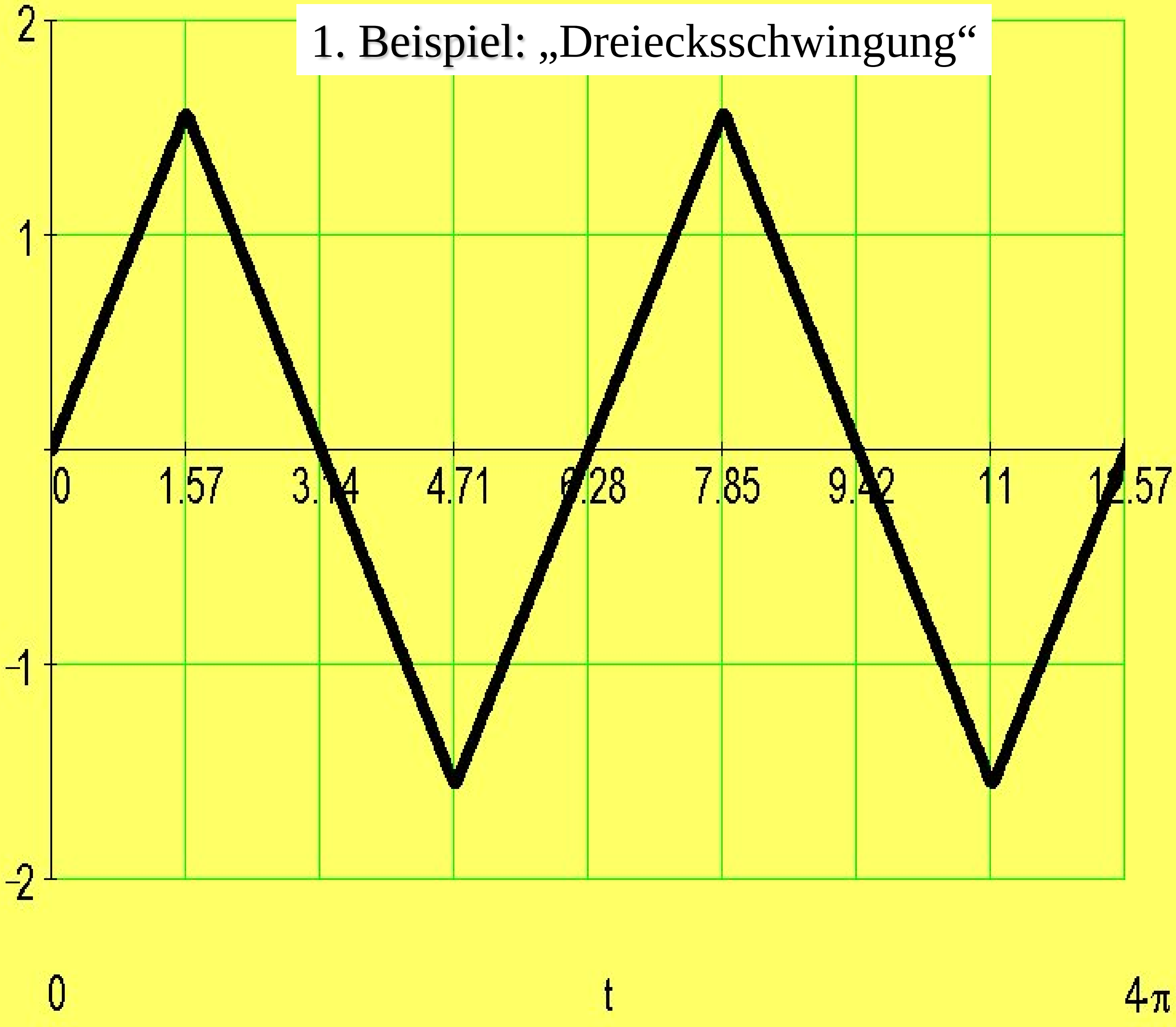
„harmonischen Schwingung“.

Physikalische Systeme, die solche Schwingungen ausführen, werden als *„harmonische Oszillatoren“* bezeichnet.

Beliebige periodische Vorgänge können daher immer aus einzelnen Sinusschwingungen aufgebaut werden (sog. Fouriersynthese).

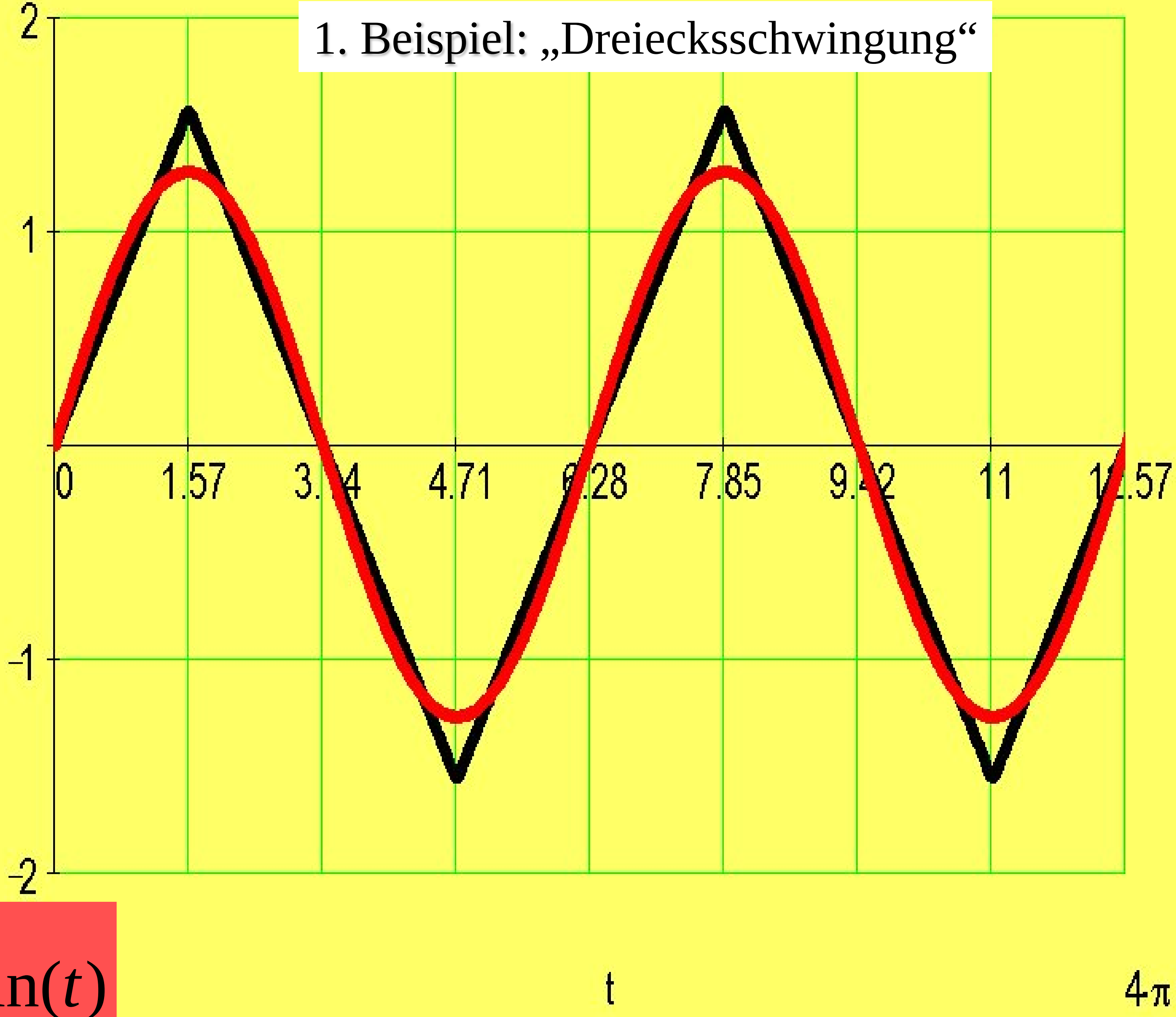
$x(t)$

1. Beispiel: „Dreiecksschwingung“



Fourier-Zerlegung

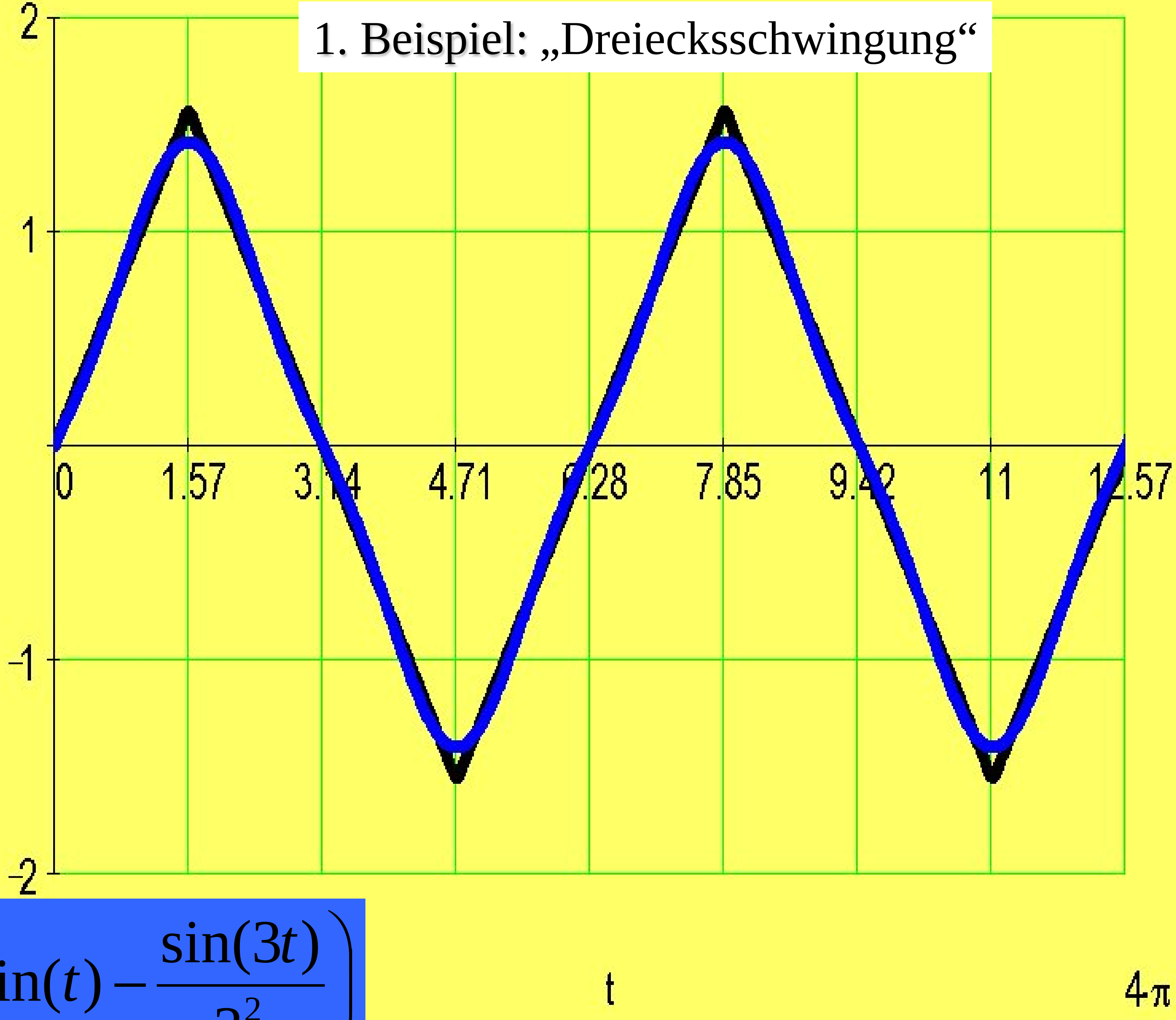
1. Beispiel: „Dreiecksschwingung“



$$x_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t)$$

Fourier-Zerlegung

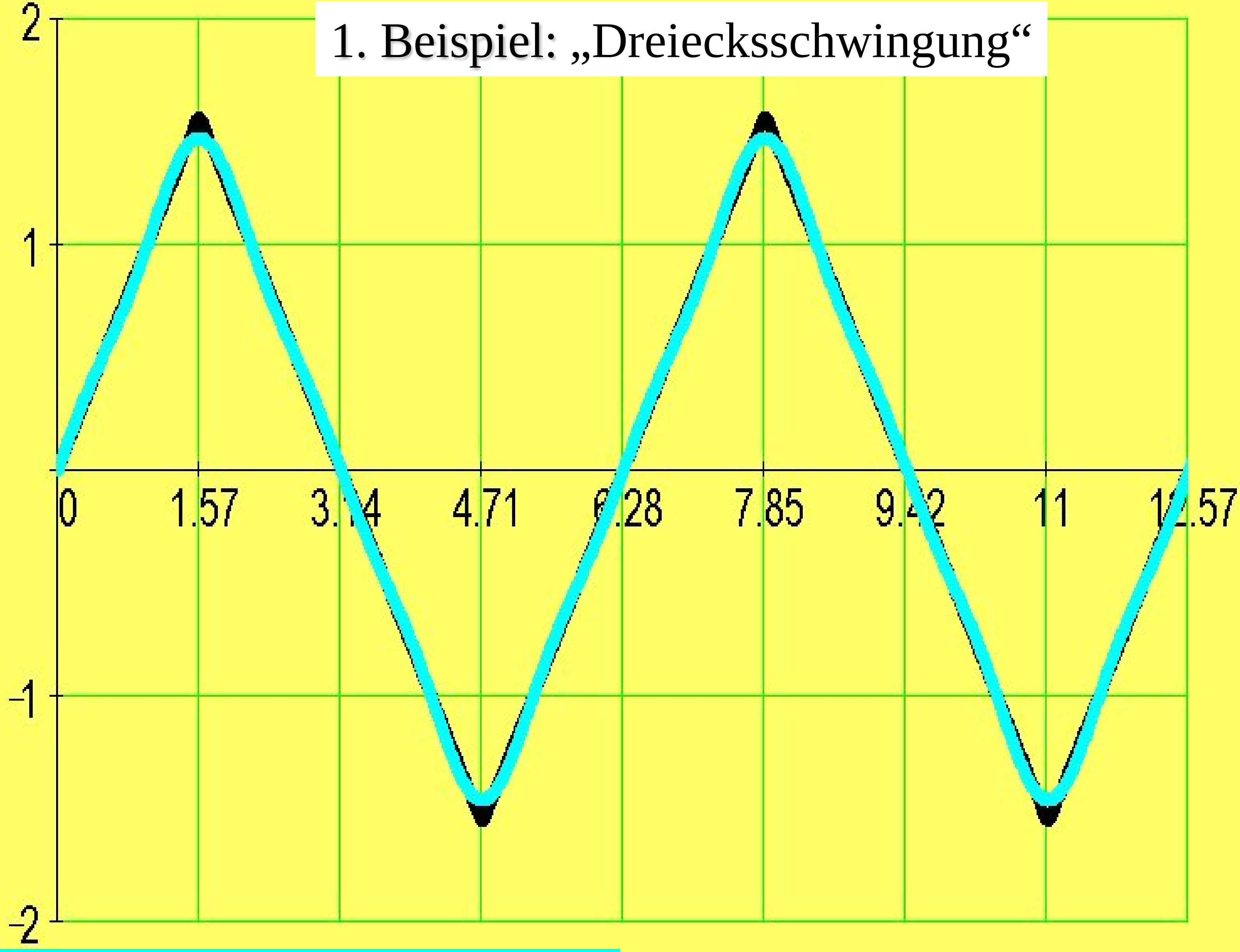
1. Beispiel: „Dreiecksschwingung“



$$x_2(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) - \frac{\sin(3t)}{3^2}\right)$$

Fourier-
Zerlegung

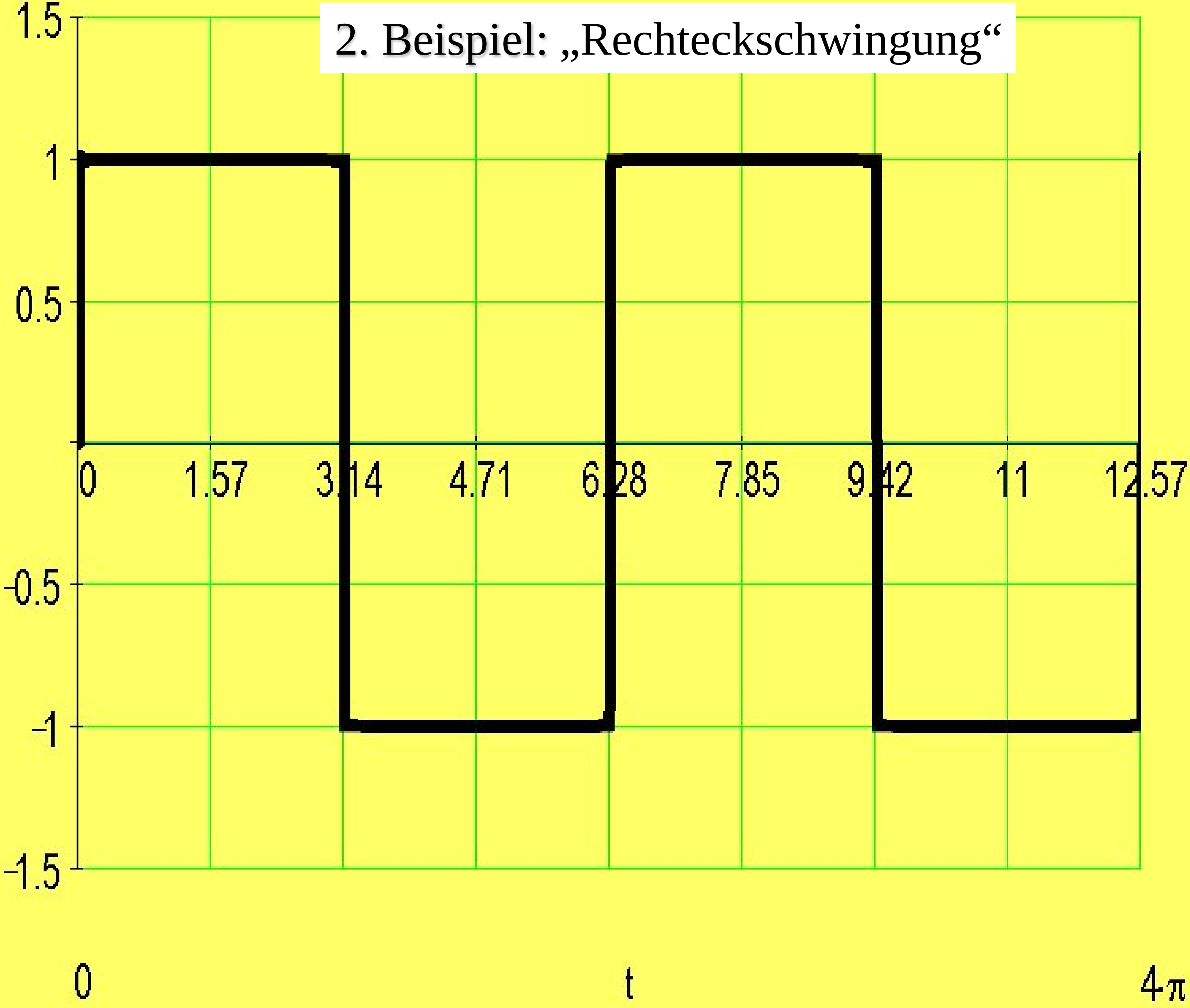
1. Beispiel: „Dreiecksschwingung“



$$x_3(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) - \frac{\sin(3t)}{3^2} + \frac{\sin(5t)}{5^2} \right)$$

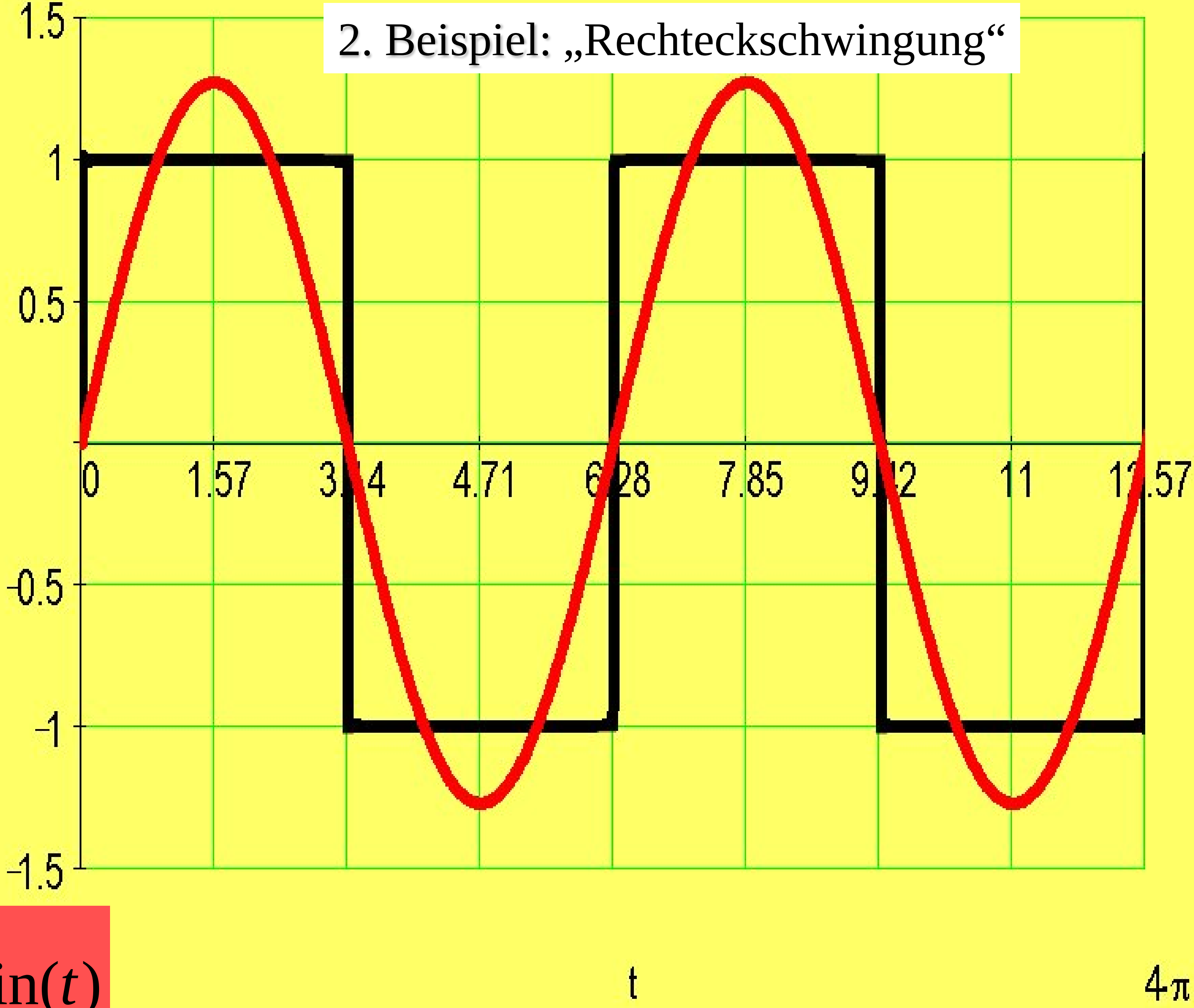
$x(t)$

2. Beispiel: „Rechteckschwingung“



Fourier-
Zerlegung

2. Beispiel: „Rechteckschwingung“



$$x_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t)$$

Fourier-Zerlegung

2. Beispiel: „Rechteckschwingung“

$$x_3(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5}\right)$$

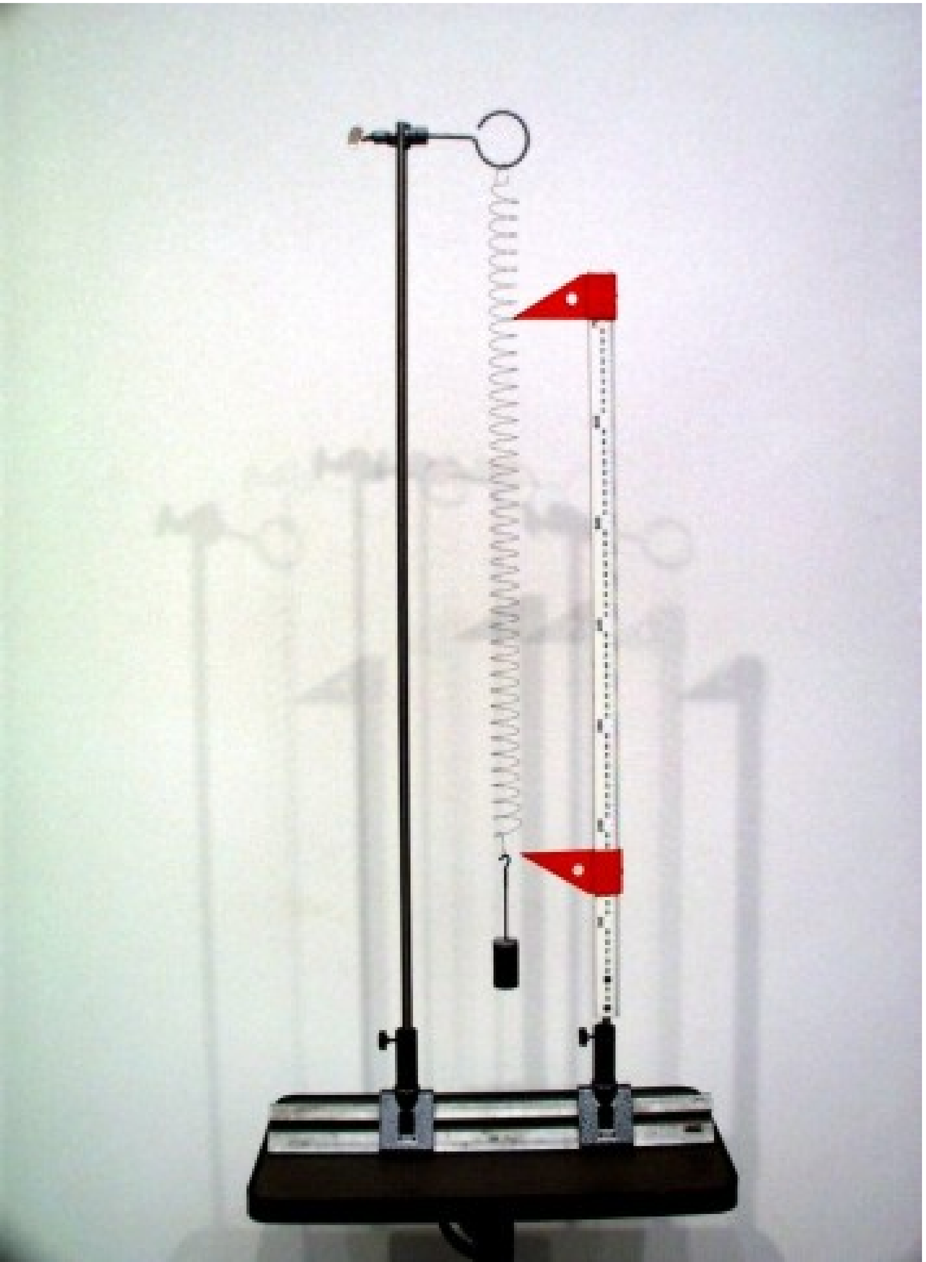
Fourier-Zerlegung

2. Beispiel: „Rechteckschwingung“

$$x_5(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \frac{\sin(9t)}{9} \right)$$

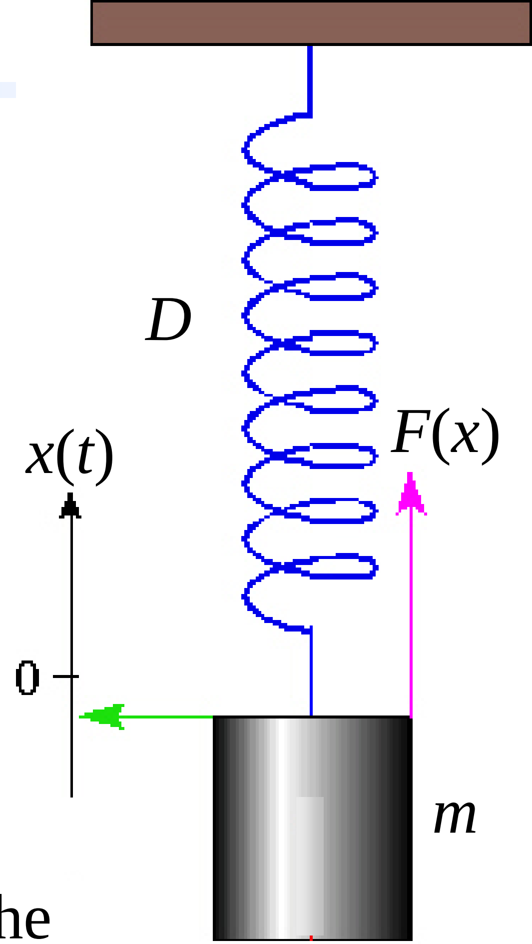
4π

2.8.2 Der harmonische Oszillator



Beim Federpendel war die rücktreibende Kraft:

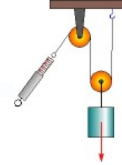
$$F(x) = -Dx$$



Das zweite Newton'sche Gesetz liefert dann die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx(t) \Leftrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{D}{m}x(t) = 0$$

bzw. kürzer geschrieben: $\ddot{x} + \dfrac{D}{m}x = 0$



Mit der Definition $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ergibt sich die Bewegungsgleichung einer Masse m, die an einer Feder mit der Feder-konstanten D hängt:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0}$$

Das ist die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators. Hierbei wurden Reibungskräfte nicht berücksichtigt.

Eine solche Gleichung nennt man „Differentialgleichung“, im folgenden kurz DGL genannt.

Lösung der DGL

Es wird eine *Funktion* gesucht, bei der die 2. zeitliche Ableitung bis auf eine Konstante identisch ist mit der Funktion $x(t)$ selbst.

Ein allgemeiner Lösungsansatz ist:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\omega^2 A\cos(\omega t) - \omega^2 B\sin(\omega t)\\ &= -\omega^2\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)\\ &= -\omega^2 x(t) \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0\end{aligned}$$

Die Konstanten *A* und *B* werden durch die *Anfangsbedingungen* bestimmt:

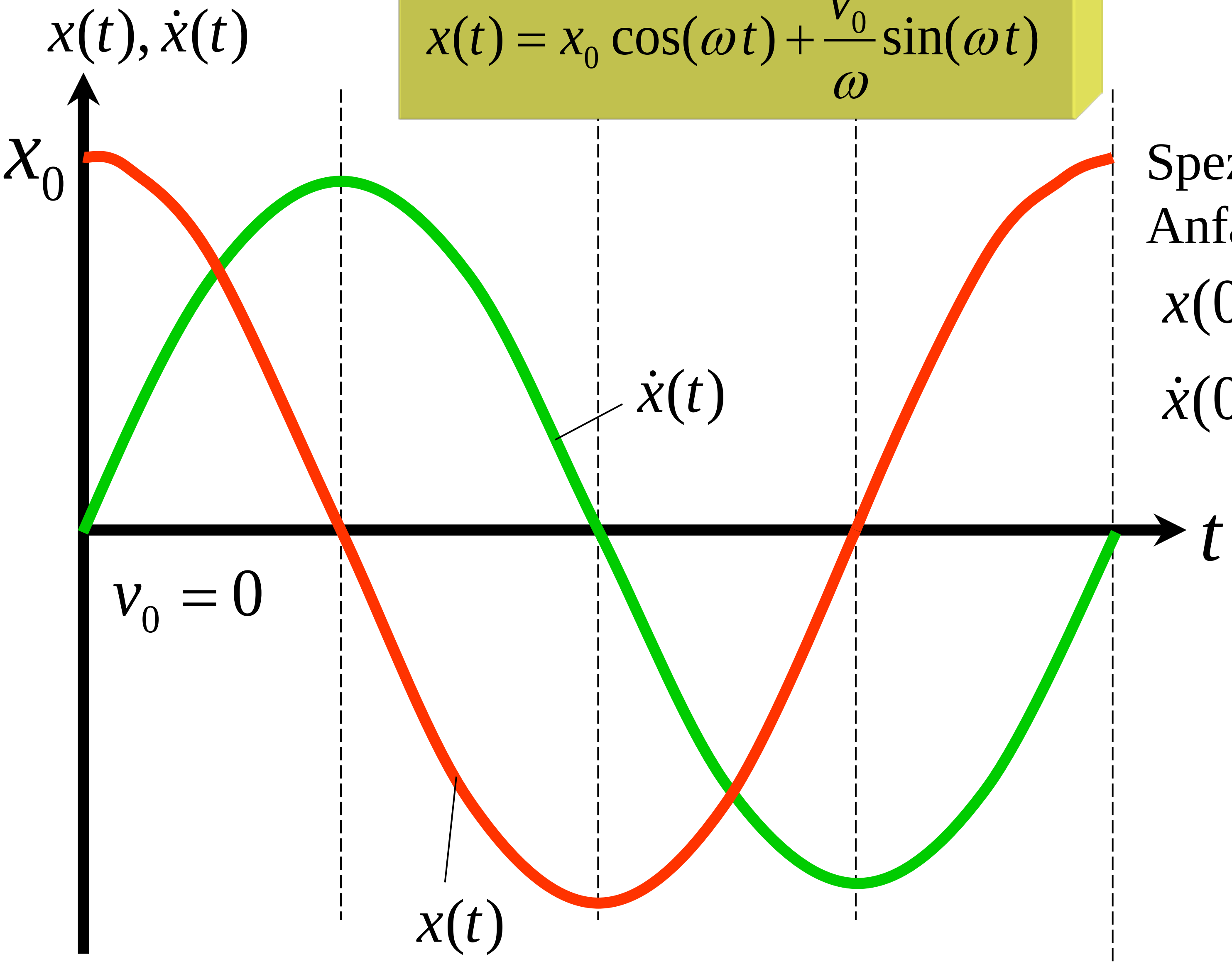
$$t = 0 \quad \Rightarrow \qquad x(0) = x_0 = A$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 = \omega \cdot B$$

allgemeine Lösung:

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$$

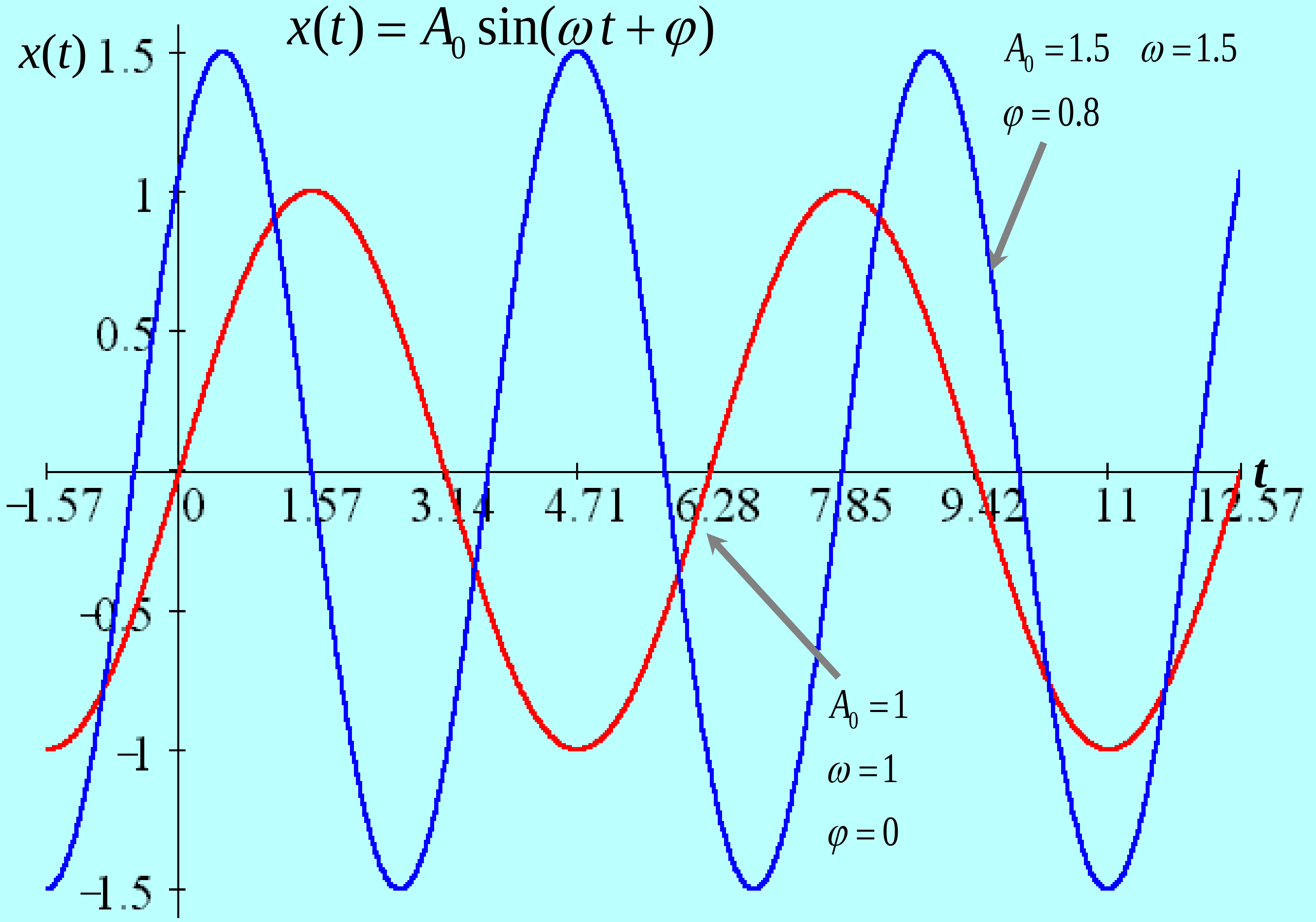
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$



Spezielle Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0$$

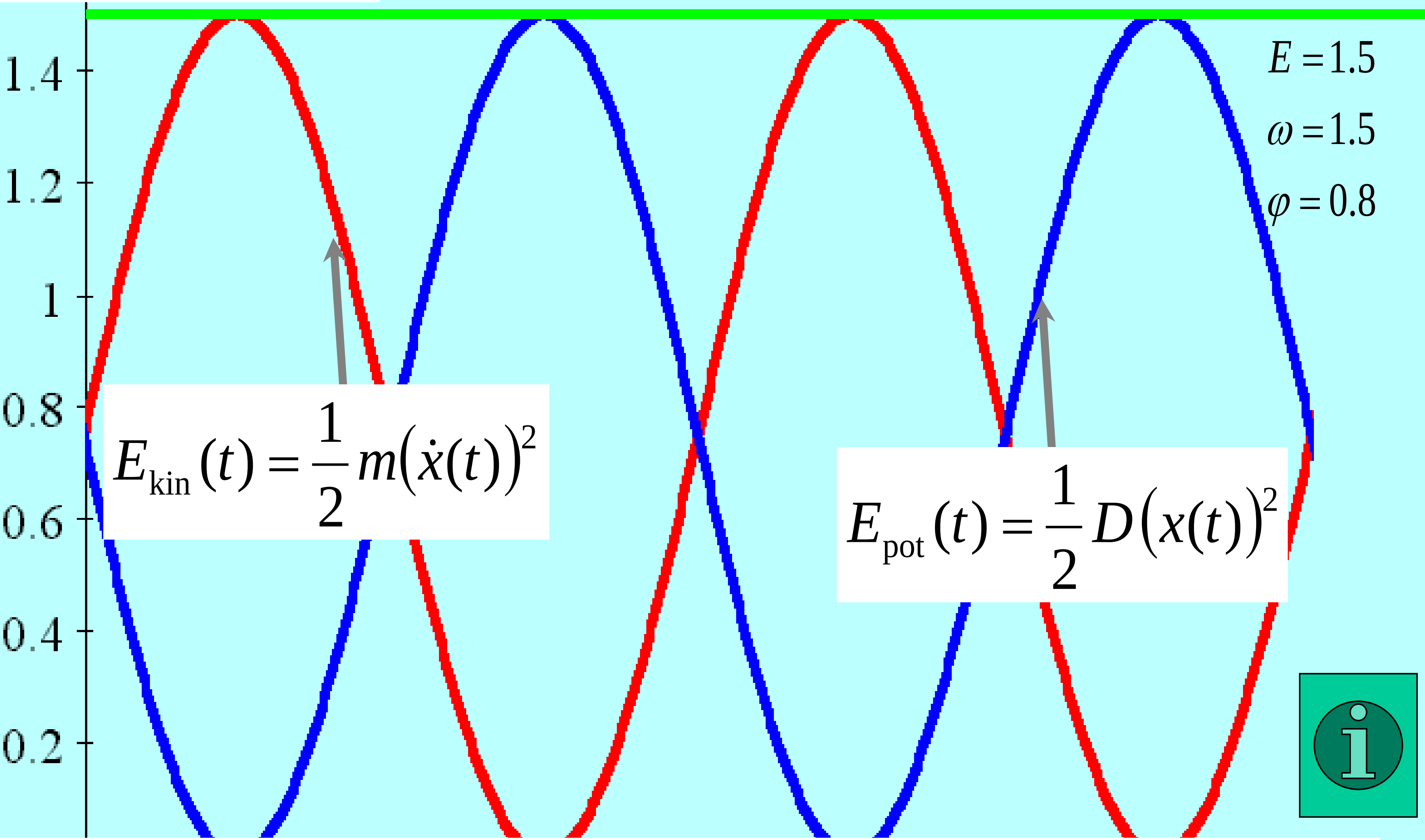
$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$



$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$
$x(t)$
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−1.57
0
1.57
3.14
4.71
6.28
7.85
9.42
11
12.57
t
$A_0 = 1.5 \quad \omega = 1.5$
$\varphi = 0.8$
$A_0 = 1$
$\omega = 1$
$\varphi = 0$

$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Energieaustausch & Energieerhaltung



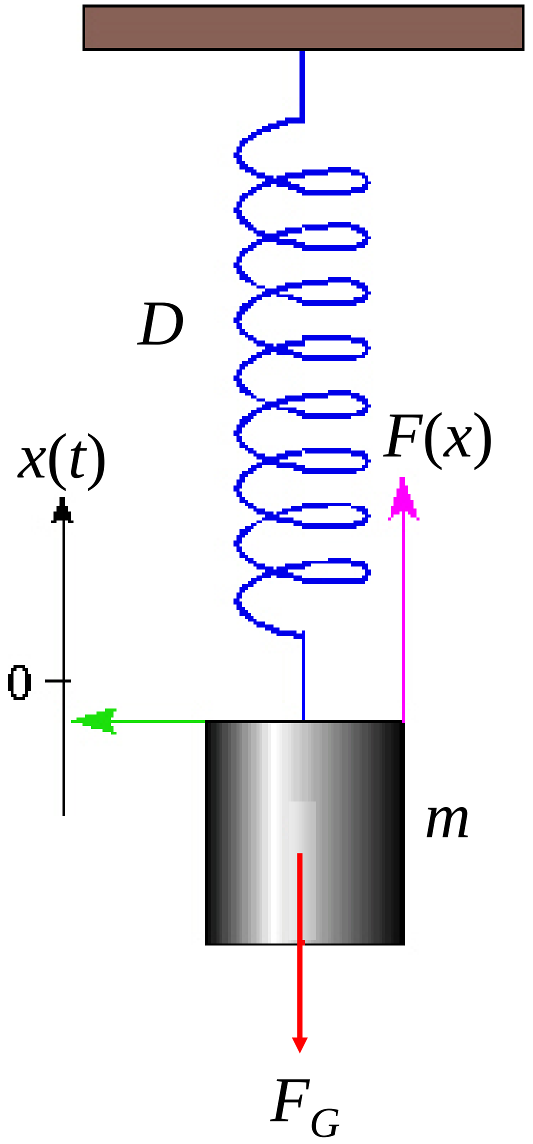
$$E_{\mathrm{kin}}(t) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}(t)\right)^2$$

$$E_{\mathrm{pot}}(t) = \frac{1}{2} D \left(x(t)\right)^2$$

$$E = E_{\mathrm{kin}}(t) + E_{\mathrm{pot}}(t) \qquad D = m\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(A_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(A_0 \sin(\omega t + \varphi)\right)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A_0^2 = const.$$

Ergänzung: Federpendel mit Schwerkraft



Das 2. Newton'sche Axiom ergibt nun:

$$m\ddot{x} = F(x) + F_G$$

$$m\ddot{x} = -Dx - mg$$

$$\omega^2 = D/m \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = -g$$

Das ist eine sog. „*inhomogene DGL*", da auf der rechten Seite eine von Null verschiedene Funktion steht. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL ergibt sich wie folgt:

$$x(t) = x_{\text{part}}(t) + x_{\text{hom}}(t)$$

Sie ist die Summe aus der allg. Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen (partikulären) Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die Lösung der homogenen Gleichung wurde bereits diskutiert. Eine partikuläre Lösung ergibt sich aus der Ruhelage $\ddot{x}(t)=0$. Dann folgt sofort aus der Dehnung der Feder wegen des Hooke'schen Gesetzes:

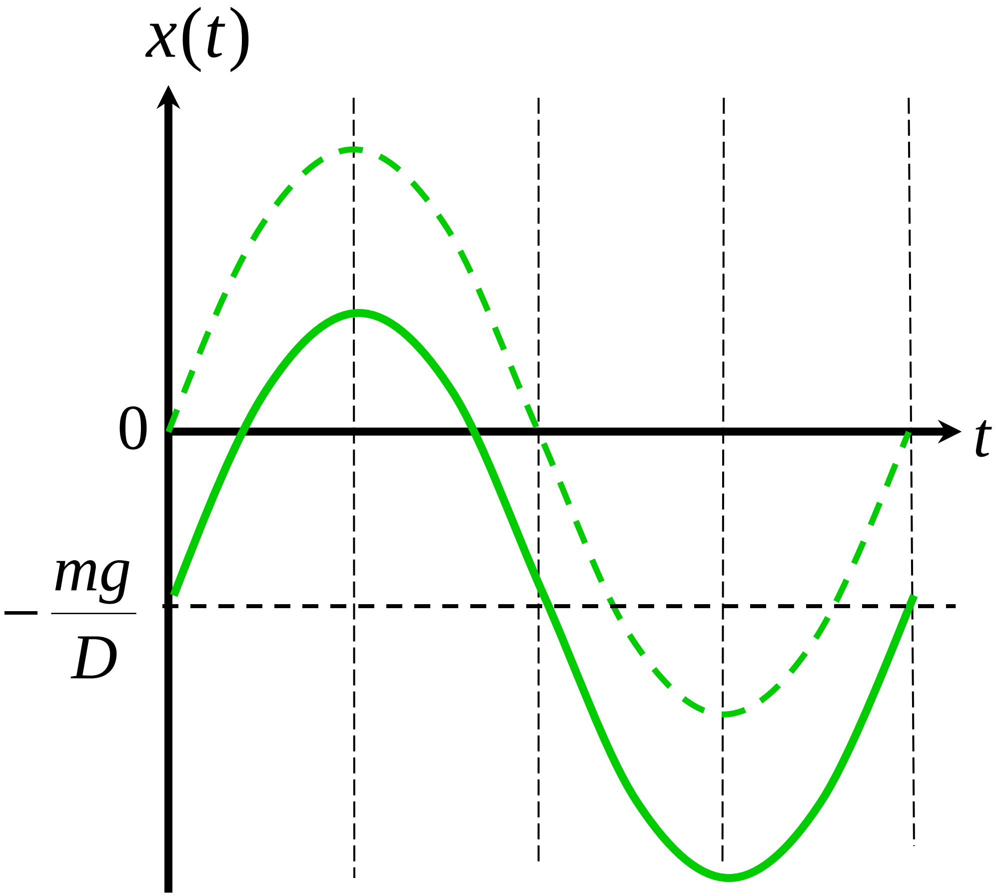
$$x_{\text{part}}(t) = -\frac{m\,g}{D} = \text{const.}$$

Also ergibt sich als allgemeine Lösung für die Bewegung einer Masse an einer Feder unter Berücksichtigung der Gravitation:

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{mg}{D}$$

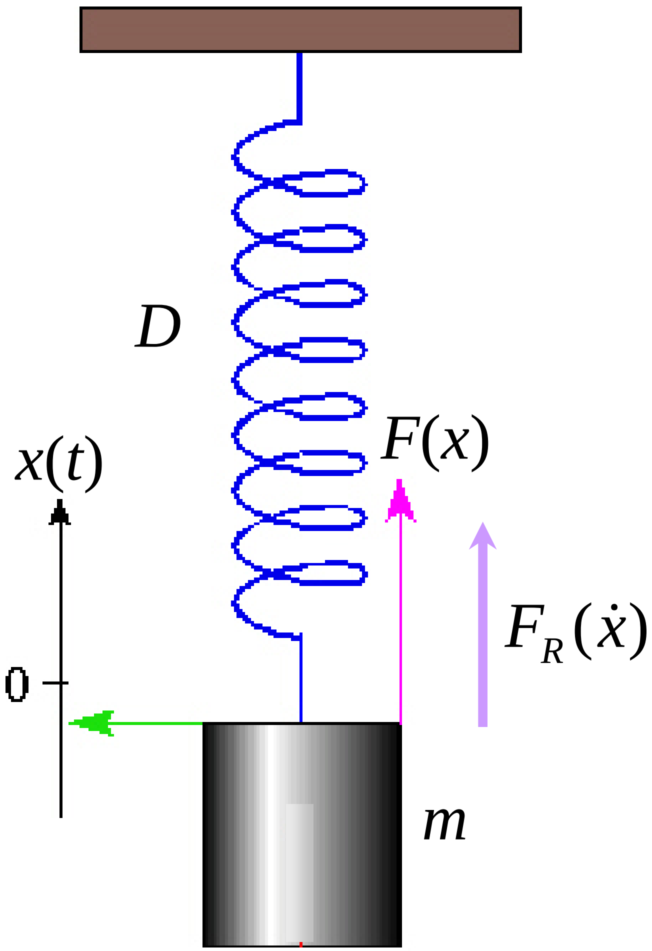
Das Pendel schwingt jetzt um einen verschobenen Nullpunkt.

Graphisch sieht die Bewegung eines Federpendels mit Schwerkraft so aus:



Der gedämpfte harmonische Oszillator

Es wird jetzt noch die Reibung beim Federpendel mit berücksichtigt:



Das 2. Newton‘sche Axiom liefert jetzt:

$$m\ddot{x} = F(x) + F_R(\dot{x})$$

Mit dem Ansatz

$$F_R(\dot{x}) = -\alpha\,\dot{x} \quad \text{(Stokes - Reibung)}$$

folgt sofort die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -Dx - \alpha\,\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Folgende Abkürzungen werden eingeführt:

$$\frac{\alpha}{m} = 2\gamma \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Damit erhält man wieder eine lineare und homogene DGL:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$$

Diese lösen wir mit dem Ansatz:

$$x(t) = A\exp(\Omega t)$$
$$\dot{x}(t) = \Omega A\exp(\Omega t)$$
$$\ddot{x}(t) = \Omega^2 A\exp(\Omega t)$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\left(\Omega^2 + 2\gamma\,\Omega + \omega_0^2\right)A\exp(\Omega t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 + 2\gamma\,\Omega + \omega_0^2 = 0$$

$$\Omega_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Die allgemeine Lösung lautet: $x(t) = A_1\exp(\Omega_1 t) + A_2\exp(\Omega_2 t)$

Die Amplituden A_1 und A_2 werden wieder für $t = 0$ durch die Anfangs-bedingungen festgelegt:

$$x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$$

Die Lösung hängt jetzt entscheidend davon ab, wie groß die Dämpfung γ im Vergleich zu der Größe ω_0^2 ist. Hierbei müssen drei Fälle unterschieden werden:

1. Fall: Schwache Dämpfung, der „Schwingfall“ $\gamma < \omega_0$

2. Fall: Starke Dämpfung, der „Kriechfall“ $\gamma > \omega_0$

3. Fall: Der aperiodische Grenzfall $\gamma = \omega_0$

1. Fall: Schwache Dämpfung, der „Schwingfall“

$$\gamma < \omega_0$$

allgemeine Lösung:

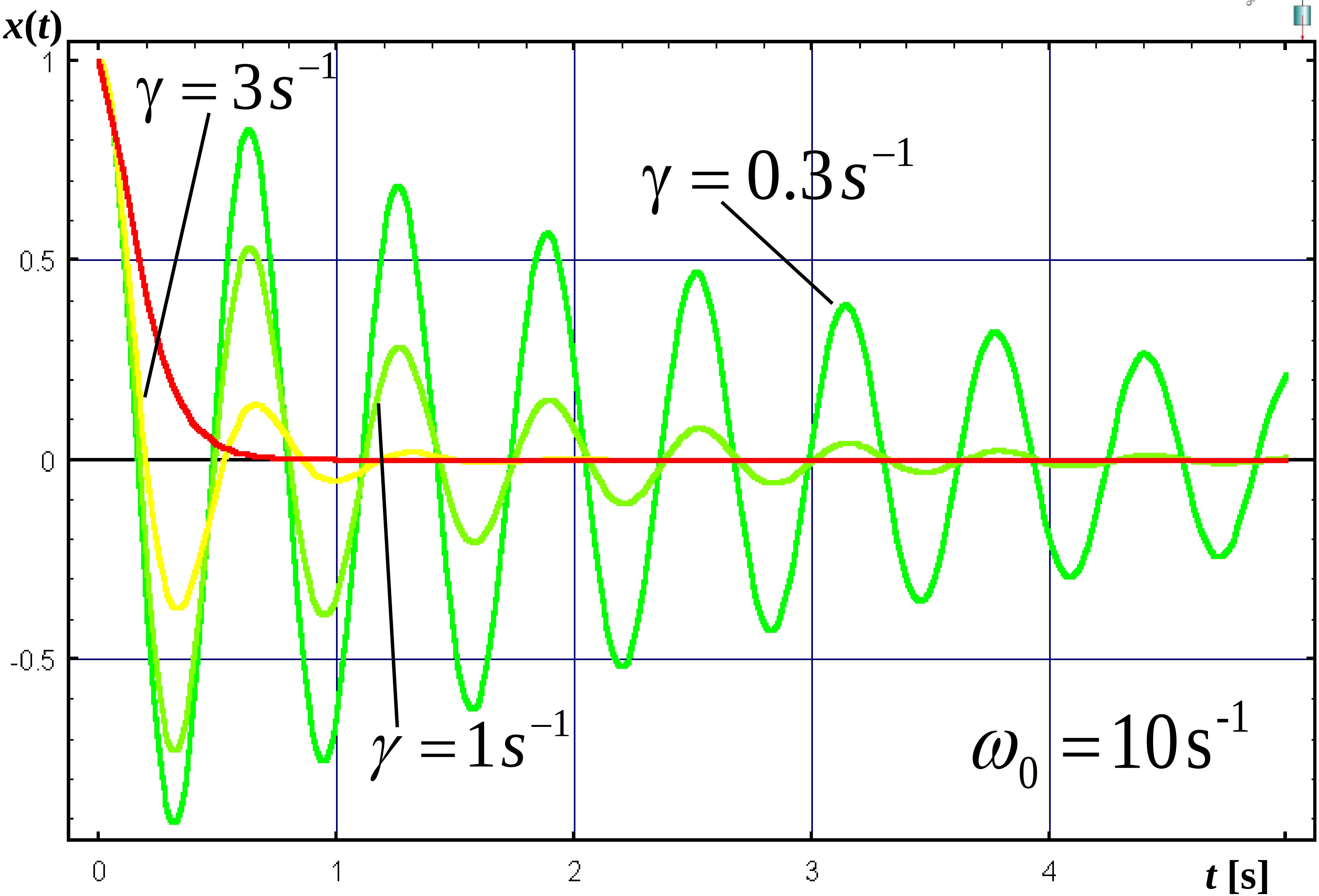
$$\boxed{x(t) = \left(x_0 \cos \omega t + \frac{x_0 \gamma + v_0}{\omega} \sin \omega t \right) e^{-\gamma t}}$$

mit

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}$$

Die Lösung ist eine Schwingung, deren Amplitude exponentiell gedämpft ist und damit gegen Null absinkt im Laufe der Zeit.

Für zu vernachlässigende Dämpfung ($\gamma \rightarrow 0$), geht die Schwingung natürlich wieder in die des ungedämpften harmonischen Oszillators über.



x(t)
1
0.5
0
-0.5
0
1
2
3
4
t [s]
$\gamma = 3s^{-1}$
$\gamma = 0.3s^{-1}$
$\gamma = 1s^{-1}$
$\omega_0 = 10s^{-1}$

2. Fall: Starke Dämpfung, der „Kriechfall“

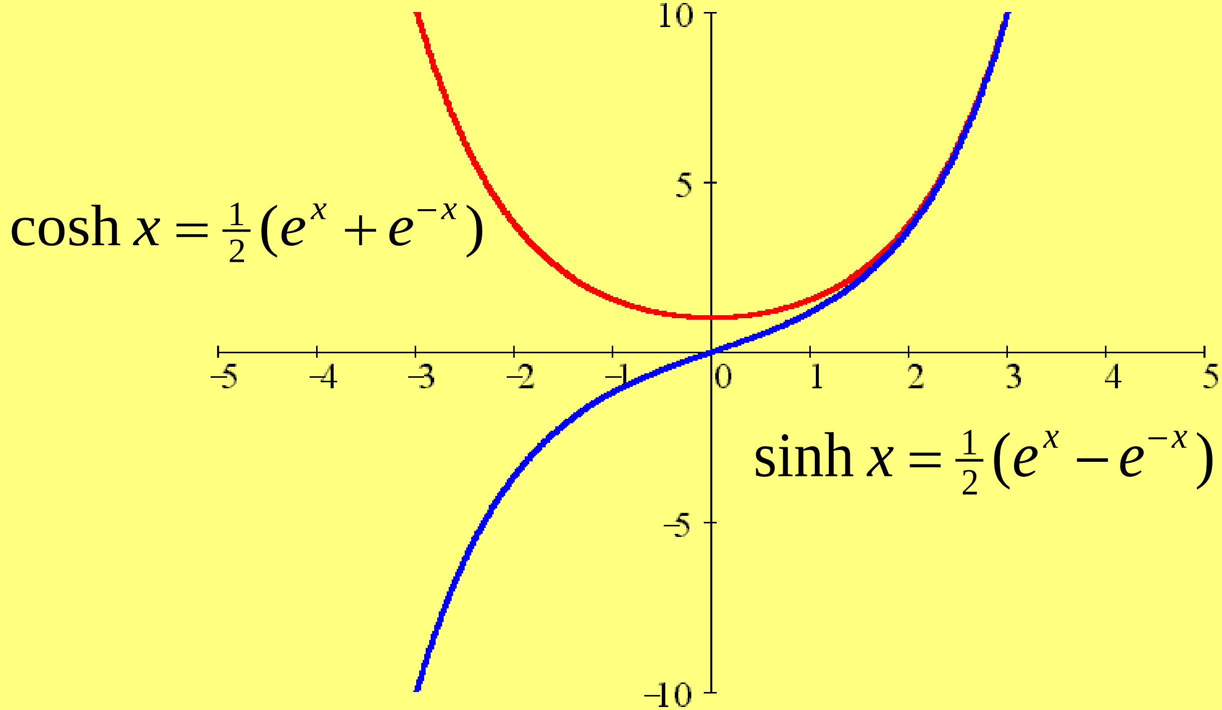
$$\gamma > \omega_0$$

allgemeine Lösung:

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 \cosh \tilde{\omega} t + \frac{x_0 \gamma + v_0}{\tilde{\omega}} \sinh \tilde{\omega} t \right) e^{-\gamma t}}$$

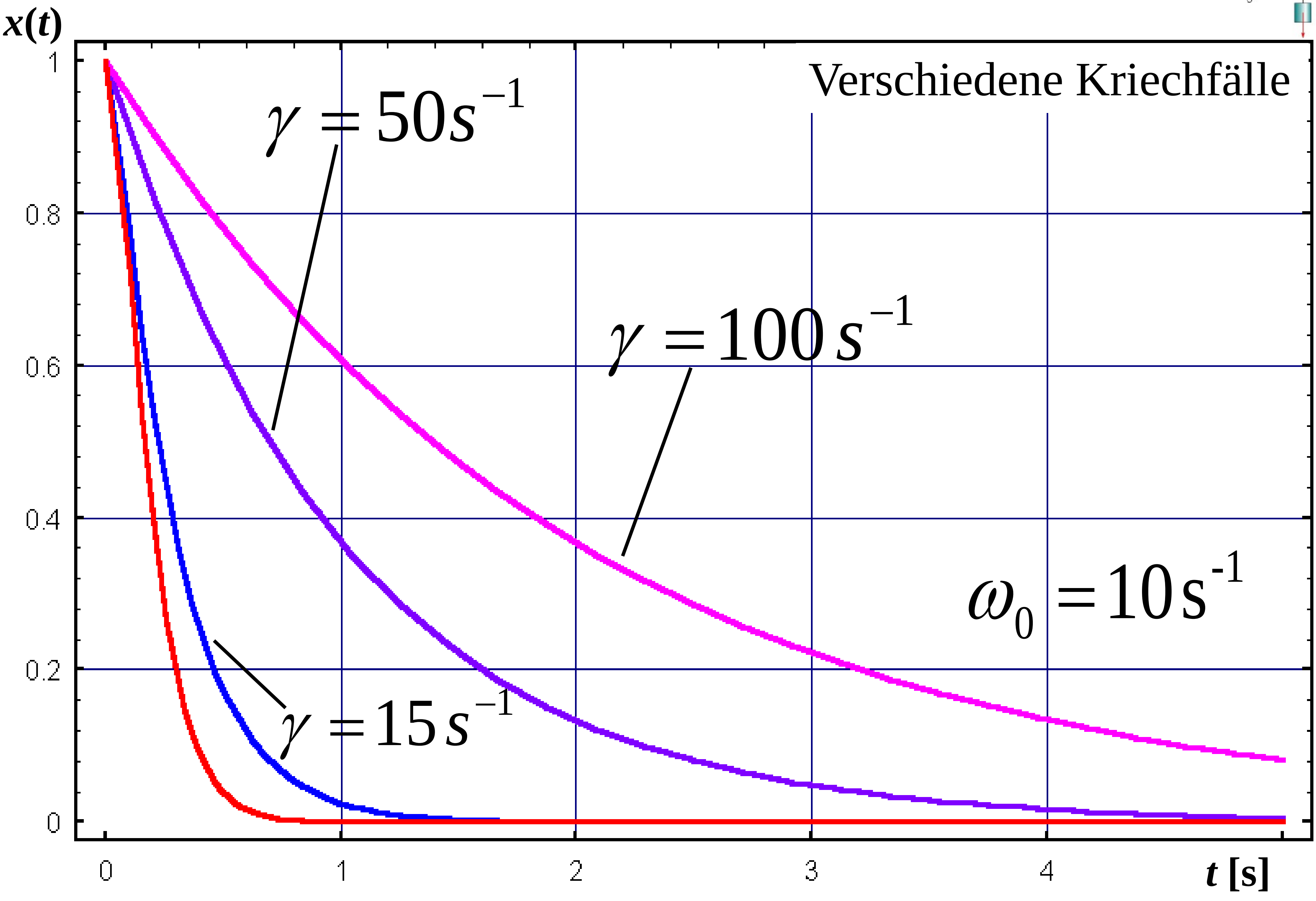
mit

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} - 1}$$



Es ist $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

und $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$


x(t)
Verschiedene Kriechfälle
$\gamma = 50 s^{-1}$
$\gamma = 100 s^{-1}$
$\gamma = 15 s^{-1}$
$\omega_0 = 10 s^{-1}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
t [s]

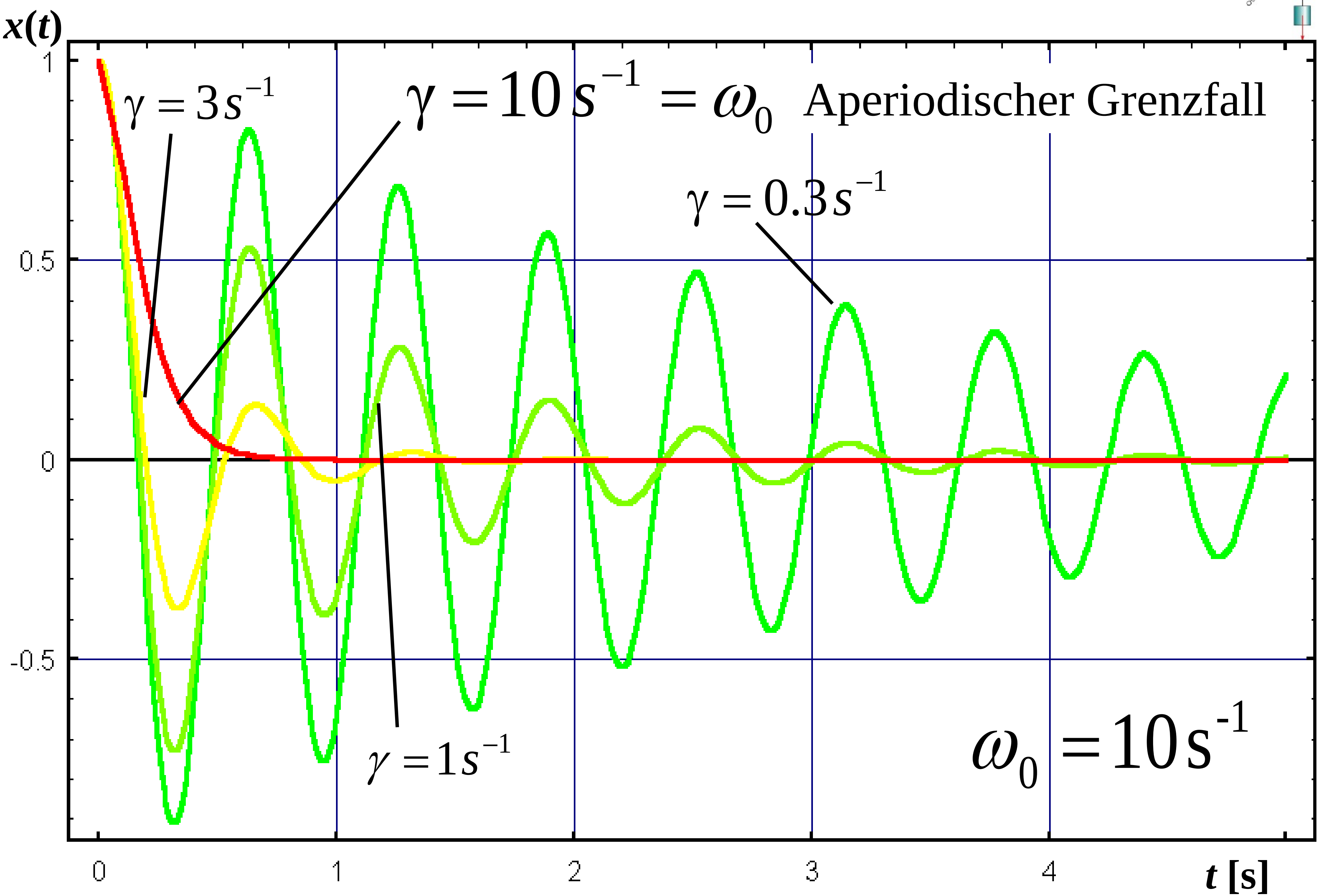
3. Fall: Aperiodischer Grenzfall

$$\gamma = \omega_0$$

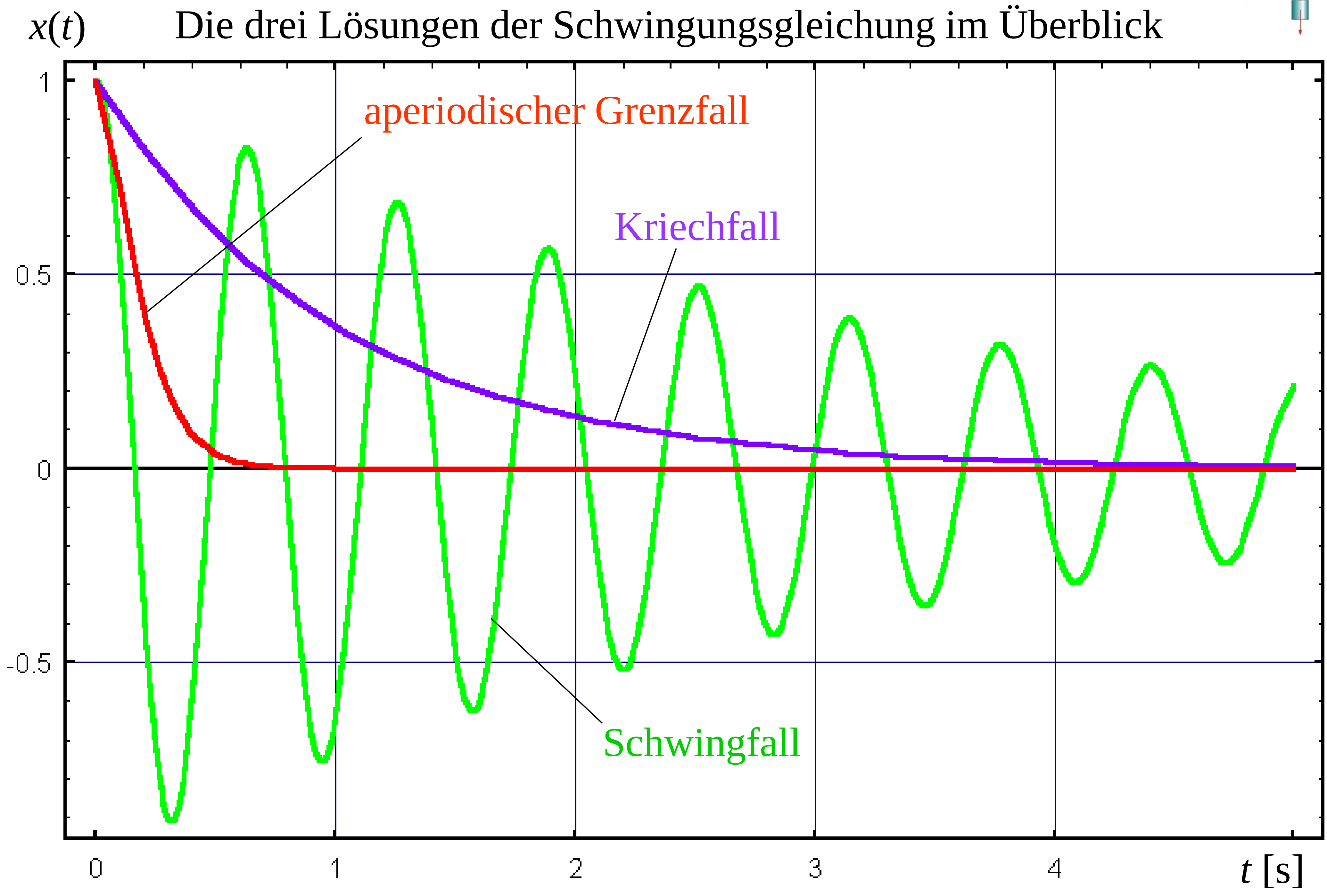
allgemeine Lösung:

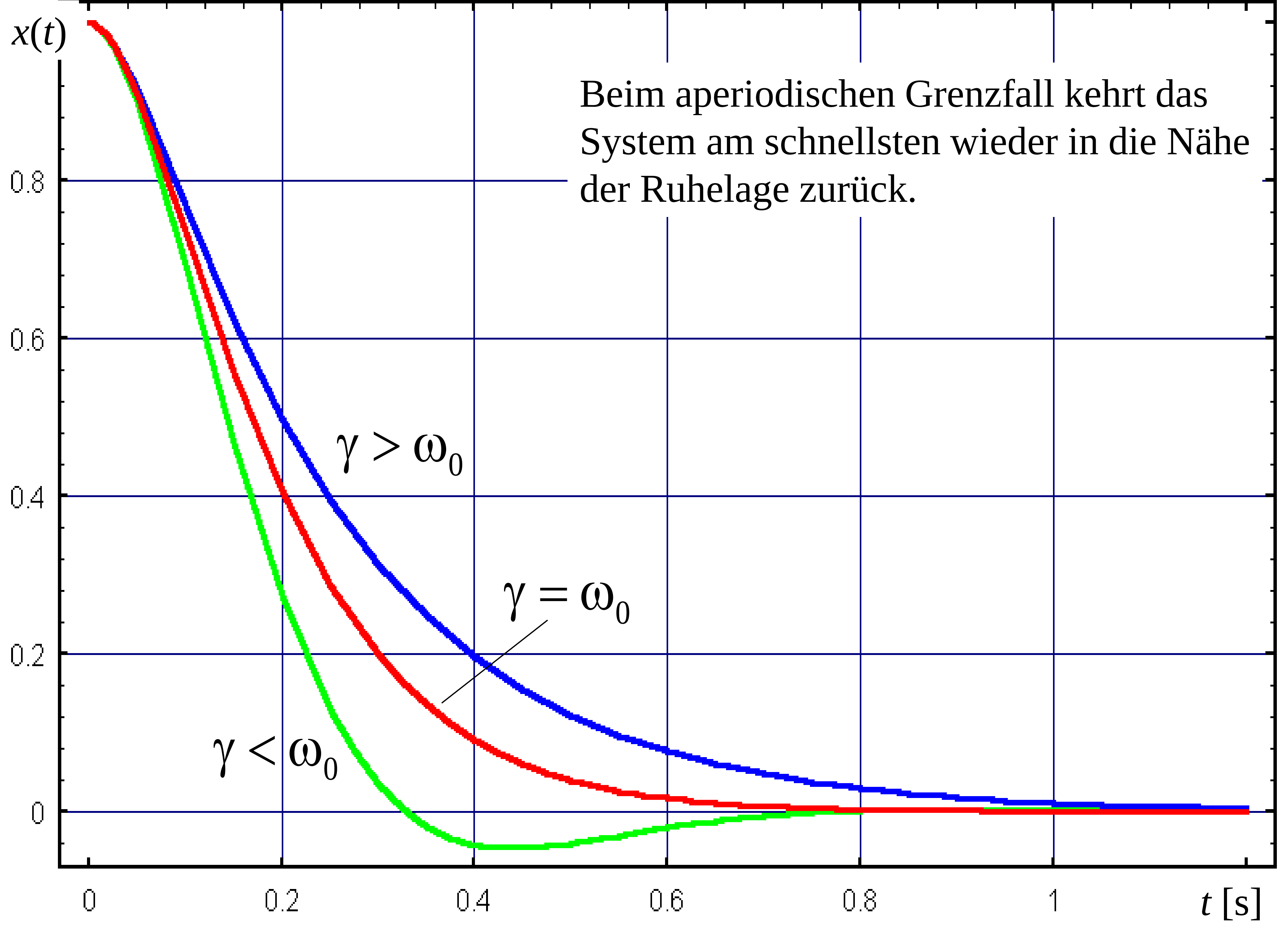
$$x(t) = \lim_{\omega \to 0} \left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{x_0 \gamma + v_0}{\omega} \sin(\omega t) \right) e^{-\gamma t}$$

$$\boxed{x(t) = \left[x_0 + \left(x_0 \gamma + v_0 \right) t \right] e^{-\gamma t}}$$

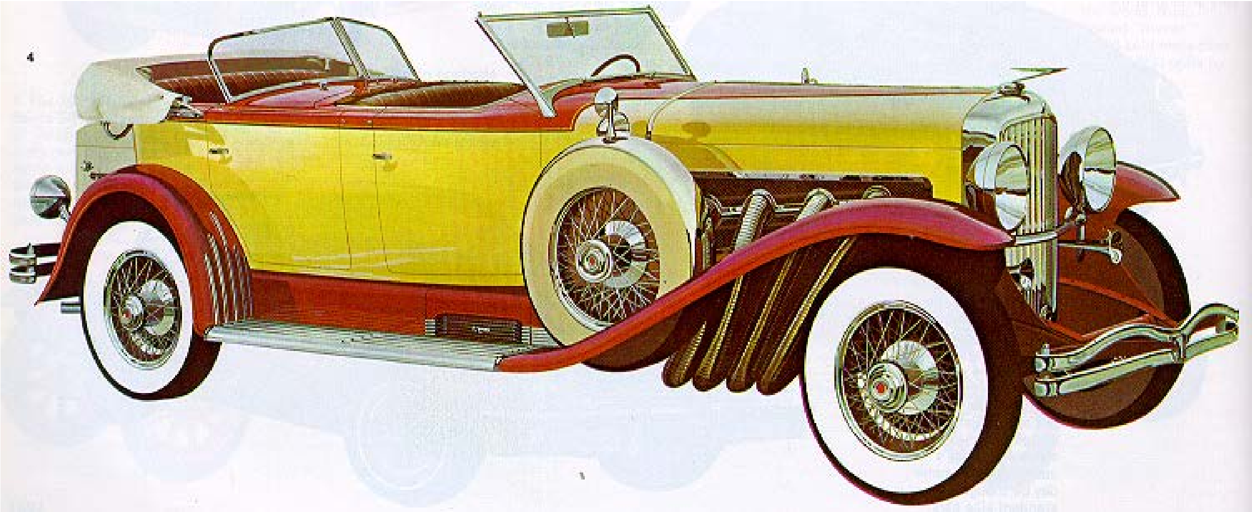

x(t)
1
0.5
0
-0.5
0
1
2
3
4
t [s]
γ = 3s⁻¹
γ = 10 s⁻¹ = ω₀ Aperiodischer Grenzfall
γ = 0.3s⁻¹
γ = 1s⁻¹
ω₀ = 10s⁻¹

Die drei Lösungen der Schwingungsgleichung im Überblick




x(t)
Beim aperiodischen Grenzfall kehrt das System am schnellsten wieder in die Nähe der Ruhelage zurück.
0.8
0.6
0.4
0.2
0
γ > ω0
γ = ω0
γ < ω0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t [s]

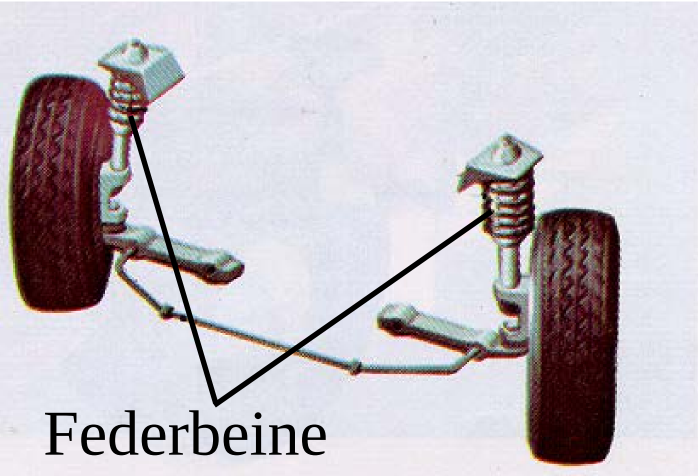
Duesenberg 1930

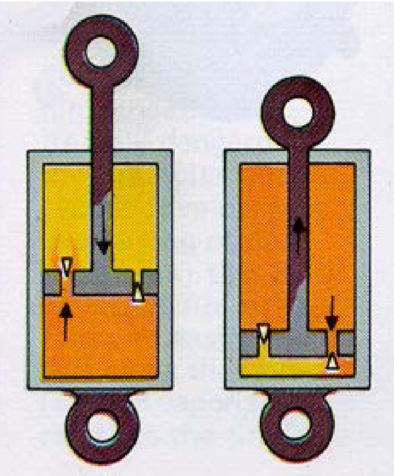


Feder

Stoßdämpfer

Masse (Rad)

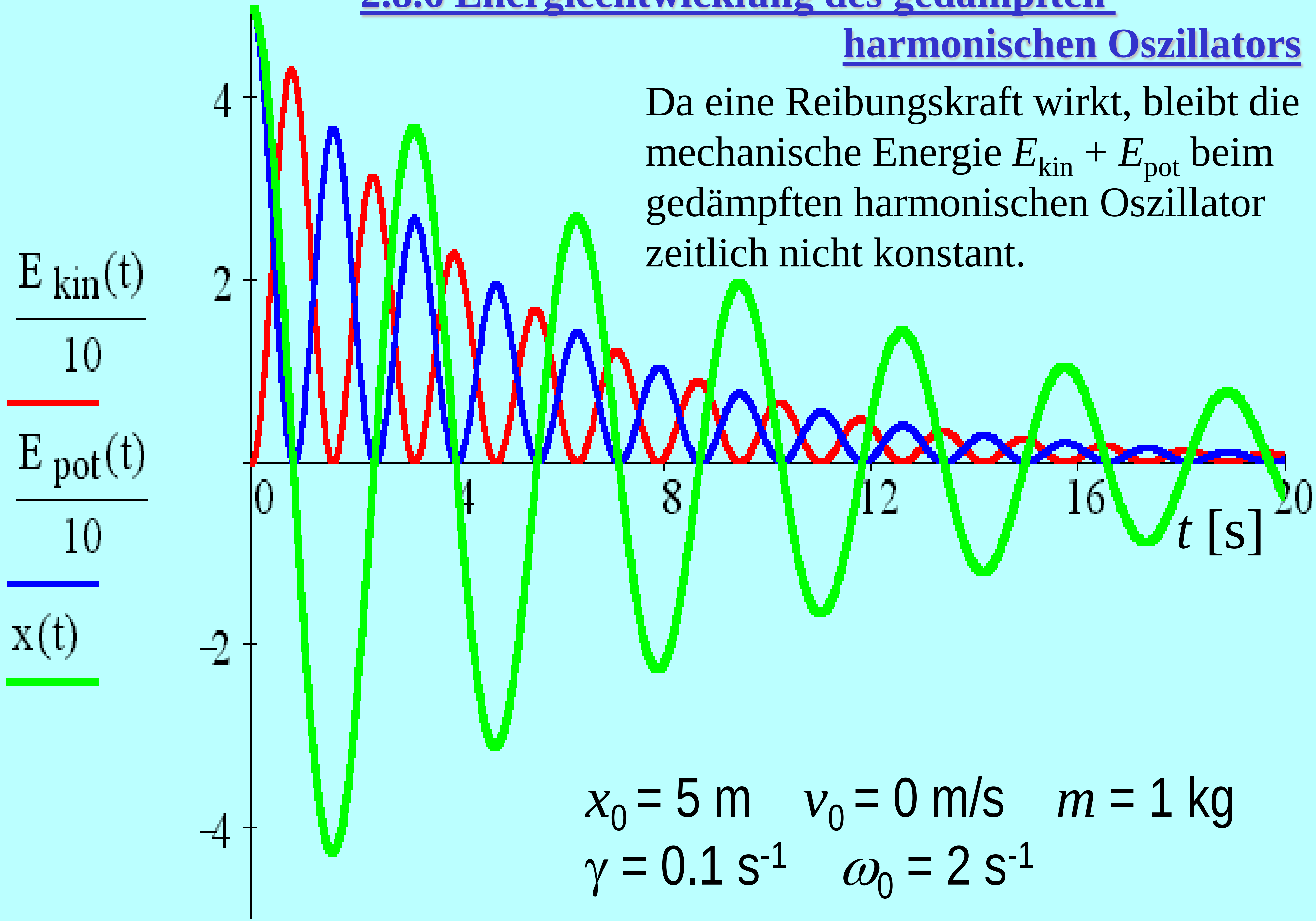




Beispiel: Anwendung der aperiodischen Dämpfung beim Stoßdämpfer im Auto.

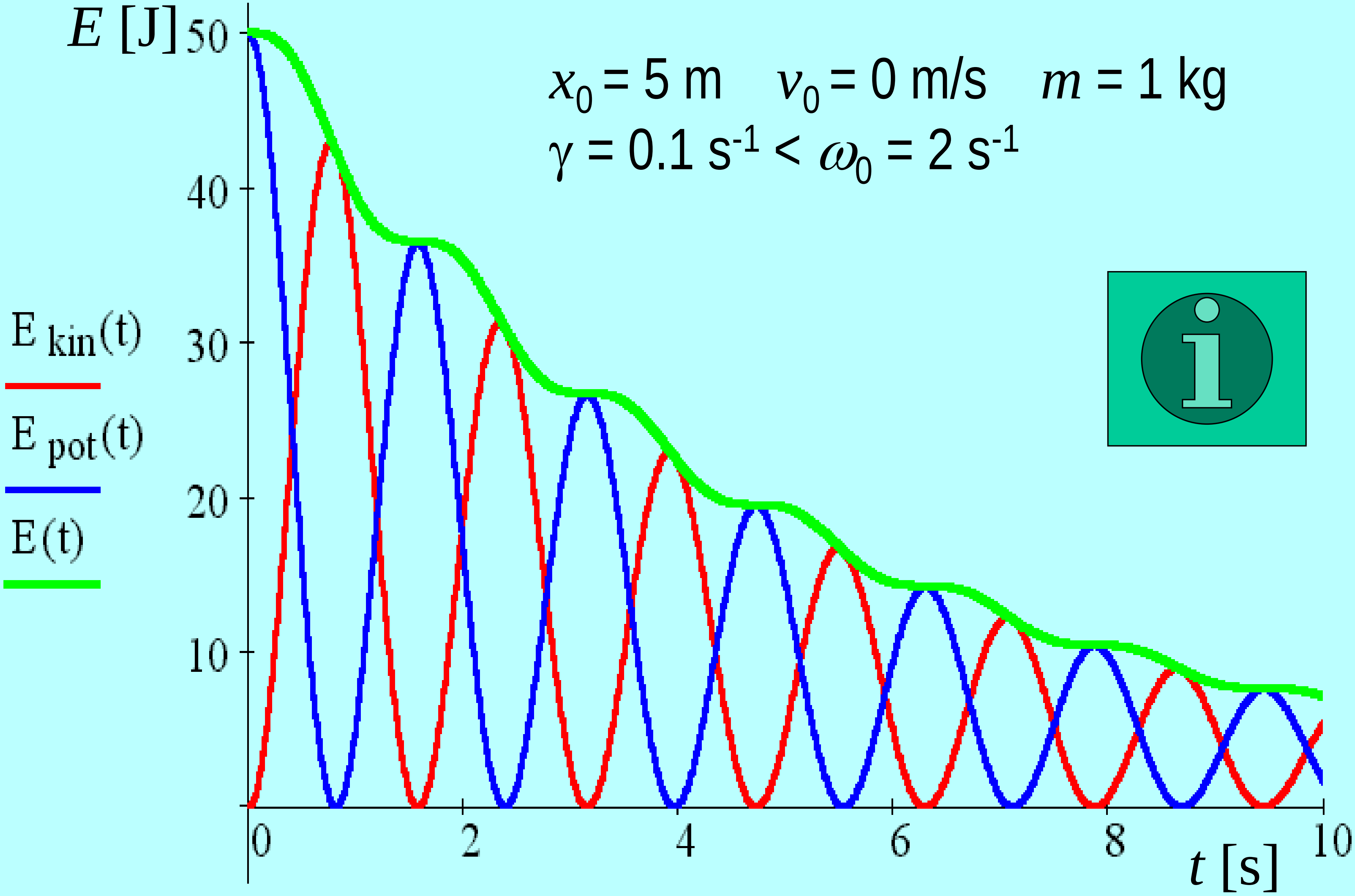
2.8.6 Energieentwicklung des gedämpften harmonischen Oszillators

Da eine Reibungskraft wirkt, bleibt die mechanische Energie $E_{kin} + E_{pot}$ beim gedämpften harmonischen Oszillator zeitlich nicht konstant.



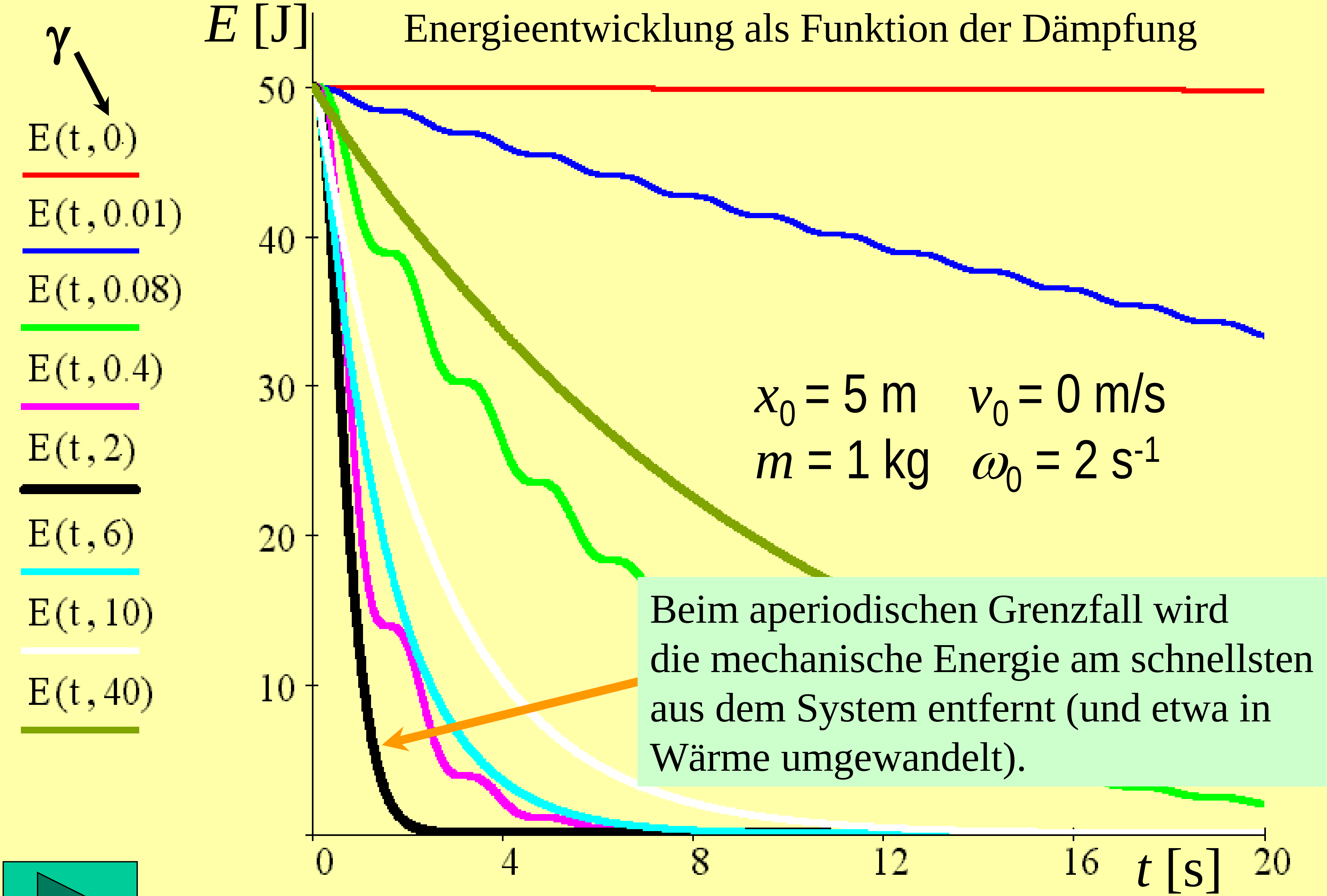
$x_0 = 5$ m $v_0 = 0$ m/s $m = 1$ kg

$\gamma = 0.1\ s^{-1}$ $\omega_0 = 2\ s^{-1}$



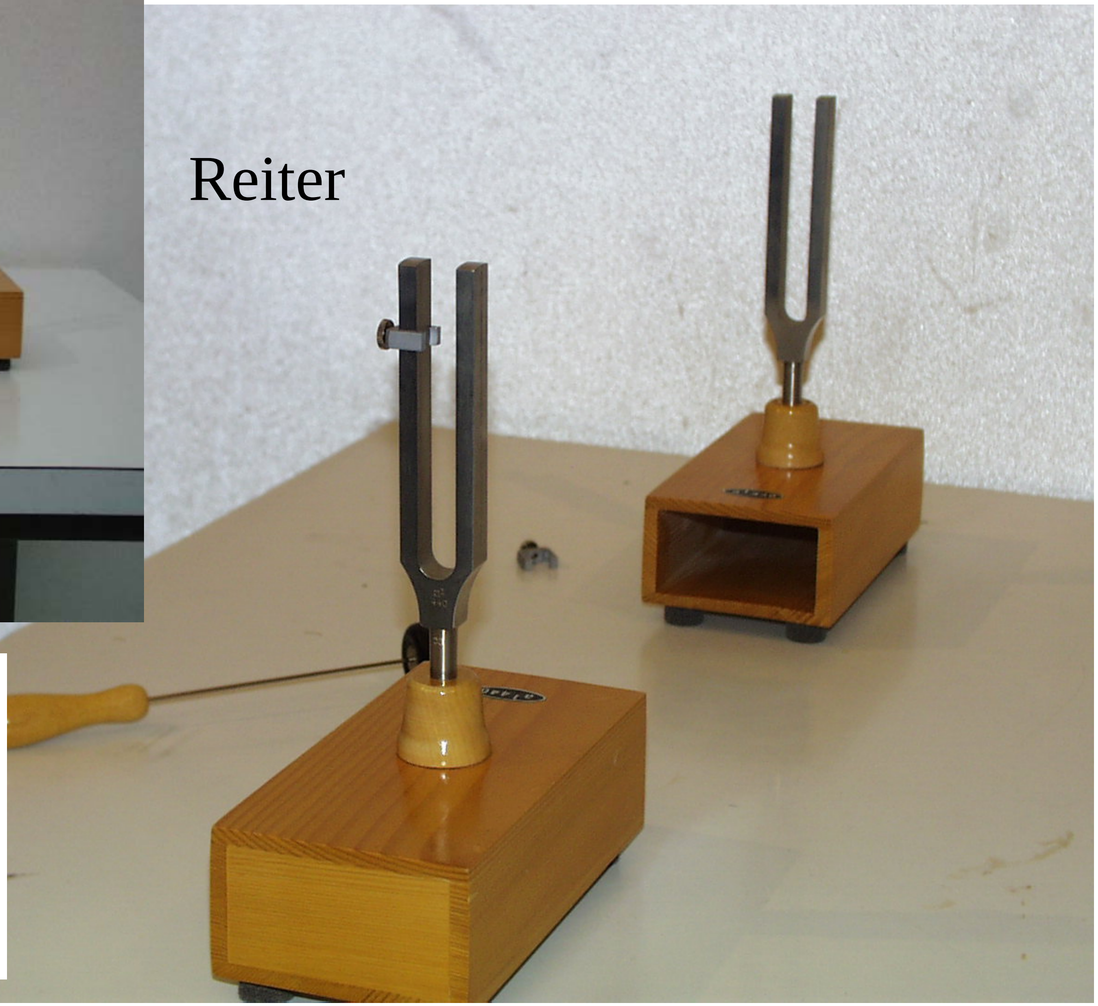
E [J]
50
40
30
20
10
0
2
4
6
8
10
t [s]
x_0 = 5 m v_0 = 0 m/s m = 1 kg
γ = 0.1 s^{-1} < ω_0 = 2 s^{-1}
$E_{kin}(t)$
$E_{pot}(t)$
$E(t)$

Energieentwicklung als Funktion der Dämpfung



Erzwungene Schwingungen

Mit Reiter sind die Frequenzen verschieden; eine resonante Anregung findet nicht mehr statt.



Ohne Reiter haben beide Stimm-gabeln dieselbe Frequenz. Wird die eine angeregt, schwingt auch die zweite mit (Resonanz).

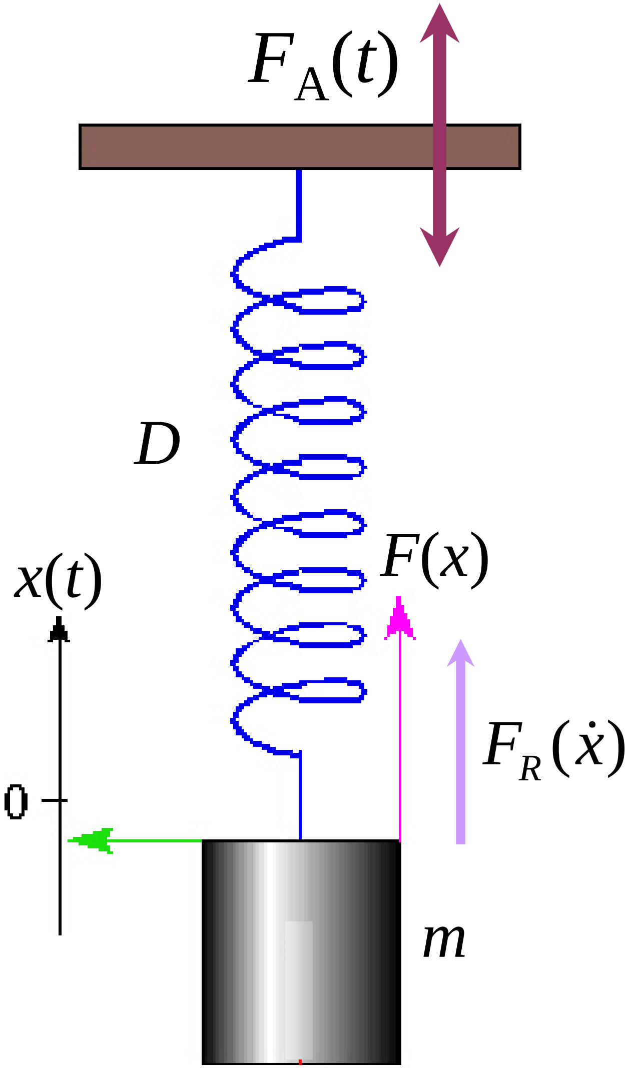
Es wirkt jetzt von außen eine periodische Kraft ausgeübt, die die Masse *m* zu erzwungenen Schwingungen anregt. Wir betrachten den einfachsten Fall einer cosinus-förmigen Anregung:

$$F_{\mathrm{A}}(t) = F_0 \cos(\omega_{\mathrm{E}} t)$$

Das 2. Newton‘sche Gesetz ergibt dann die Bewegungsgleichung:

$$m\,\ddot{x} = -D\,x - \alpha\,\dot{x} + F_0 \exp\left(i\omega_{\mathrm{E}} t\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\exp\left(i\,\omega_{\mathrm{E}} t\right)}$$



Die vollständige Lösung lautet dann (im Fall $\gamma < \omega_0$, schwache Dämpfung):

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{x_0 \gamma + v_0}{\omega} \sin(\omega t) \right) e^{-\gamma t}}_{\text{Einschwingterm, klingt mit der Zeit ab}} + \underbrace{|A_0| \cos(\omega_E t + \varphi)}_{\substack{\text{stabile Schwingung} \\ \text{mit der Anregungs-} \\ \text{frequenz}}}}$$

Dabei sind die Frequenz, die Phase und die Amplitude gegeben durch:

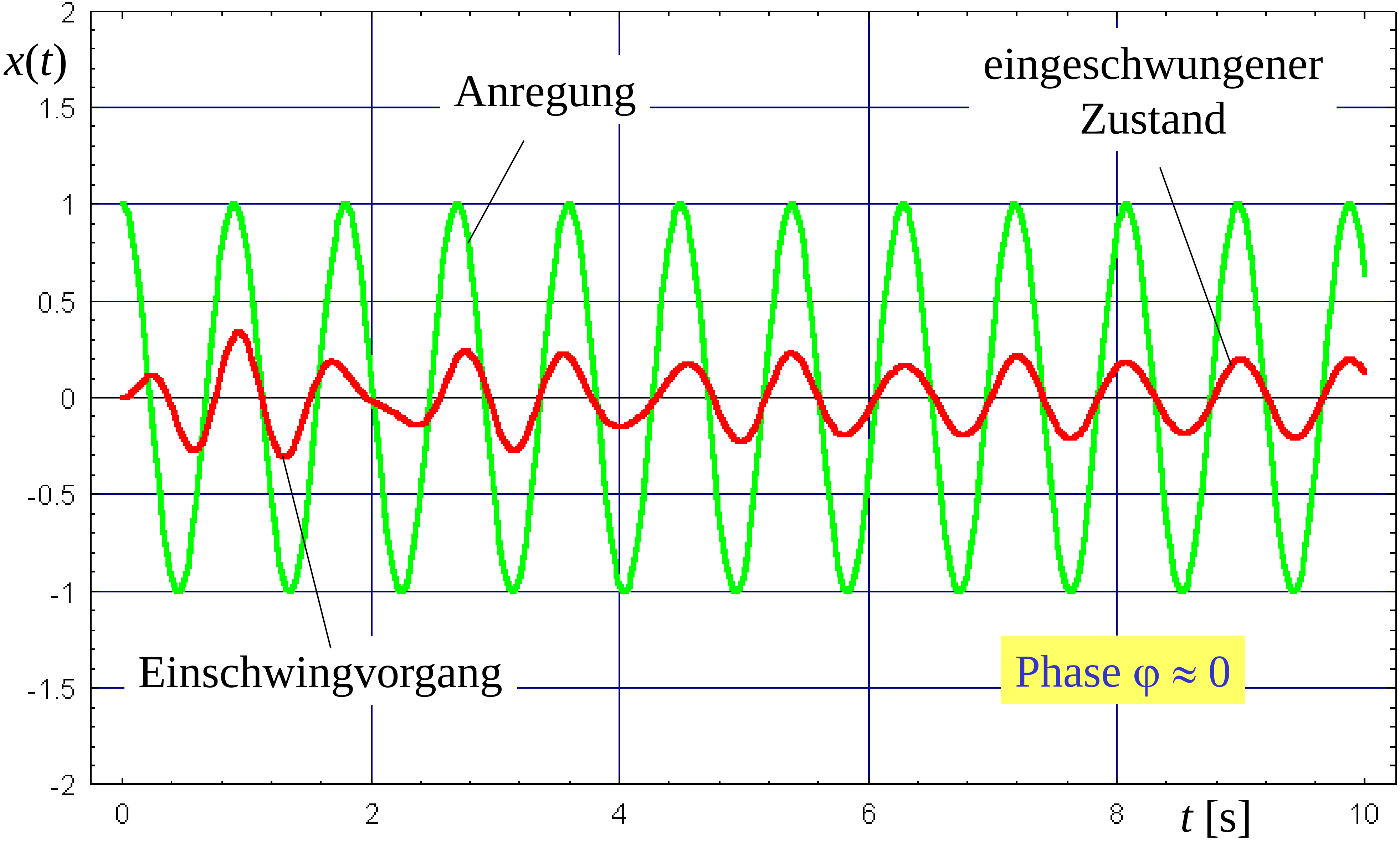
$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}, \qquad \tan \varphi = -\frac{2\gamma\, \omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

$$|A_0| = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + 4\gamma^2 \omega_E^2}}$$

Anregung unterhalb der Resonanzfrequenz

$$\omega_E = 7.0\,\text{Hz}, \quad \omega_0 = 10\,\text{Hz}, \quad \gamma = 0.3\,\text{s}^{-1}$$

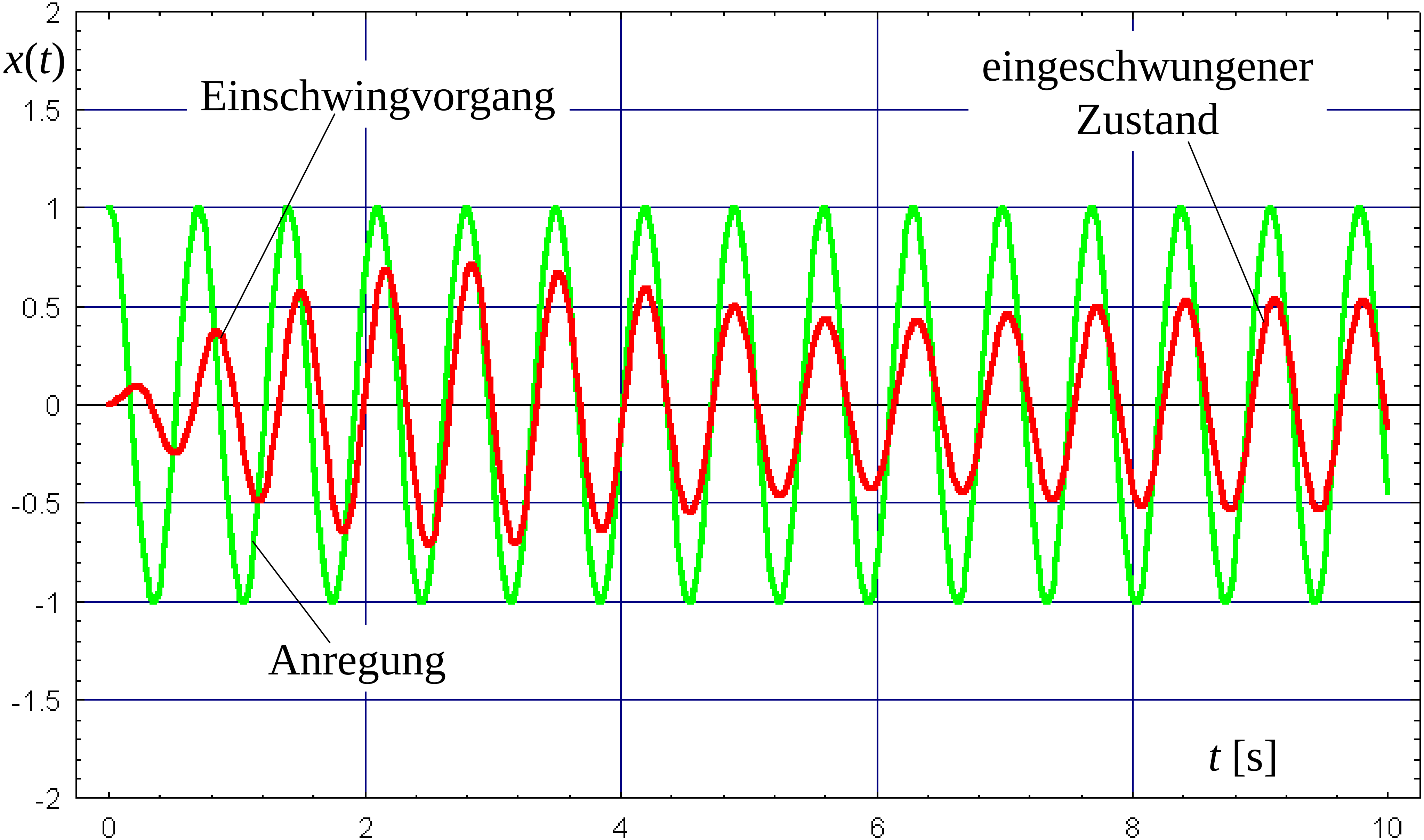
$$\omega_E < \omega_0$$



Anregung in der Nähe der Resonanzfrequenz ($\omega_E < \omega_0$)

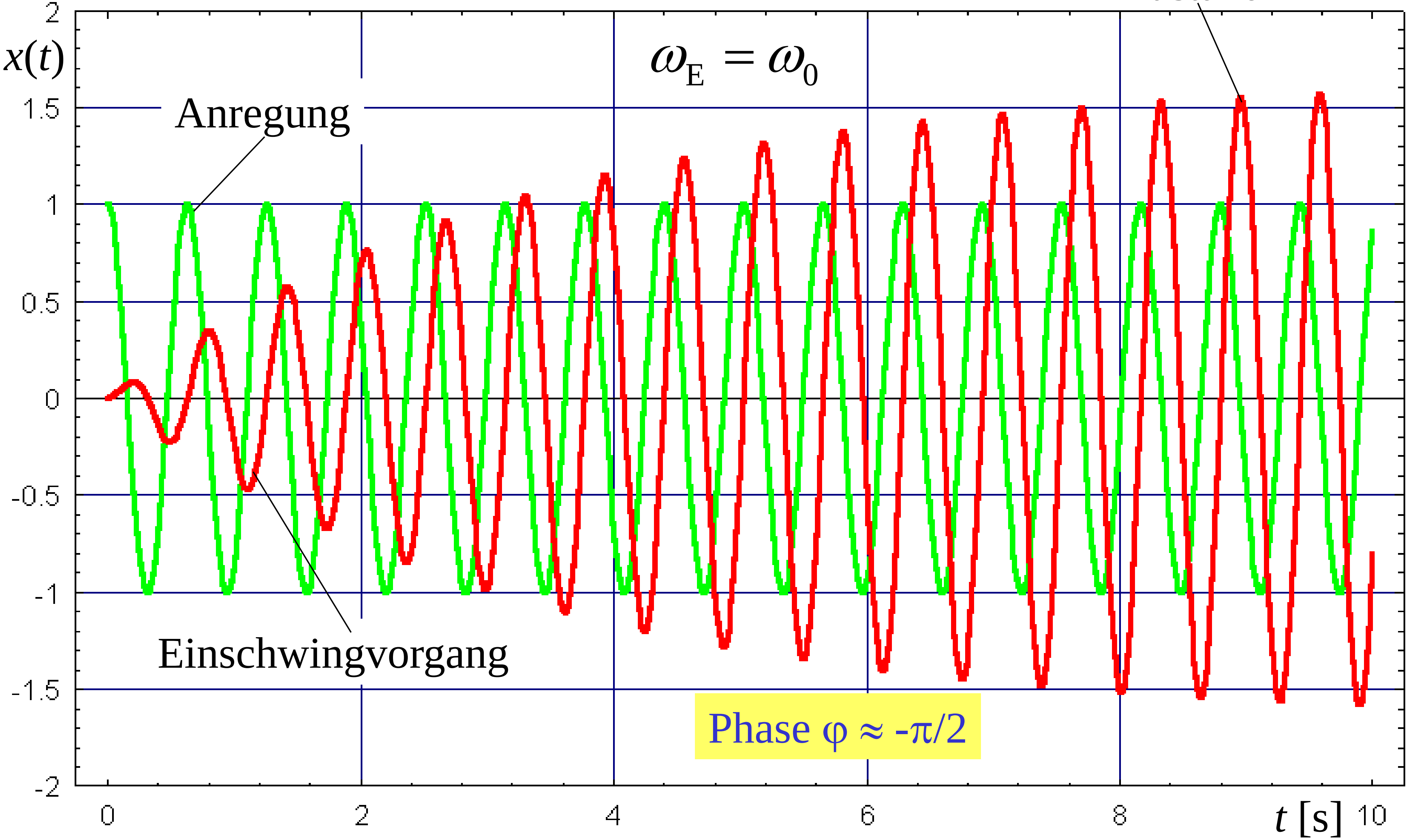
$$\omega_E = 9.0\,\text{Hz}, \quad \omega_0 = 10\,\text{Hz}, \quad \gamma = 0.3\,\text{s}^{-1}$$

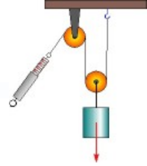
$$\omega_E \approx \omega_0$$



Anregung <u>bei</u> der Resonanzfrequenz

$$\omega_E = 10\,\text{Hz}, \quad \omega_0 = 10\,\text{Hz}, \quad \gamma = 0.3\,\text{s}^{-1}$$

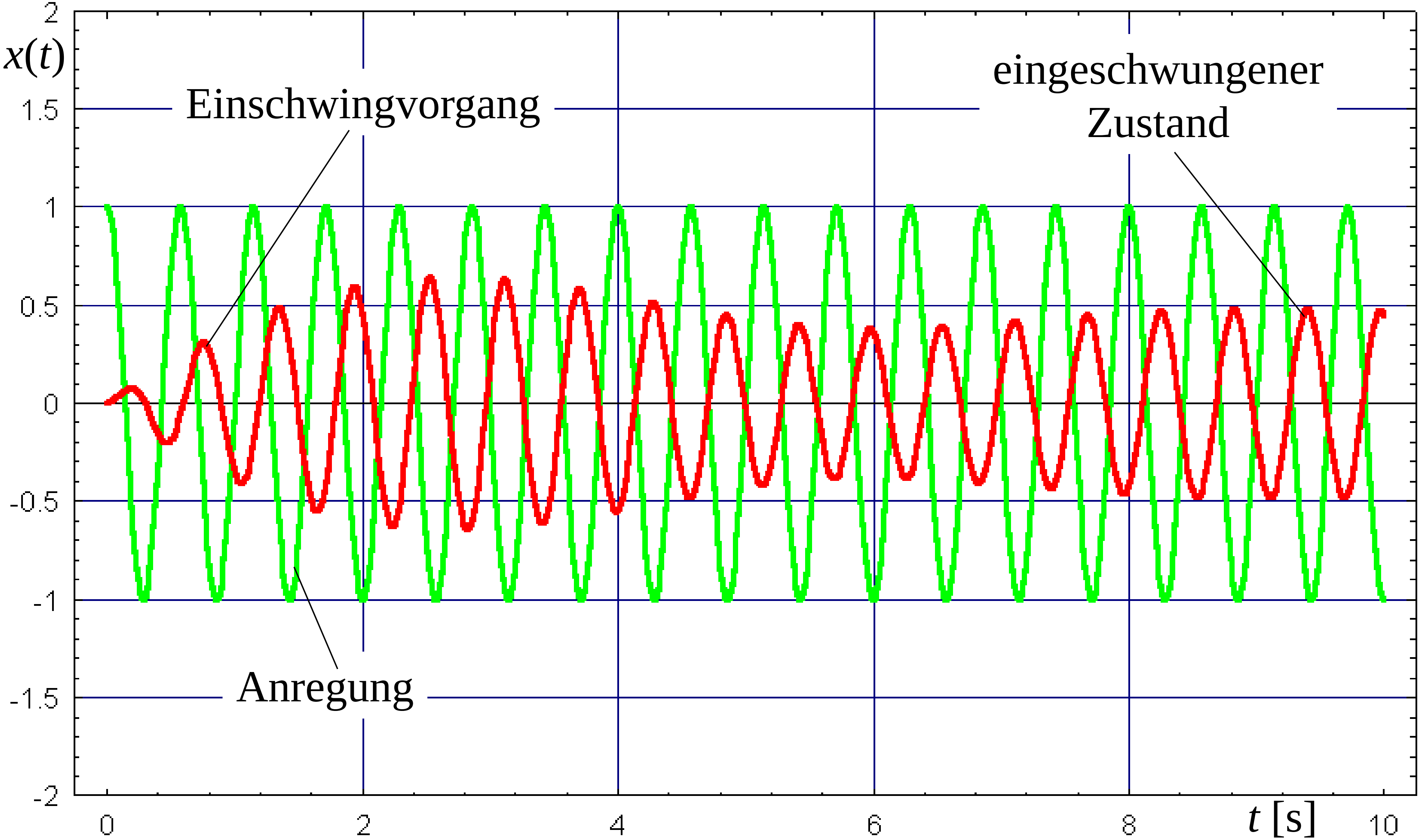




Anregung in der Nähe der Resonanzfrequenz ($\omega_E > \omega_0$)

$$\omega_E \approx \omega_0$$

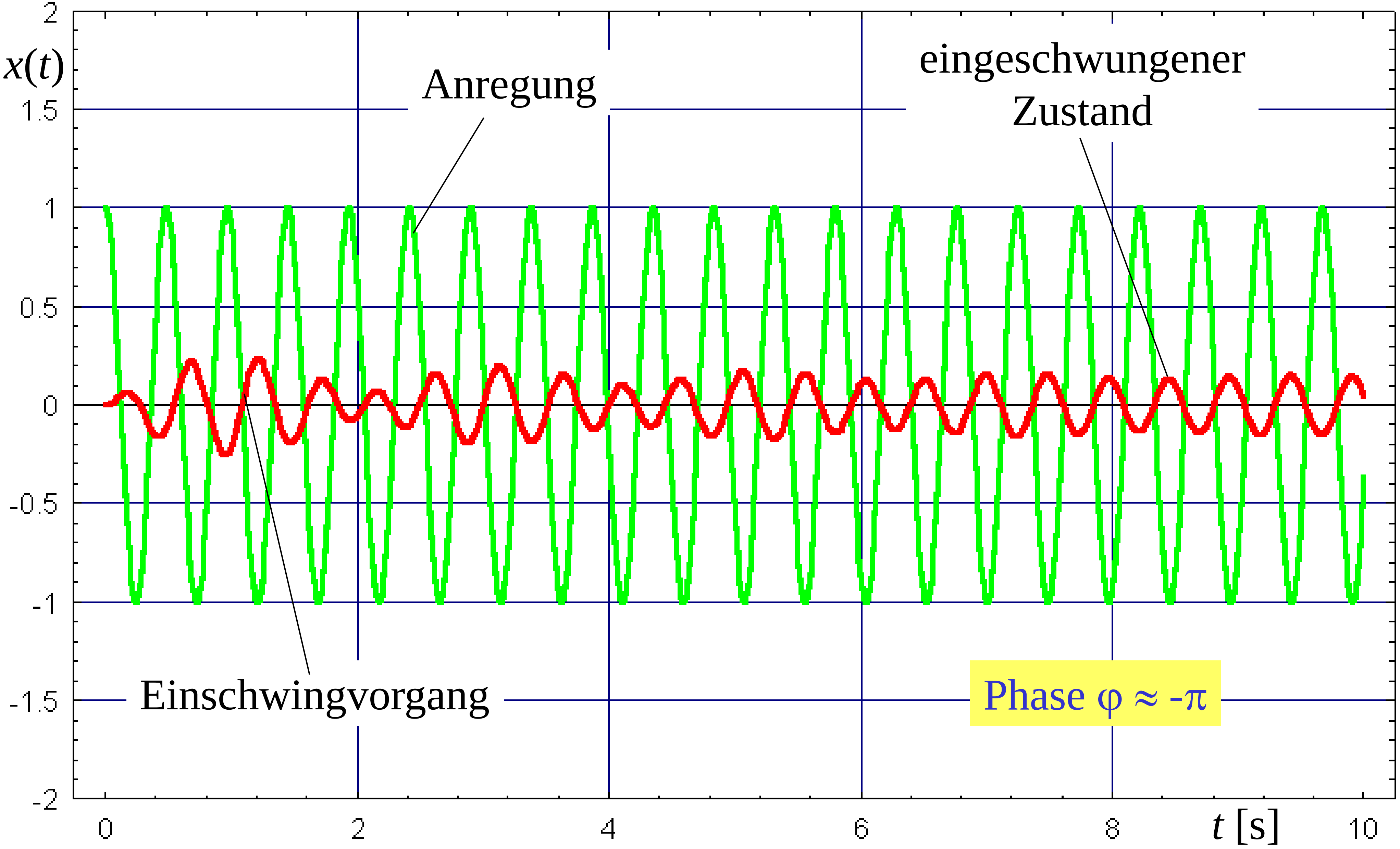
$$\omega_E = 11\,\text{Hz}, \quad \omega_0 = 10\,\text{Hz}, \quad \gamma = 0.3\,\text{s}^{-1}$$



Anregung oberhalb der Resonanzfrequenz

$$\omega_E = 13.0\,\text{Hz}, \quad \omega_0 = 10\,\text{Hz}, \quad \gamma = 0.3\,\text{s}^{-1}$$

$$\omega_E > \omega_0$$



Die Amplitude ist eine Funktion der erregenden Frequenz:

$$\left|A_0(\omega_\mathrm{E})\right| = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_\mathrm{E}^2\right)^2+4\gamma^2\omega_\mathrm{E}^2}}$$

Das Maximum ergibt sich aus der Bedingung $\dfrac{d\left|A_0(\omega_\mathrm{E})\right|}{d\omega_\mathrm{E}} = 0$

Daraus folgt sofort die Bedingung: $\left(\omega_0^2-\omega_\mathrm{E}^2\right)-2\gamma^2=0$

Das Maximum liegt also bei der Frequenz:

$$\boxed{\omega_{\mathrm{E,\,max}}^2 = \omega_0^2-2\gamma^2 = \omega_0^2\left(1-\frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Die maximale Amplitude ergibt sich aus $A_{\max} = \left|A_0\left(\omega_{E,\max}\right)\right|$

also

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m}\left\{\left[\omega_0^2 - \omega_0^2\left(1-\frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}\right)\right] + 4\omega_0^2\left(1-\frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}\right)\gamma^2\right\}^{-1/2}$$

und schließlich

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m}\left\{\left[-2\gamma^2\right]^2 + 4\omega_0^2\gamma^2 - 8\gamma^4\right\}^{-1/2} = \frac{F_0}{m}\left[4\gamma^4 + 4\omega_0^2\gamma^2 - 8\gamma^4\right]^{-1/2}$$

$$\boxed{A_{\max} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}}$$

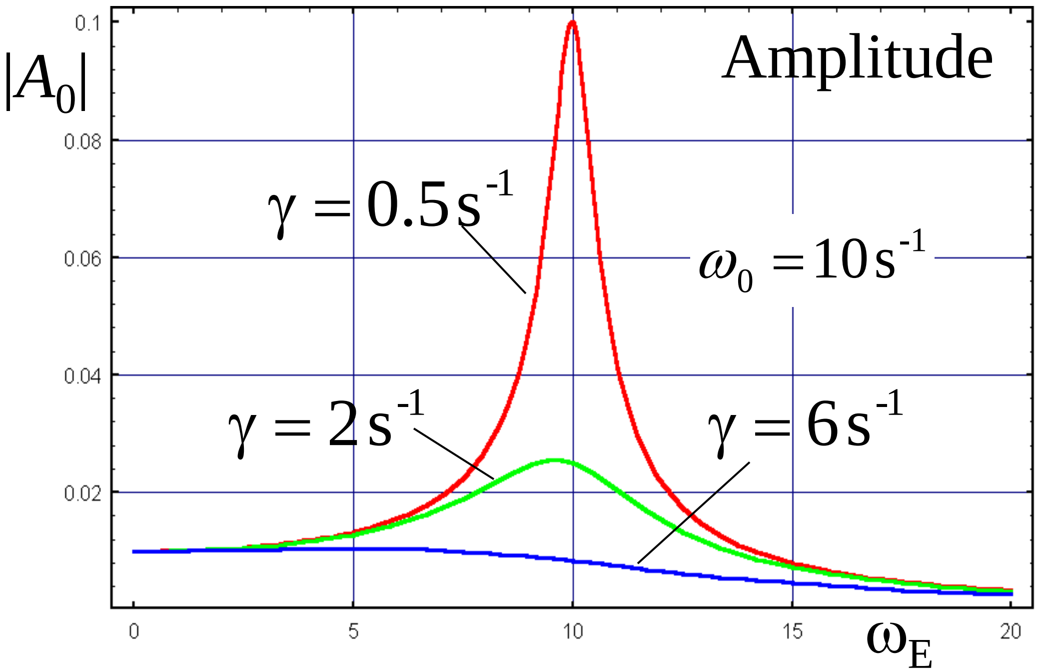
Für $\gamma \to 0$ wächst die Amplitude bei der Resonanzfrequenz über alle Grenzen !!

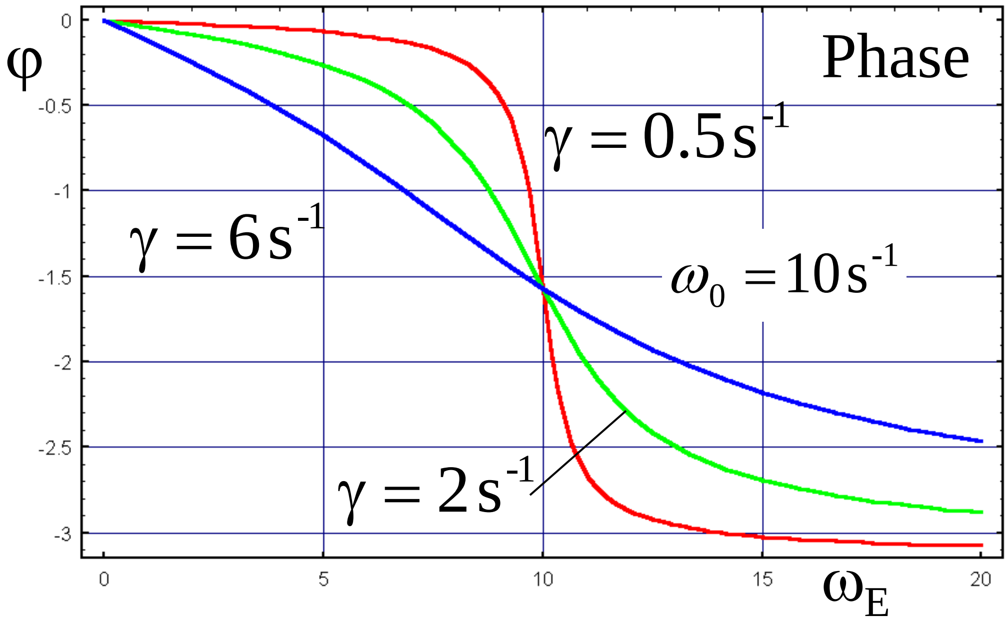
$$\lim_{\gamma \to 0} A_{\max}(\gamma) \to \infty$$

„Resonanzkatastrophe“

Wir betrachten den Amplitudenverlauf als Funktion der erregenden Frequenz im eingeschwungenen Zustand. Dann gilt (für $t \to \infty$):

$$\left|A_0(\omega_E)\right| = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}}$$



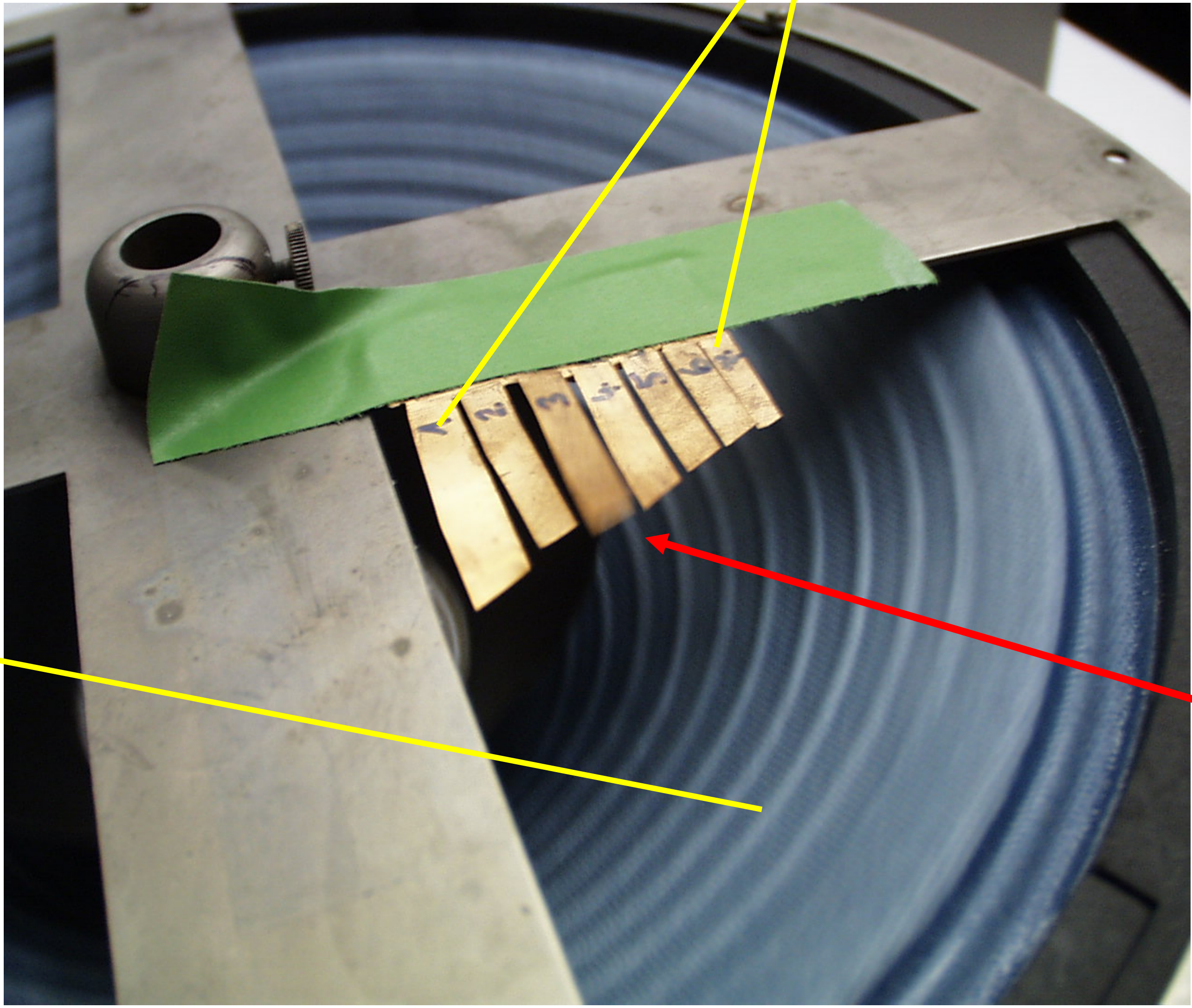


Man sieht sofort, daß bei kleiner Dämpfung und einer Anregungsfrequenz um $\omega_E \approx \omega_0$ die Amplitude sehr große Werte annehmen kann.

Dieses Phänomen nennt man **„Resonanz“**

Versuch 1: Zungenfrequenzmesser

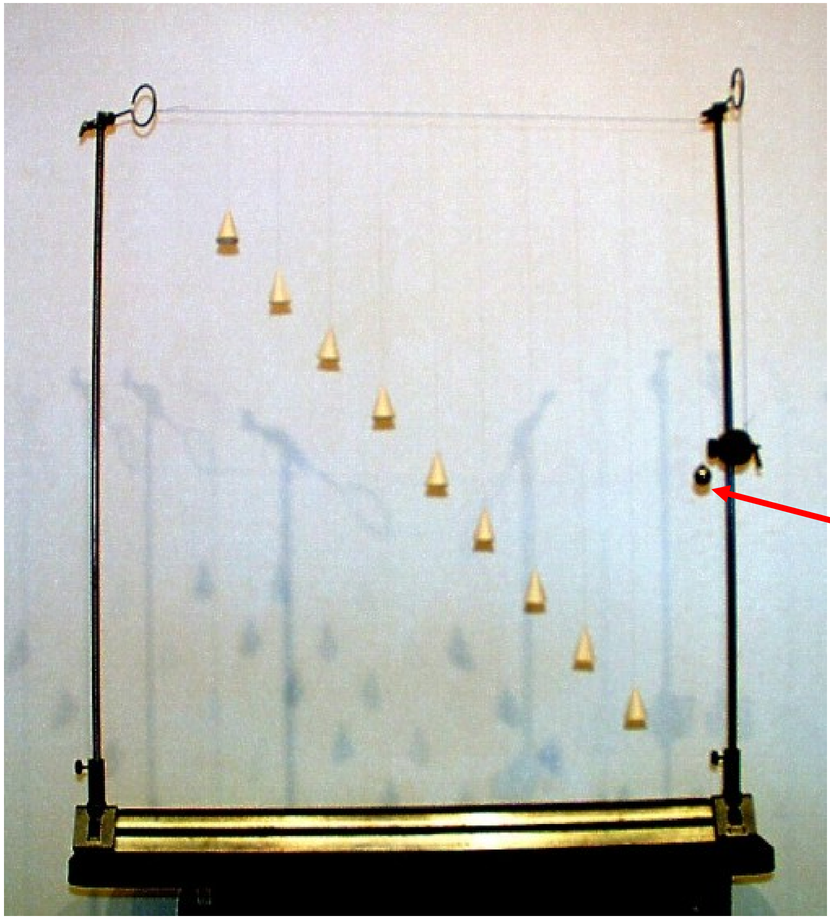
Zungen mit verschiedenen Resonanzfrequenzen



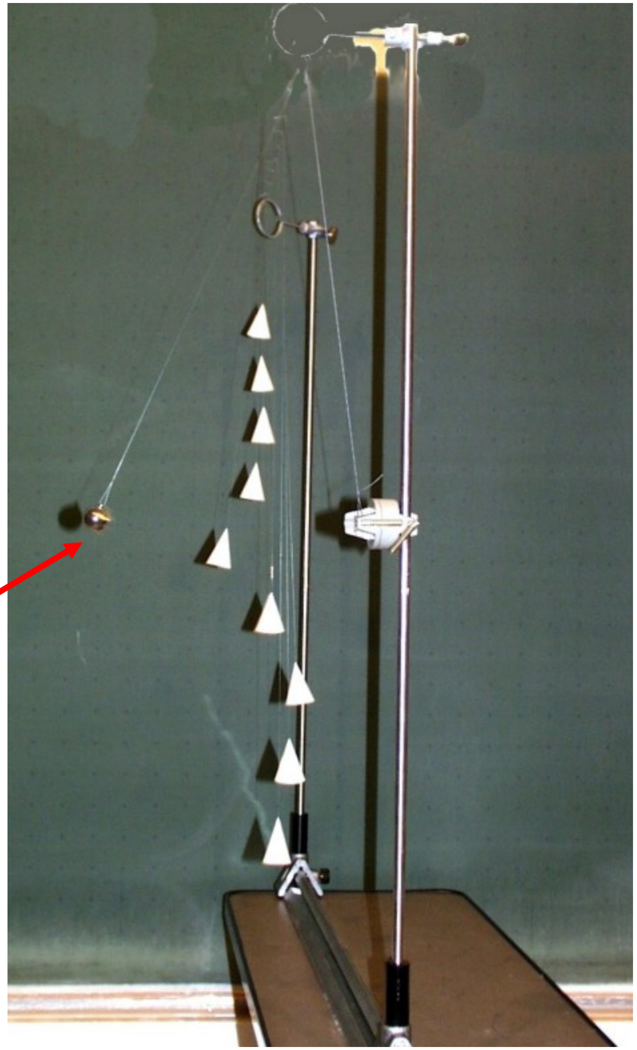
Lautsprecher zur Schwingungs-anregung

Zunge in Resonanz

Versuch 3: Pendelkette

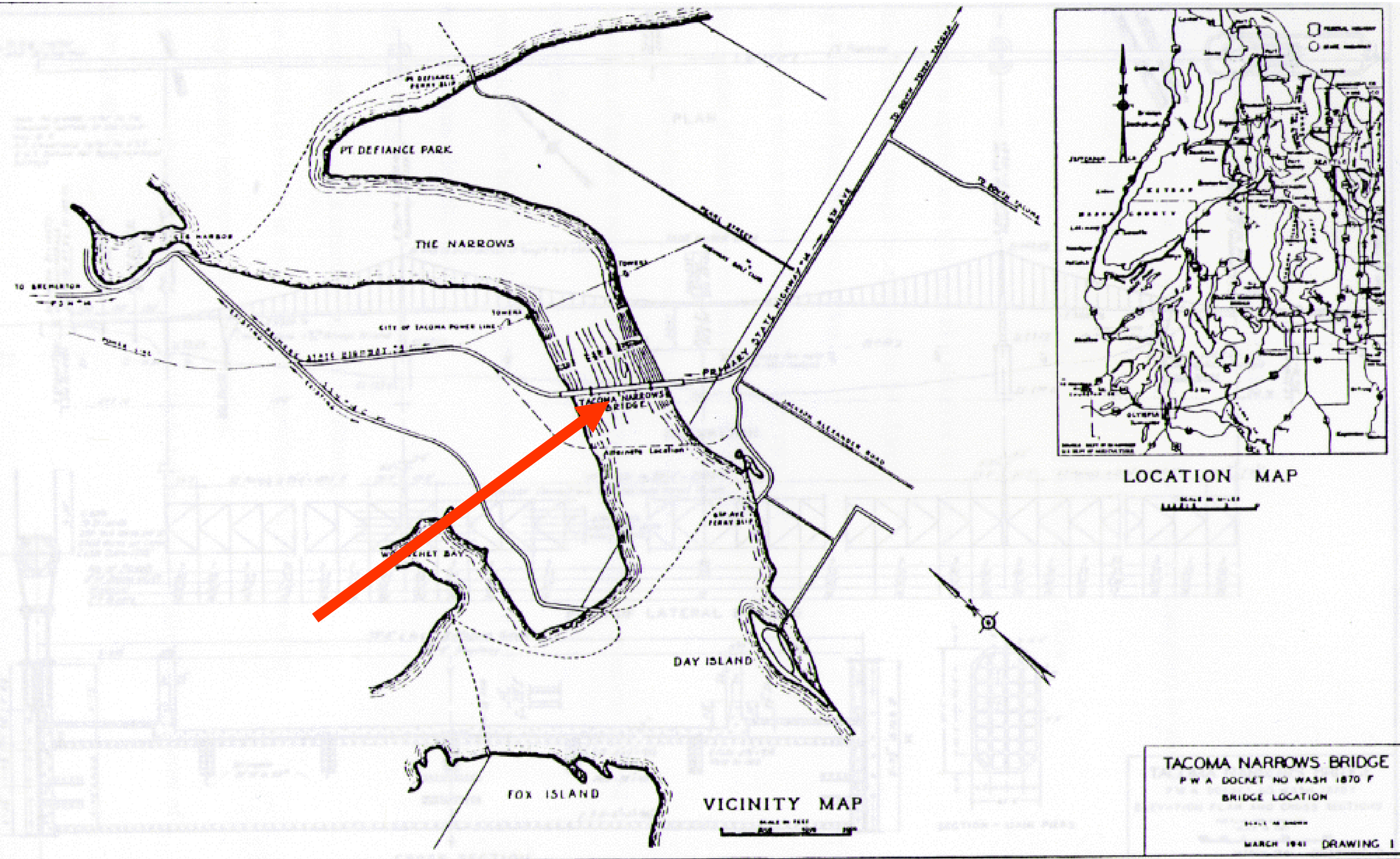


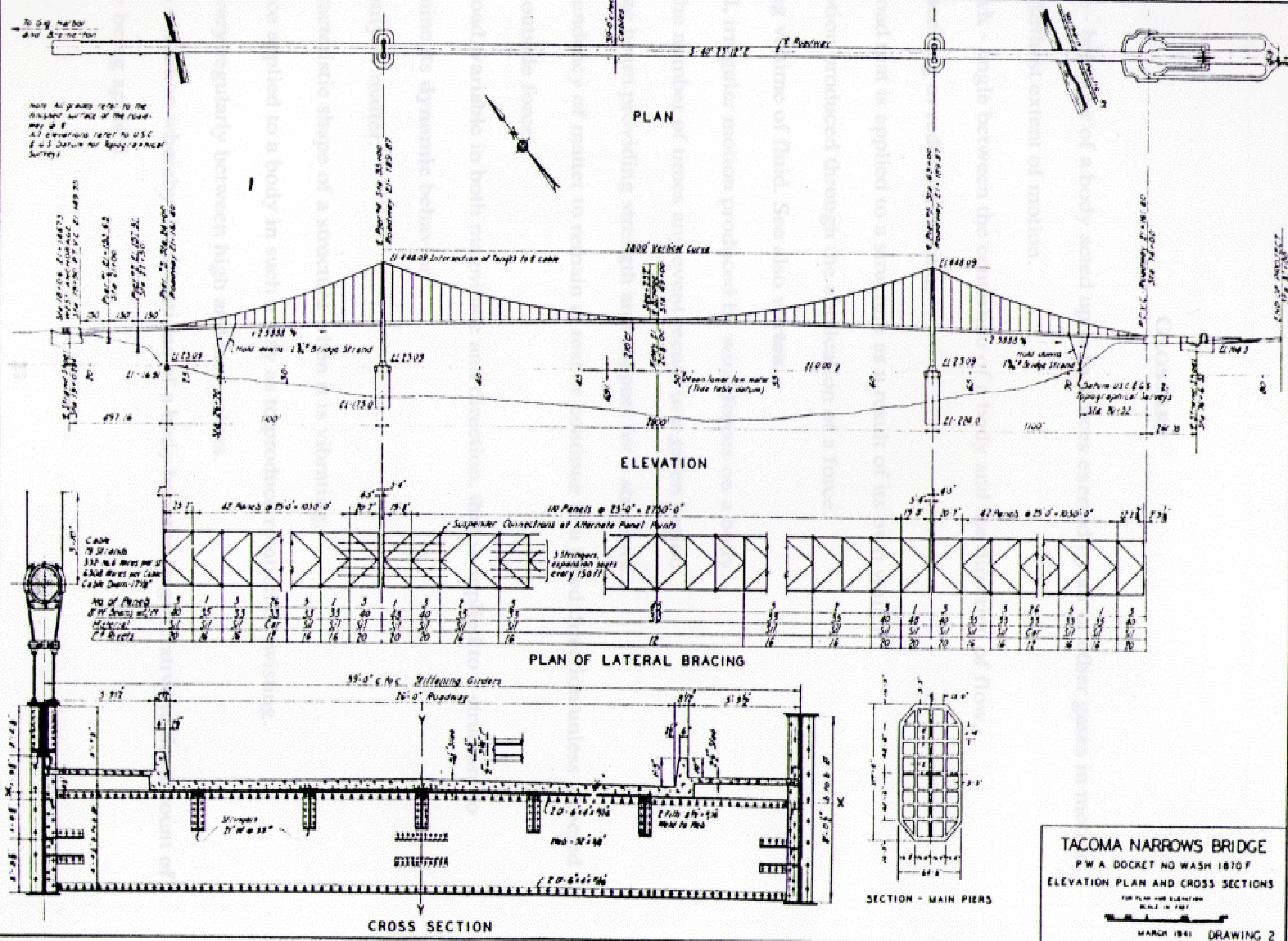
Pendel mit Stahlkugel



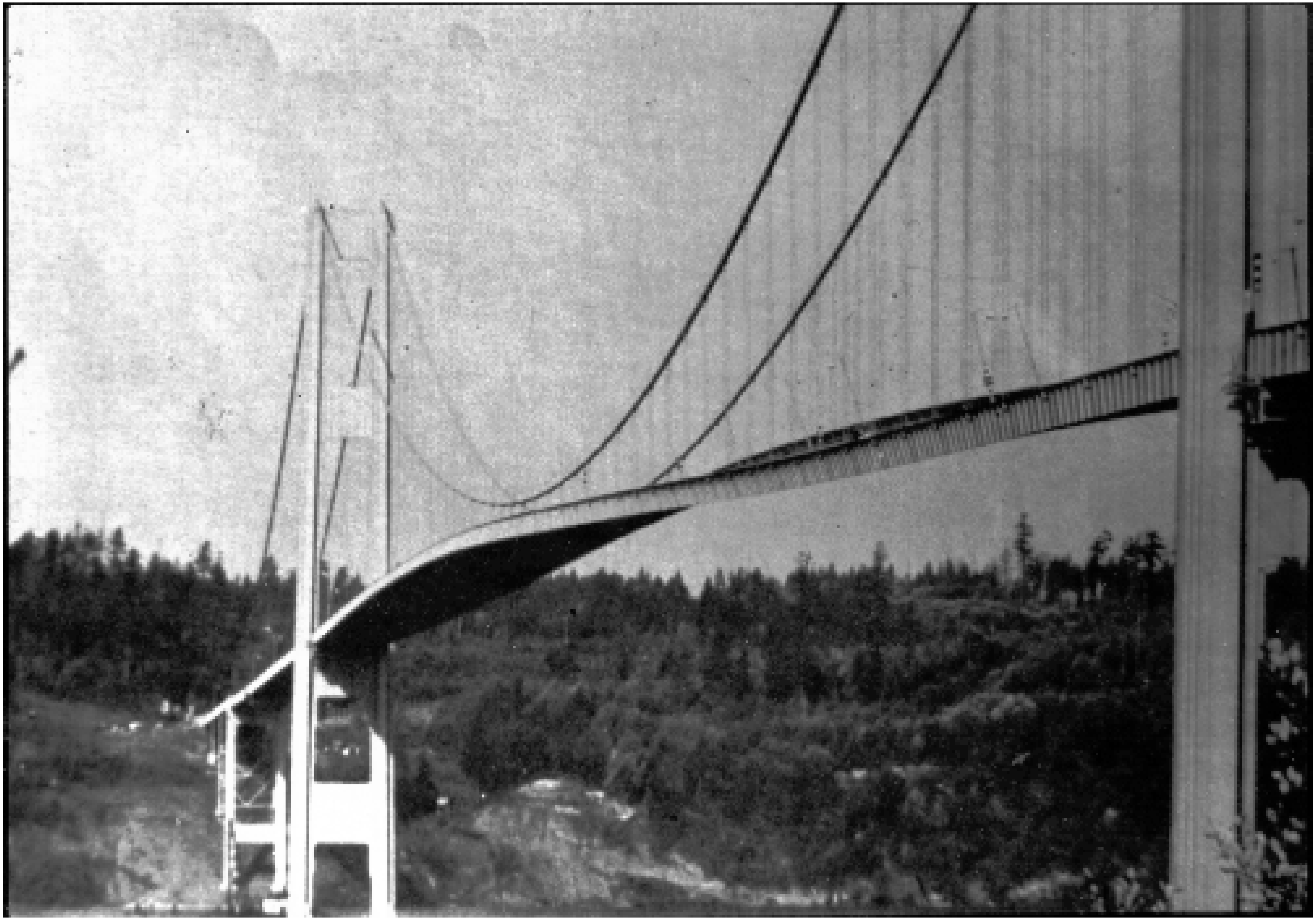
Pendel mit verschiedenen Fadenlängen und damit verschiedenen Frequenzen hängen an einem gemeinsamen Faden. Stößt man das Pendel mit der Stahlkugel an, werden die Pendel mit gleicher Fadenlänge, d.h. gleicher Frequenz, angeregt.

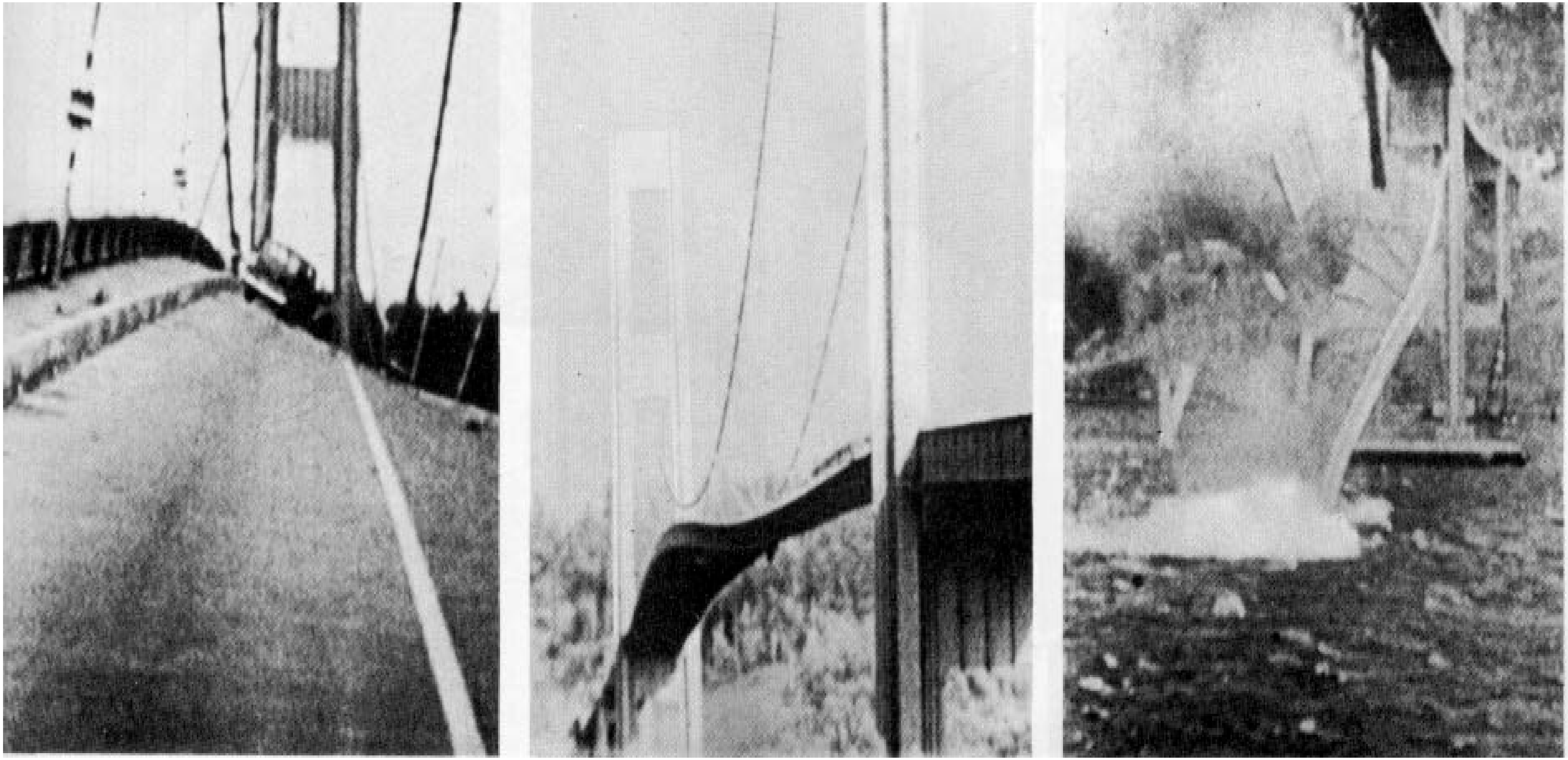
Die Tacoma Bridge („Galloping Gertie“) am 7. November 1940

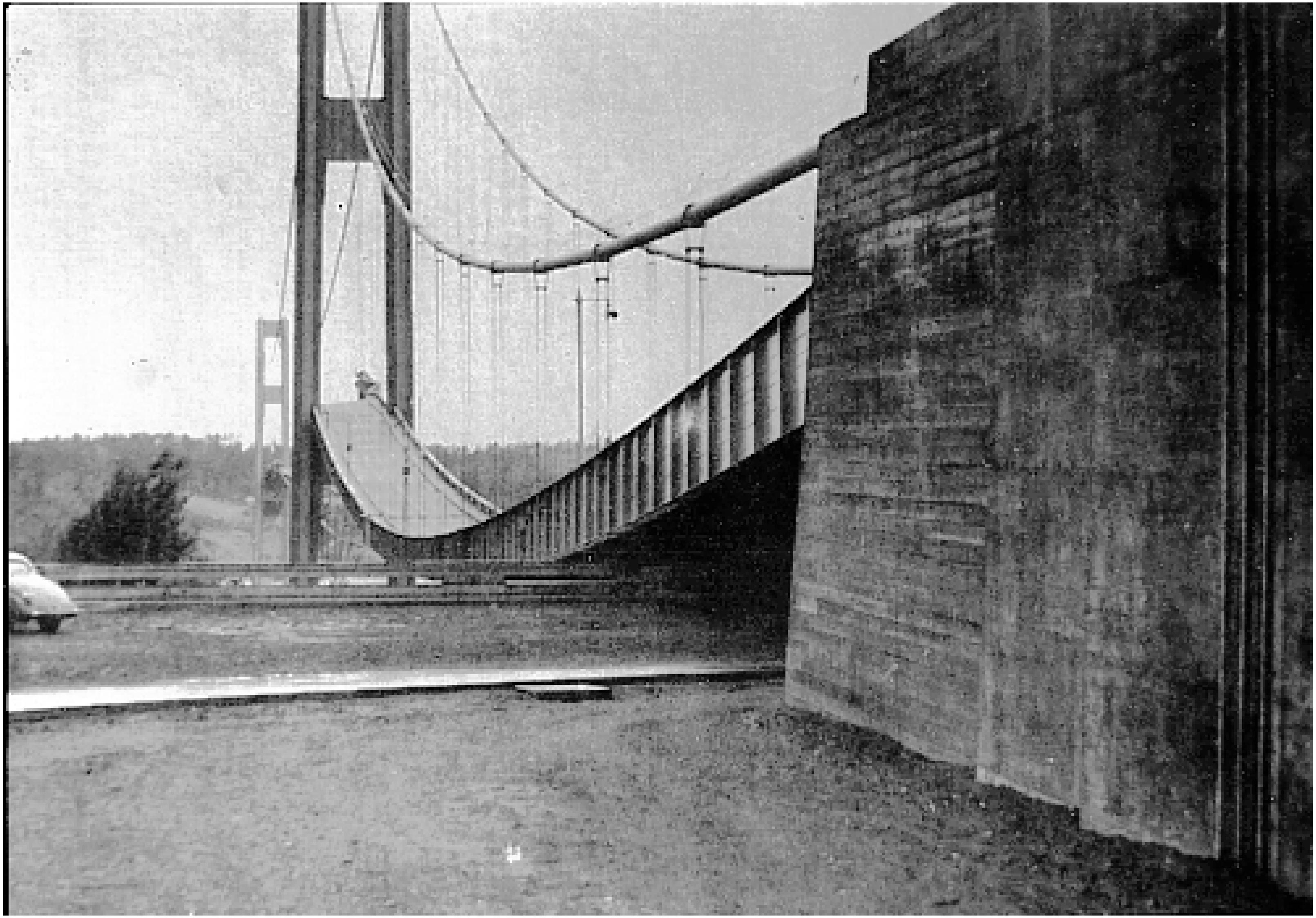



To Gig Harbor and Bremerton
PLAN
2800' Vertical Curve
ELEVATION
110 Panels @ 25'-0" = 2750'-0"
42 Panels @ 25'-0" = 1050'-0"
Suspender Connections at Alternate Panel Points
PLAN OF LATERAL BRACING
39'-0" c to c Stiffening Girders
26'-0" Roadway
CROSS SECTION
SECTION - MAIN PIERS
TACOMA NARROWS BRIDGE
P W A. DOCKET NO WASH 1870 F
ELEVATION PLAN AND CROSS SECTIONS
MARCH 1941
DRAWING 2

Durch Wind wurde die Brücke zu resonanten Schwingungen mit extrem großen Amplituden angeregt.







Das Opfer der Resonanz ....