Inhalt der Vorlesung A1

1. Einführung

- Methode der Physik
- Physikalische Größen
- Übersicht über die vorgesehenen Themenbereiche

2. Teilchen

A. Einzelne Teilchen

- Beschreibung von Teilchenbewegung
  - Kinematik: Quantitative Erfassung
  - Dynamik: Ursachen der Bewegung
- Kräfte
- Arbeit + Leistung, Energie
- Erhaltungssätze: Energie+Impulserhaltung: Stöße
- Reibungskräfte
- Drehbewegung

Es gibt zwei prinzipiell unterschiedliche Arten von Stößen:

1. Elastische Stoß
   Dabei bleibt die mechanische Energie erhalten.

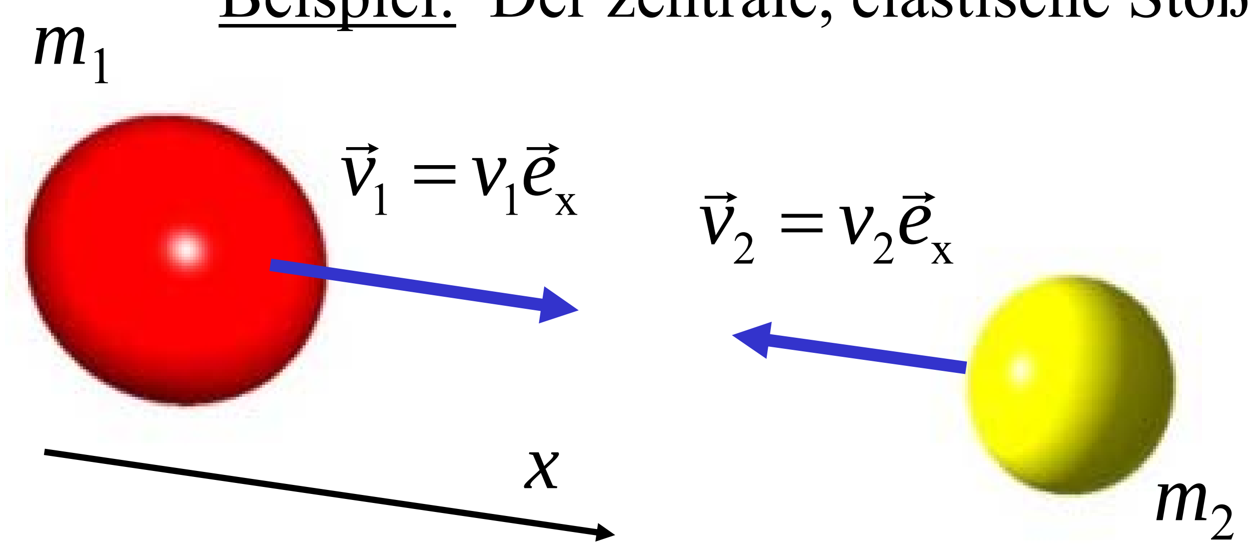
2. Inelastische Stoß
   Dabei wird ein Teil der Energie z.B. in Wärme umgewandelt

Die Erhaltung der Energie gilt also immer wie auch die Erhaltung des Impulses.
Allerdings kann Energie aus den mechanischen Energieformen herausgezogen und in Wärme verwandelt werden.

Beispiel: Der zentrale, elastische Stoß (1D Problem)

vor dem Stoß

p_1, p_2, E_1, E_2



nach dem Stoß

p_1', p_2', E_1', E_2'

Aus dem Impuls- und Energie erhaltungssatz folgt:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_{\text{ges}}$$
$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2' = E_{\text{ges}} \qquad (*)$$

Dabei wurde willkürlich die potentielle Energie $E_{\text{pot}} = 0$ gesetzt. Dies ist erlaubt, da der Nullpunkt der potentiellen Energie frei wählbar ist. Die beiden Massen haben also nur kinetische Energie.

Aus (*) folgt

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2$$

und weiter

$$m_1 \left(v_1 - v_1' \right) = m_2 \left(v_2' - v_2 \right) \qquad (**)$$

$$m_1 \left(v_1^2 - v_1'^2 \right) = m_2 \left(v_2'^2 - v_2^2 \right)$$

$$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1')$$

$$= m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \qquad (***)$$

(***) durch (**) dividiert ergibt:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

$$\Rightarrow \quad v_2' = v_1 + v_1' - v_2$$

$$v_1' = v_2 + v_2' - v_1$$

Setzt man v_2' in (**) ein, ergibt sich:

$$m_1 \left(v_1 - v_1' \right) = m_2 \left(v_1 + v_1' - 2 v_2 \right)$$

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_1 + m_2 v_1' - 2 m_2 v_2$$

$$-(m_1 + m_2) v_1' = -(m_1 - m_2) v_1 - 2 m_2 v_2$$

Auflösen liefert schließlich

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2}$$

Einsetzen von v_1' in (**) liefert

$$\boxed{v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2}$$

$\boxed{v_2 = 0}$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 ,$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Spezialfälle:

1. $\boxed{m_1 = m_2}$

$$\Rightarrow \quad v_1' = v_2 , \quad v_2' = v_1$$

Speziell wenn $v_2 = 0$:

$$v_1' = 0, \quad v_2' = v_1$$

2. $\boxed{m_1 >> m_2}$

$$\Rightarrow \quad v_1' \approx v_1 , \quad v_2' \approx 2v_1 - v_2$$

und speziell, wenn $v_2 = 0$:

$$v_1' \approx v_1 , \quad v_2' \approx 2v_1$$

3. $\boxed{m_2 >> m_1}$

$$\Rightarrow \quad v_1' \approx -v_1 + 2v_2 , \quad v_2' \approx v_2$$

und speziell, wenn $v_2 = 0$:

$$v_1' \approx -v_1 , \quad v_2' \approx 0$$

Es soll jetzt der Spezielfall $v_2 = 0$ betrachtet werden:

Der Energieübertrag Q auf den zweiten Körper ist definiert als:

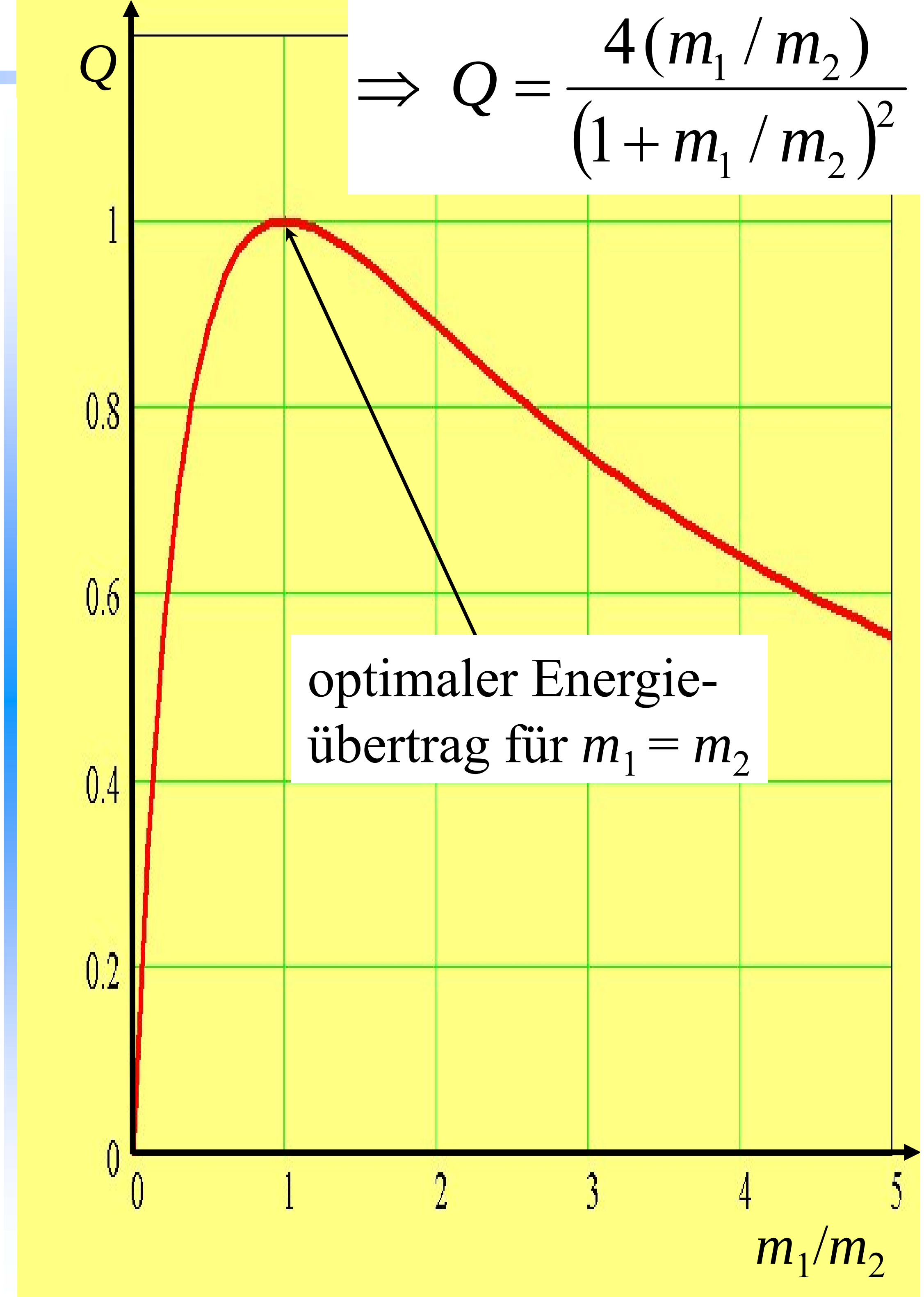
$$\boxed{Q = \frac{E_2'}{E_1}}$$

$$E_2' = \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 = \frac{m_2}{2}\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 v_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= E_1 \frac{4(m_1 / m_2)}{(1 + m_1 / m_2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{4(m_1 / m_2)}{(1 + m_1 / m_2)^2}$$



Es gilt wieder die Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}\,'$$

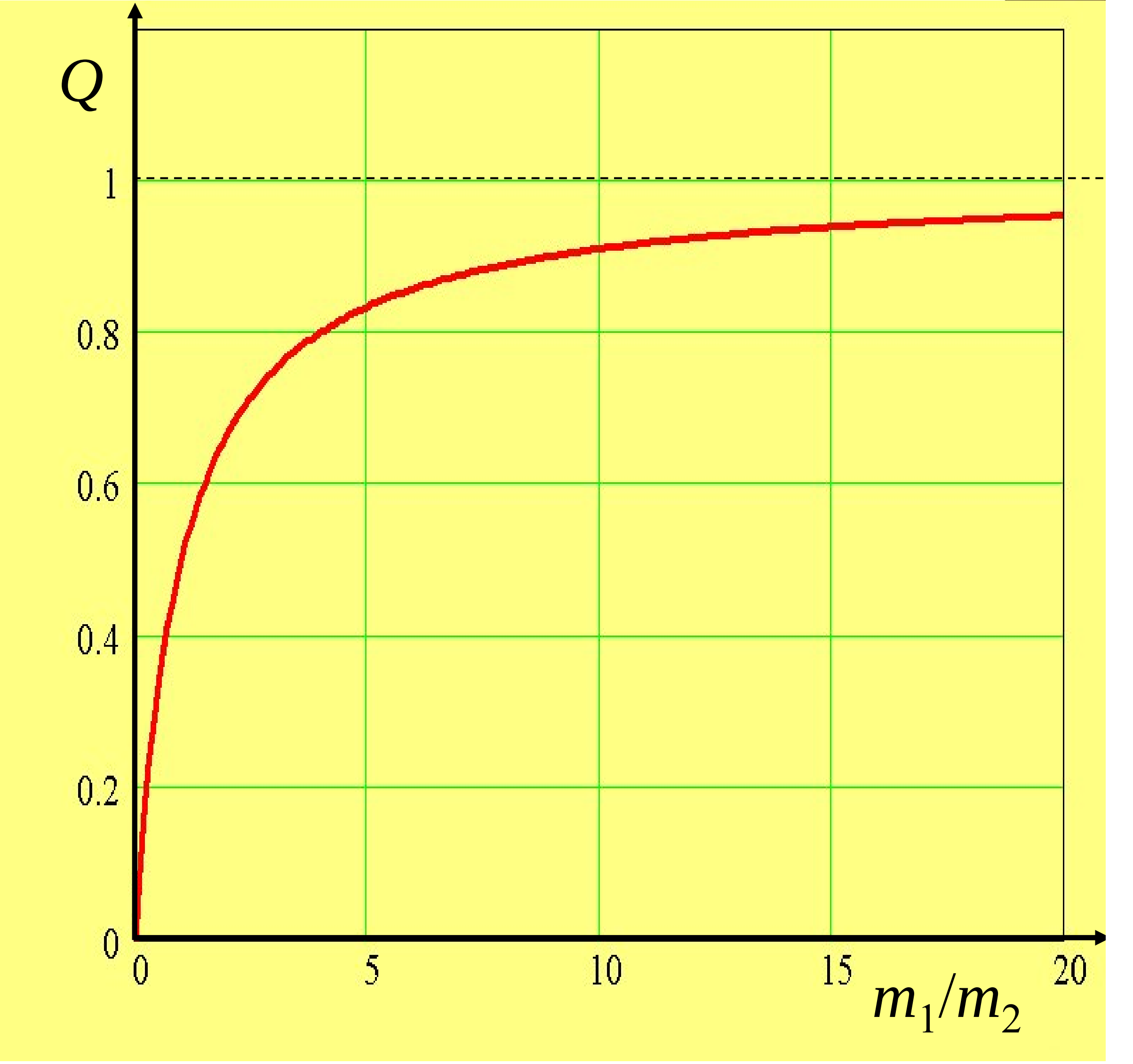
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$\Rightarrow \; v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Für den Gesamtenergieübertrag Q gilt dann im Spezielfall $v_2 = 0$:

$$Q = \frac{E'}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 / m_2}{1 + m_1 / m_2}$$



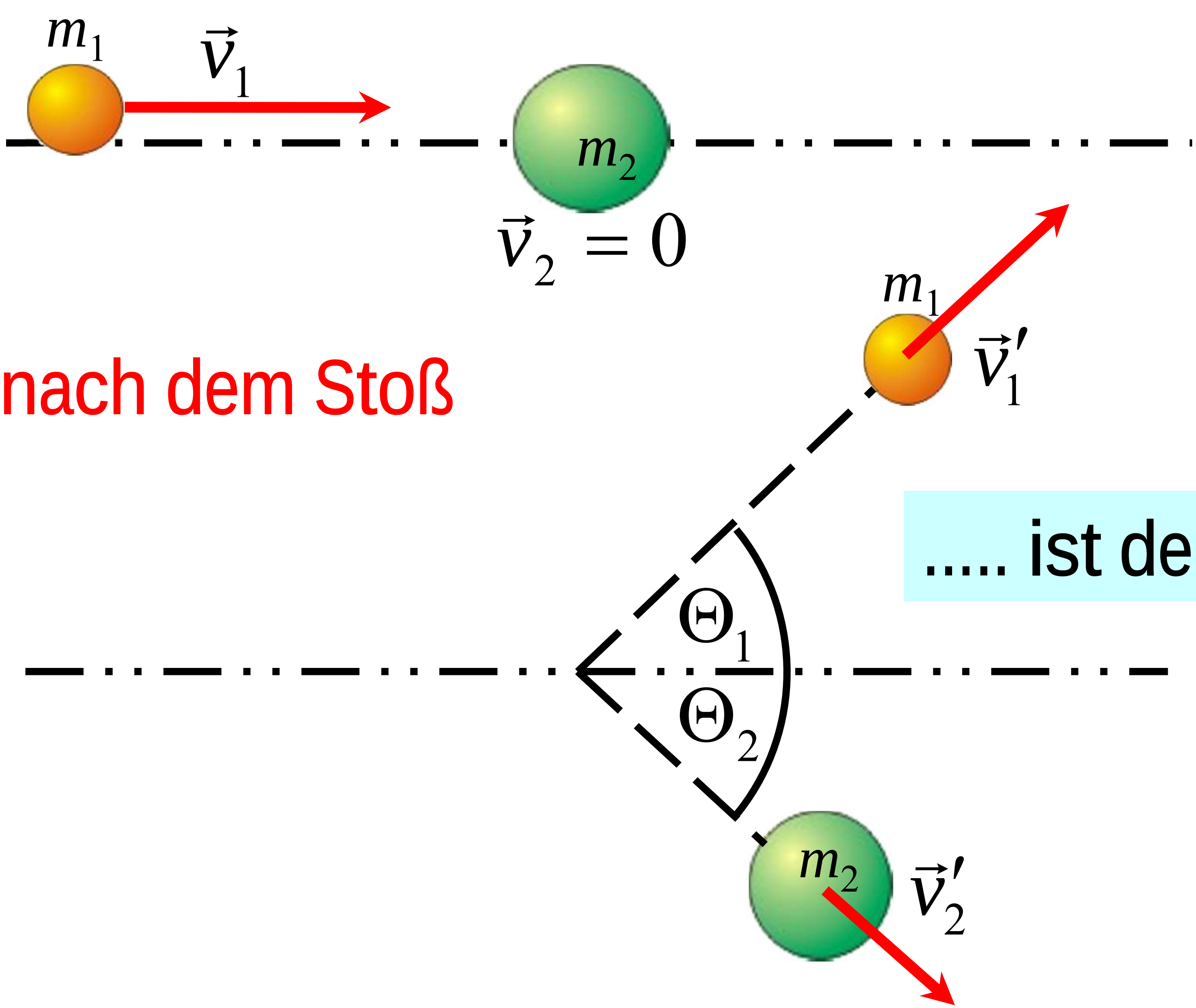
$$\Delta E = E' - E_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} E_1 < 0$$

Die mechanische Energieerhaltung gilt beim inelastischen Stoß nicht !!

Der nicht-zentrale Stoß ....

vor dem Stoß

nach dem Stoß



..... ist deutlich komplizierter !

Inhalt der Vorlesung A1

1. Einführung

- Methode der Physik
- Physikalische Größen
- Übersicht über die vorgesehenen Themenbereiche

2. Teilchen

A. Einzelne Teilchen

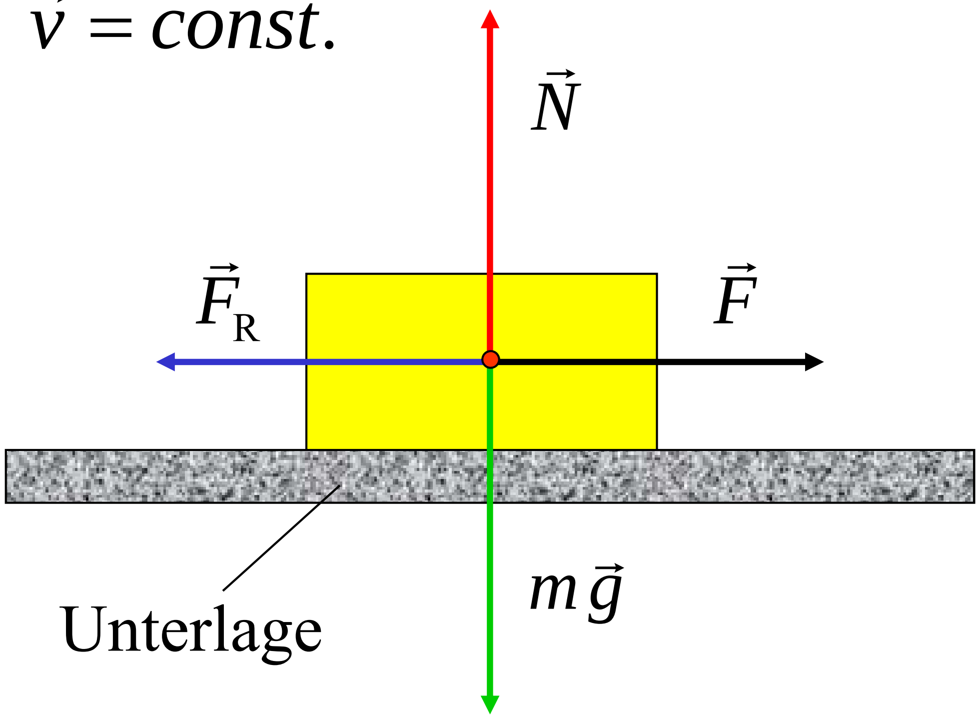
- Beschreibung von Teilchenbewegung
  - Kinematik: Quantitative Erfassung
  - Dynamik: Ursachen der Bewegung
- Kräfte
- Arbeit + Leistung, Energie
- Erhaltungssätze: Energie+Impulserhaltung
- Reibungskräfte
- Drehbewegung

Reibungskräfte

1) Kontaktreibung

Annahme:

$\vec{v} = const.$



Die Reibungskraft hat im Prinzip eine komplizierte Abhängigkeit von der Geschwindigkeit:

$$\vec{F}_R = \vec{F}(\vec{v})$$

Dieser Zusammenhang muß generell experimentell ermittelt werden.

$\vec{F}_R$ steht parallel zu den sich berührenden Flächen

$\vec{F}_R = -\vec{F}$ wenn der Körper noch nicht gleitet

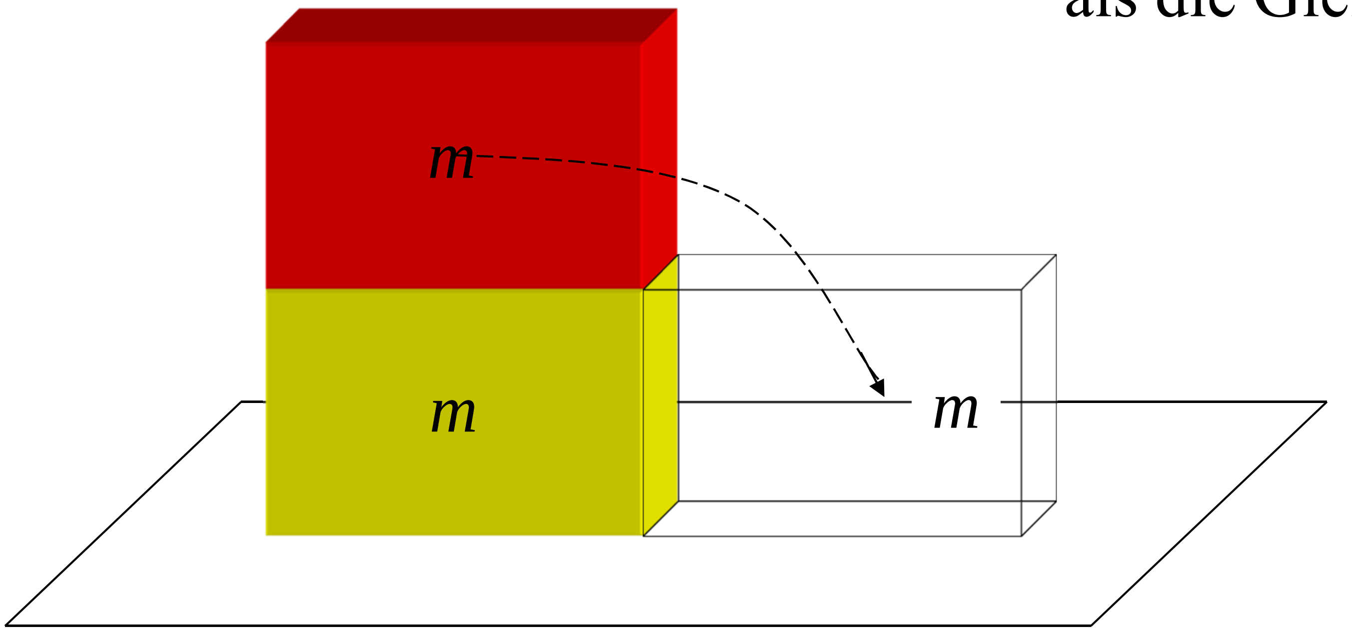
$\vec{F}_R = \vec{0}$ wenn keine Kraft wirkt

Es gibt zwei unterschiedliche Arten von Reibung:

$\vec{F}_{R,S}^{max}$ wenn die Masse *m* in Ruhe ist: „Haftreibung"

$\vec{F}_{R,G}^{max}$ wenn die Masse *m* gleitet: „Gleitreibung"

Dabei gilt immer: $\vec{F}_{R,S}^{max} > \vec{F}_{R,G}^{max}$ d.h. die Haftreibung ist größer als die Gleitreibung.



<u>Empirisch findet man:</u>
Bei gleicher Masse *m* haben die Körper dieselbe *Gleitreibung* unabhängig von der Größe der Auflagefläche!

Beim Gleiten hängt $\vec{F}_R$ von der Normalkraft $\vec{N}$ ab. Es gilt die empirische Beziehung

$$\left|\vec{F}_R\right| = \mu \left|\vec{N}\right|$$

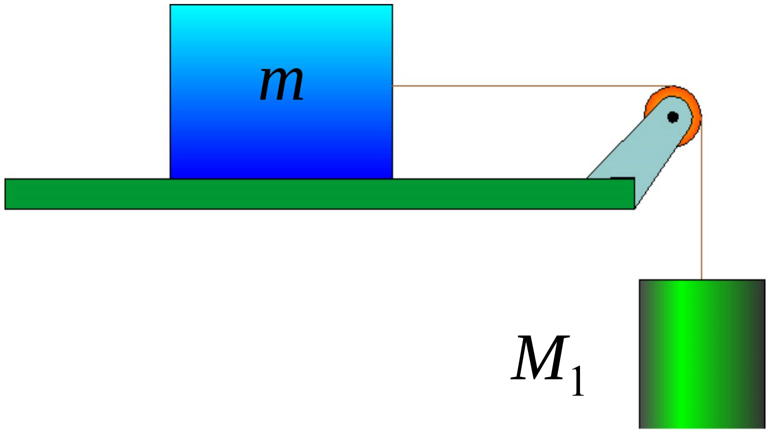
μ = Reibungskoeffizient

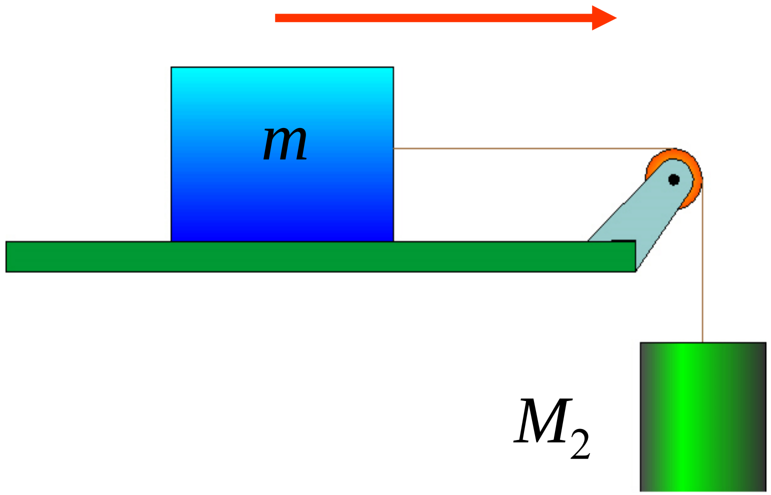
Bei gleicher Fläche ist $\left|\vec{F}^{\,\max}_{\mathrm{R,S}}\right| \propto \left|\vec{N}\right|$ also $F^{\max}_{\mathrm{R,S}} = \mu_{\mathrm{S}}\, N$

sowie $\left|\vec{F}^{\,\max}_{\mathrm{R,G}}\right| \propto \left|\vec{N}\right|$ also $F^{\max}_{\mathrm{R,G}} = \mu_{\mathrm{G}}\, N$

$$\mu_{\mathrm{S}} > \mu_{\mathrm{G}}$$

Die Haft- und Gleitreibungskoeffizienten μ_{S} und μ_{G} sind stark abhängig von der Beschaffenheit der jeweiligen Oberflächen (glatt, rauh, feucht, ...).

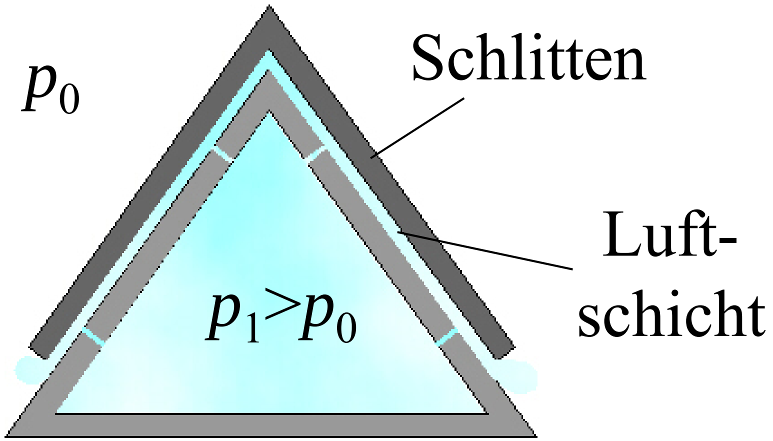




$$M_1 g < \mu_s m\, g \qquad\qquad M_2 g = \mu_s m\, g$$

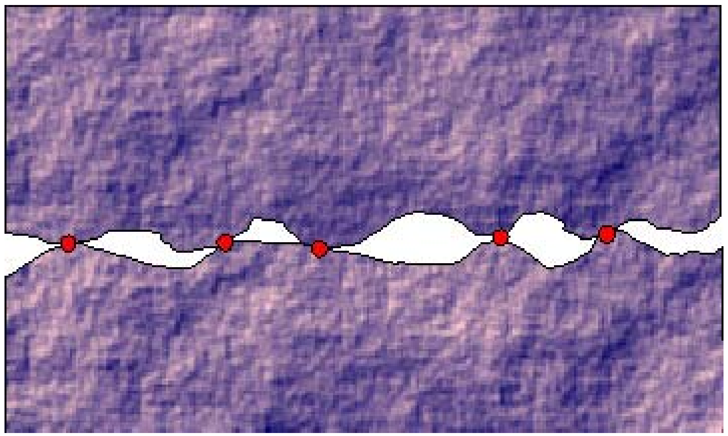
Die Masse *m* gleitet nicht. Die Masse *m* beginnt zu gleiten.

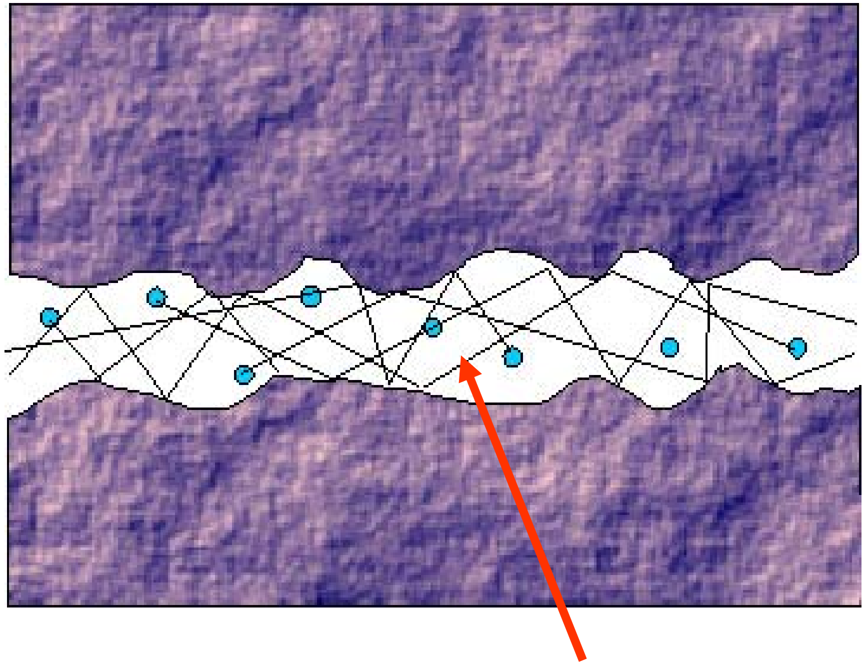
Prinzip der Luftkissenschiene zur extremen Verringerung der Reibung:



Luftkissen hat keine Haftreibung

Haftreibung am festen Körper:



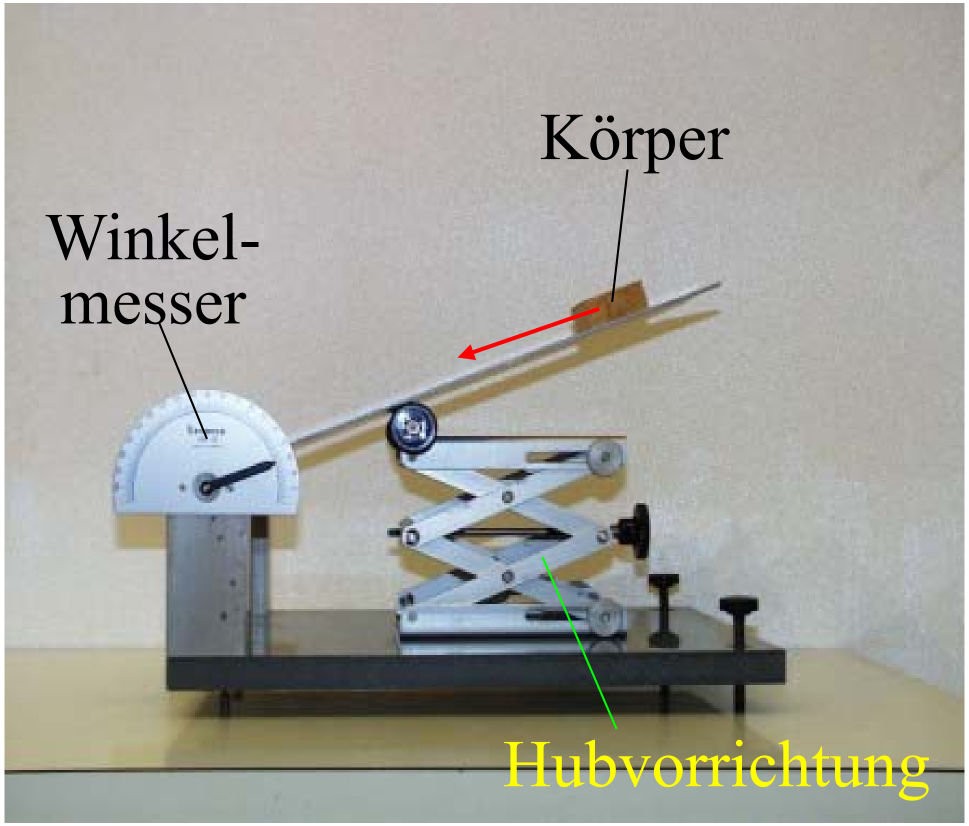


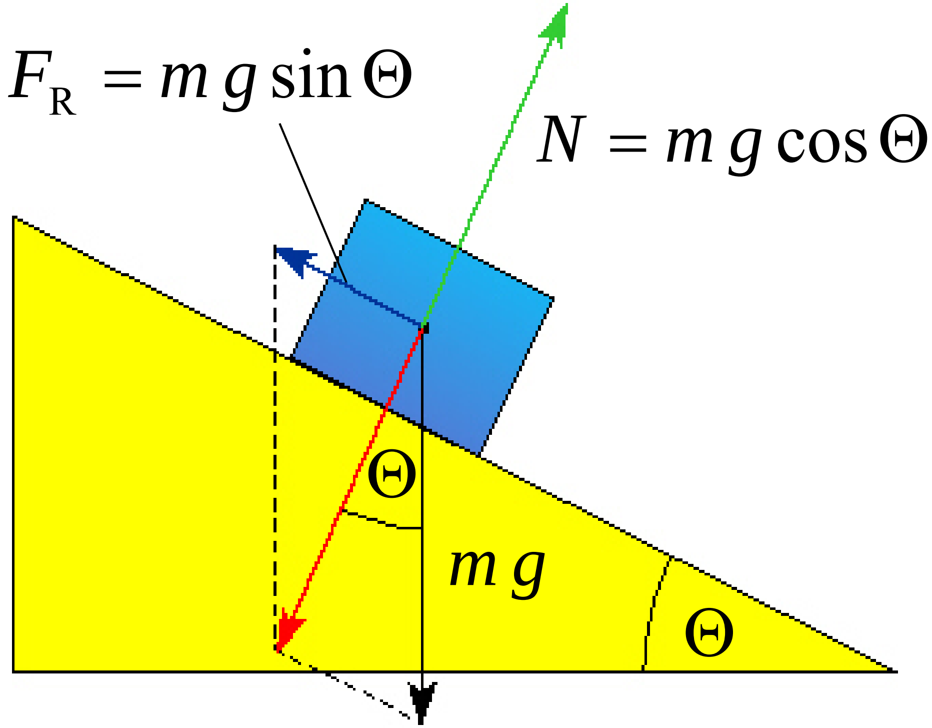
Auf dem Luftkissen bewegen sich Körper mit extrem geringer Reibung und haben in Ruhe keine Haftreibung.

Beispiele für Reibungskoeffizienten:

Flächen	μ_G	μ_S
Glas auf Glas	0.4	0.9 – 1
Glas auf Metall	0.2-0.3	0.5 – 0.7
Metall auf Metall		0.3 – 1
Stahl auf Stahl	0.6	0.7
Stahl auf Stahl Mit Öl dazwischen	0.03-0.11	0.05-0.13
Teflon auf Metall	0.04	0.04
Gelenk mit Gelenk-flüssigkeit		0.003 sehr klein !
Gummi auf Beton (naß)	0.25	0.3
Gummi auf Beton (trocken)	0.8	1 – 4 z.B. Reifen

Messung von μ_S an der schiefen Ebene





Der Winkel Θ wird solange erhöht, bis der Körper zu gleiten beginnt

Durch die Hubvorrichtung wird die Fläche zunehmend geneigt, bis der Körper zu rutschen beginnt. Aus dem Neigungswinkel Θ_{max} bestimmt sich der Reibungskoeffizient.

$$\mu_s = \frac{F_R}{N} = \frac{m\,g \sin\Theta_{max}}{m\,g \cos\Theta_{max}} = \tan\Theta_{max}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_s = \tan\Theta_{max}$$

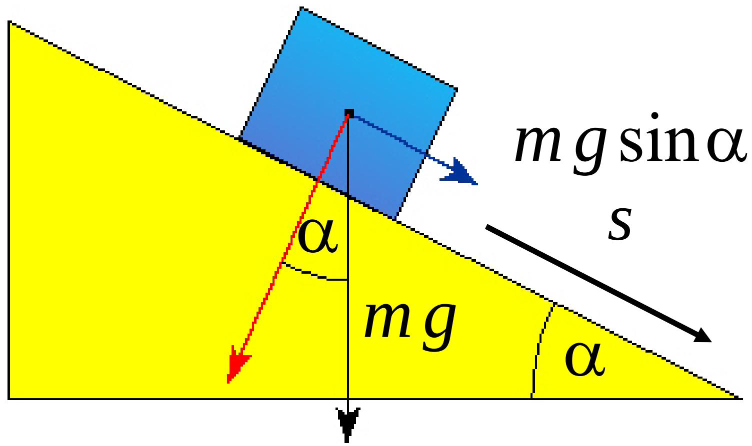
Reibung: Gummi auf nassem Beton

Messung: $\Theta \approx 25° \Rightarrow \quad \mu_S = \tan\Theta \approx 0.5$

Tabelle: Gummi auf Beton (naß): $\mu_S \approx 0.3$

Einfluss der Reibung auf die Bewegung auf der schiefen Ebene

a. ohne Reibung



2. Newton - Axiom:

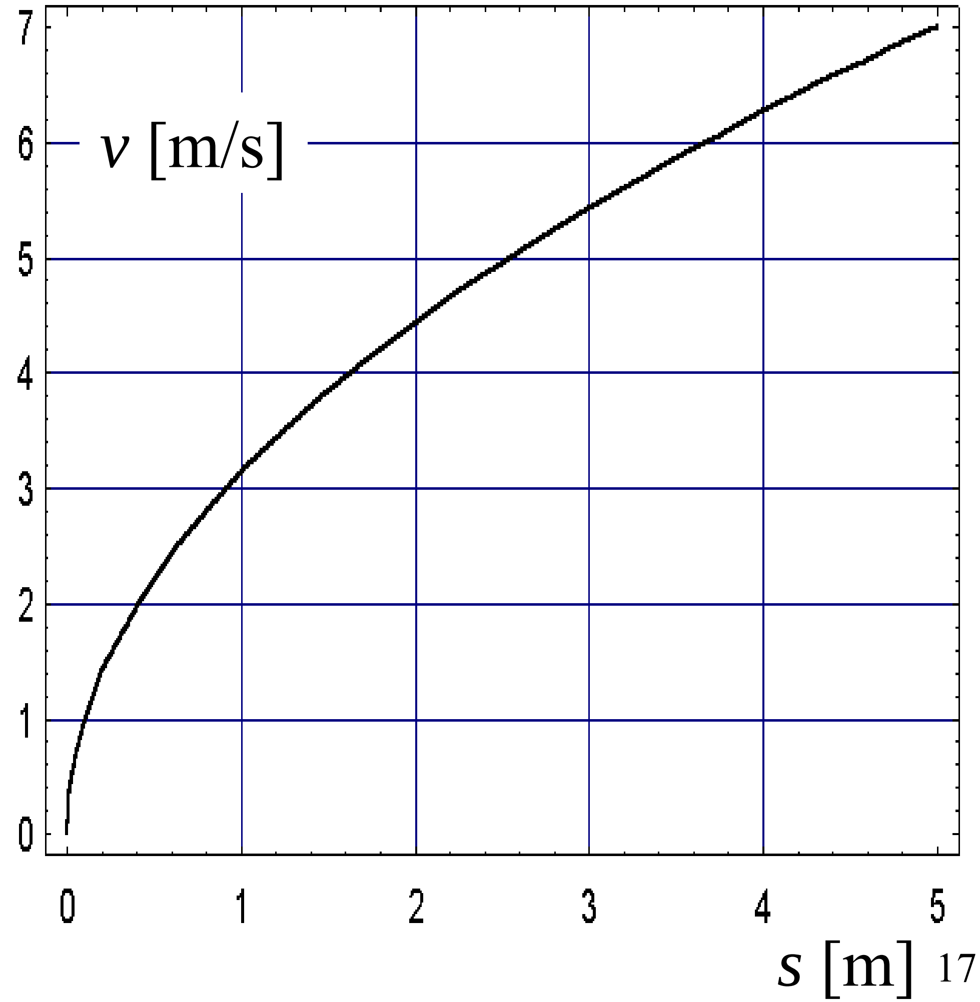
$$F = ma = mg\sin\alpha$$

$$v = \dot{s} = at = g\sin\alpha \cdot t$$

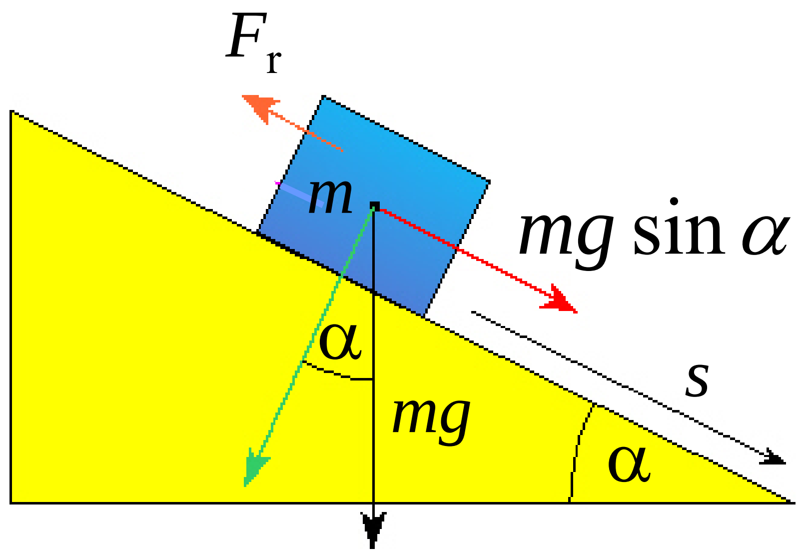
$$s = \frac{1}{2} g\sin\alpha \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}}$$

Dies entspricht einem freiem Fall mit der Beschleunigung $g_{\text{eff}} = g \cdot \sin\alpha$

$$v(s) = \sqrt{2\, g\, \sin\, \alpha \cdot s}$$



b. mit Reibung



Das 2. Newton'sche Axiom lautet jetzt unter Berücksichtigung der Reibung: $m\,a = m g \sin\alpha - F_r$

Mit beliebigem $F_r(v)$

$$m\ddot{s} = m\,g\sin\alpha - F_r(v)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{s} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - \frac{F_r(v)}{m}$$

Daraus läßt sich die Zeit t zum Erreichen der Geschwindigkeit v berechnen:

$$dt = \frac{dv}{g\sin\alpha - \frac{F_r(v)}{m}} \qquad \begin{array}{l} t(0) = t_0 = 0 \\ v(0) = v_0 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad t = \int_0^v \frac{dv}{g\sin\alpha - \frac{F_r(v)}{m}}$$

Die Reibungskraft $F_r(v)$ hängt dabei noch beliebig von der Geschwindigkeit ab.

Im Folgenden betrachten wir den einfachsten Fall

$$\boxed{F_r(v) = bv \qquad b = \text{const.}}$$

Einsetzen liefert

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g\sin\alpha - \frac{b}{m}v} \quad \Rightarrow$$

Nebenrechnung:

$$\int \frac{dx}{q + r\,x} = \frac{1}{r}\ln(q + r\,x)$$

Damit folgt

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{m}{b}\left[\ln\left(g\sin\alpha - \frac{b}{m}v\right)\right]_0^v$$

$$= -\frac{m}{b}\left[\ln\left(g\sin\alpha - \frac{b}{m}v\right) - \ln(g\sin\alpha)\right]$$

Weiteres Umformen ergibt

$$-\frac{b}{m}t = \ln\left(1 - \frac{b\,v}{m\,g\sin\alpha}\right)$$

und weiter

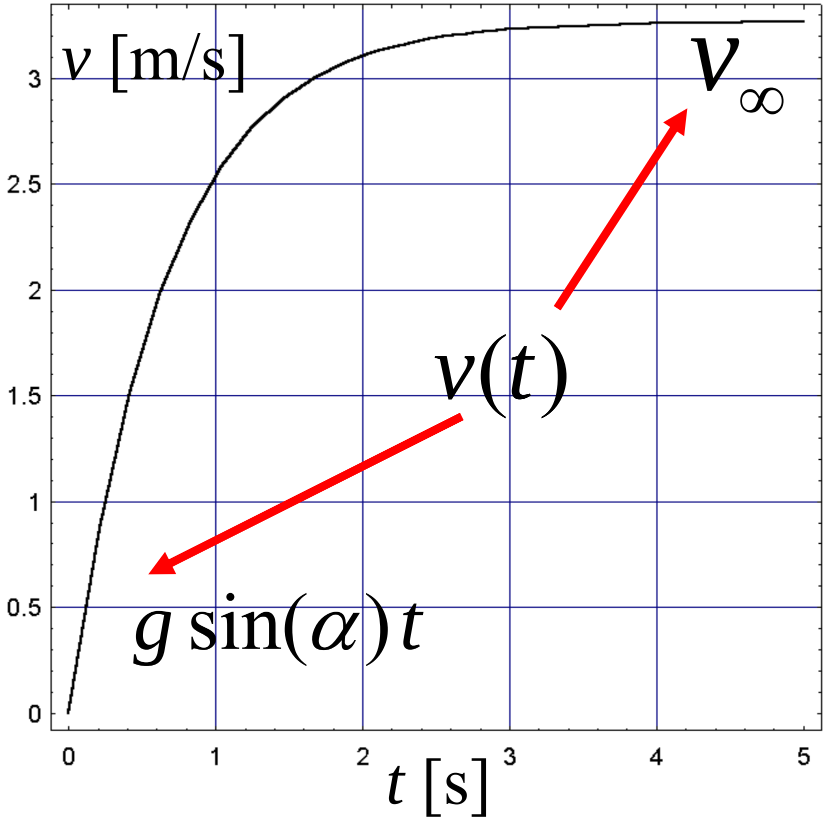
$$\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) = 1 - \frac{b\,v}{m\,g\sin\alpha}$$

Löst man nach der Geschwindigkeit v auf, ergibt sich:

$$v(t) = \frac{m\,g\sin\alpha}{b}\left(1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right)$$

Für große Zeiten $t \to \infty$ ist

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = v_\infty = \frac{m\,g\sin\alpha}{b}$$



Am Anfang der Bewegung gilt:

$$\frac{b}{m}t << 1 \Rightarrow \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) \approx 1 - \frac{b}{m}t$$

$v(t) = g\sin(\alpha)t$ genauso wie ohne Reibung.

Am Anfang der Bewegung ist die Reibungs vernachlässigbar. Mit der Zeit wird sie immer größer, bis sie die Gravitation kompensiert. Daher hätte man die Endgeschwindigkeit v_∞ auch einfacher ausrechnen können:

Für $t \to \infty$ fällt der Körper mit

$$v = v_\infty = const. \Rightarrow 1.\ \text{Newton - Axiom}$$

$$m\,a = mg\sin\alpha - F_r = 0$$

$$mg\sin\alpha - bv_\infty = 0$$

$$\Rightarrow v_\infty = \frac{mg\sin\alpha}{b}$$

Bemerkung:
Jetzt hängt die Fallbewegung auch von der Masse des Körpers ab!

2) Reibung in Fluiden Medien

Empirisch findet man häufig für die Reibungskraft in fluiden Medien (Flüssigkeiten, Gase):

$$F_r(v) = b\,v^n$$

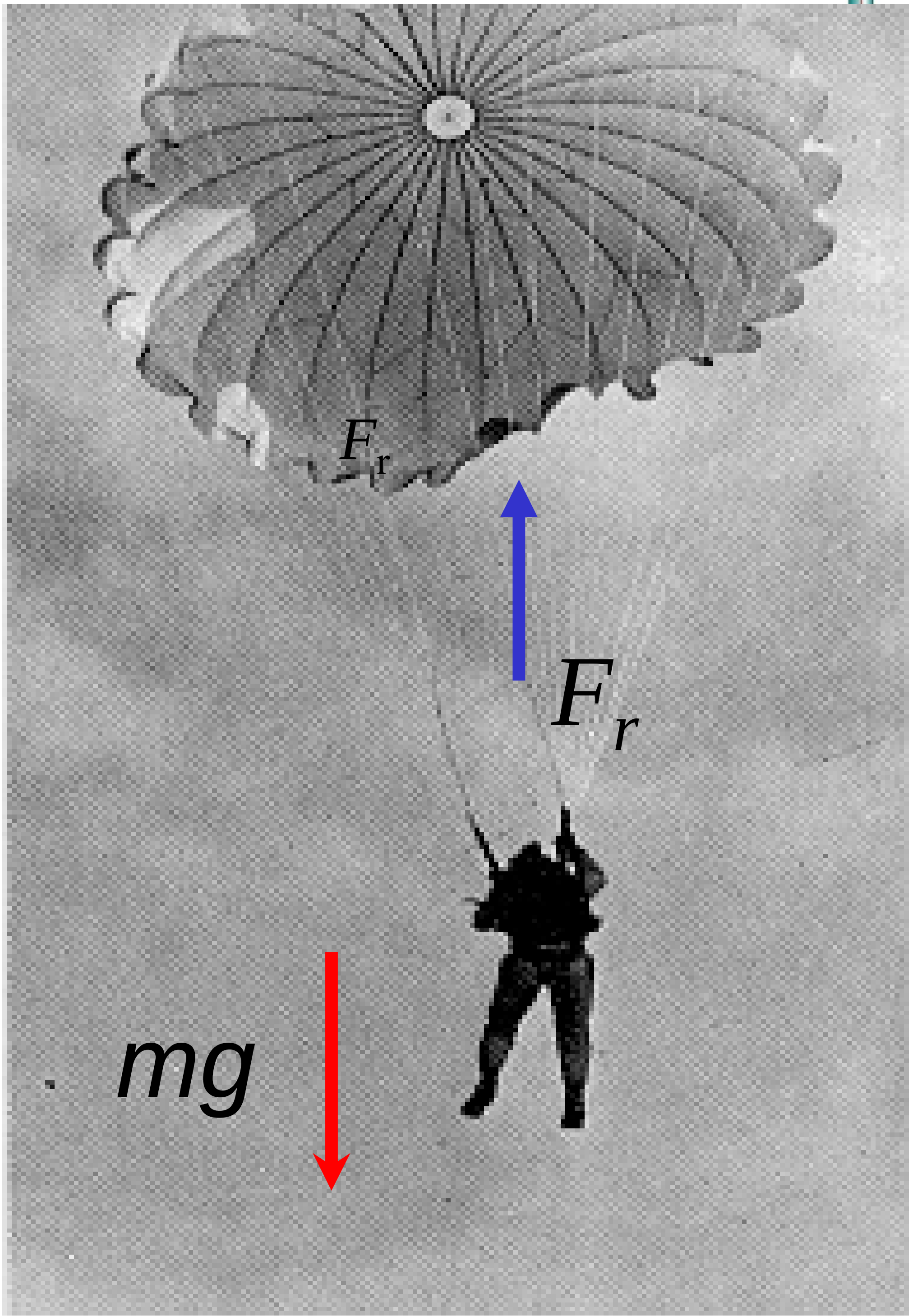
Stokes-Reibung : $n = 1$ für „geringe“...
Newton-Reibung: $n = 2$ für „hohe“ ...
Geschwindigkeiten

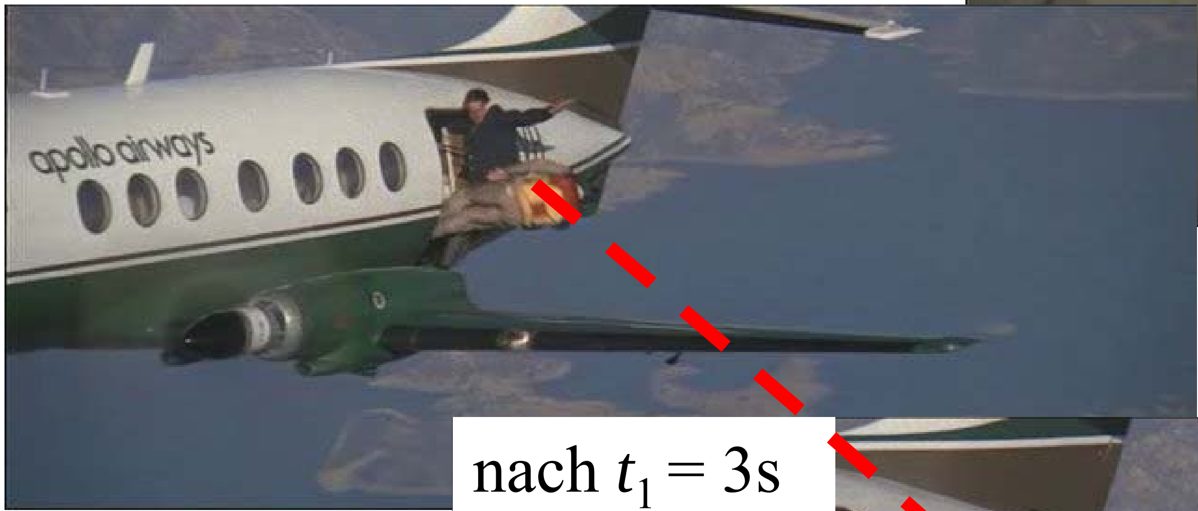
2. Newton-Axion (eindimensional, z.B. freier Fall):

$$F = ma = mg - b\,v^n$$

$$t \to \infty \Rightarrow a \approx 0,\, v = v_\infty = const.$$

$$0 = mg - b\,v_\infty^n \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \left(\frac{mg}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$





nach $t_1 = 3s$

Beispiel: Quantitative Auswertung des James Bond Fallschirmfilms

Für die Reibungskraft gilt in guter Näherung:

$$F_r = \left(\frac{1}{2} c_W \rho A\right) v^2 = b v^2$$

ρ – Dichte des Mediums

A – Querschnittsfl. des fallenden Körpers

c_W – Widerstandsbeiwert (c_W – Wert) eines Körpers, hängt nur von der Form ab

Zahlenwerte:

c_W – Wert Maß für Stromlinienförmigkeit

$c_W \approx 2$ für geschlossenen Fallschirm

$c_W \approx 20$ für offenen Fallschirm

$$\rho_{\text{Luft}} \approx 1 \frac{\text{g}}{l} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Annahme: Die Dichte der Luft ist von der Höhe unabhängig.

$A \approx 1\,\text{m}^2$

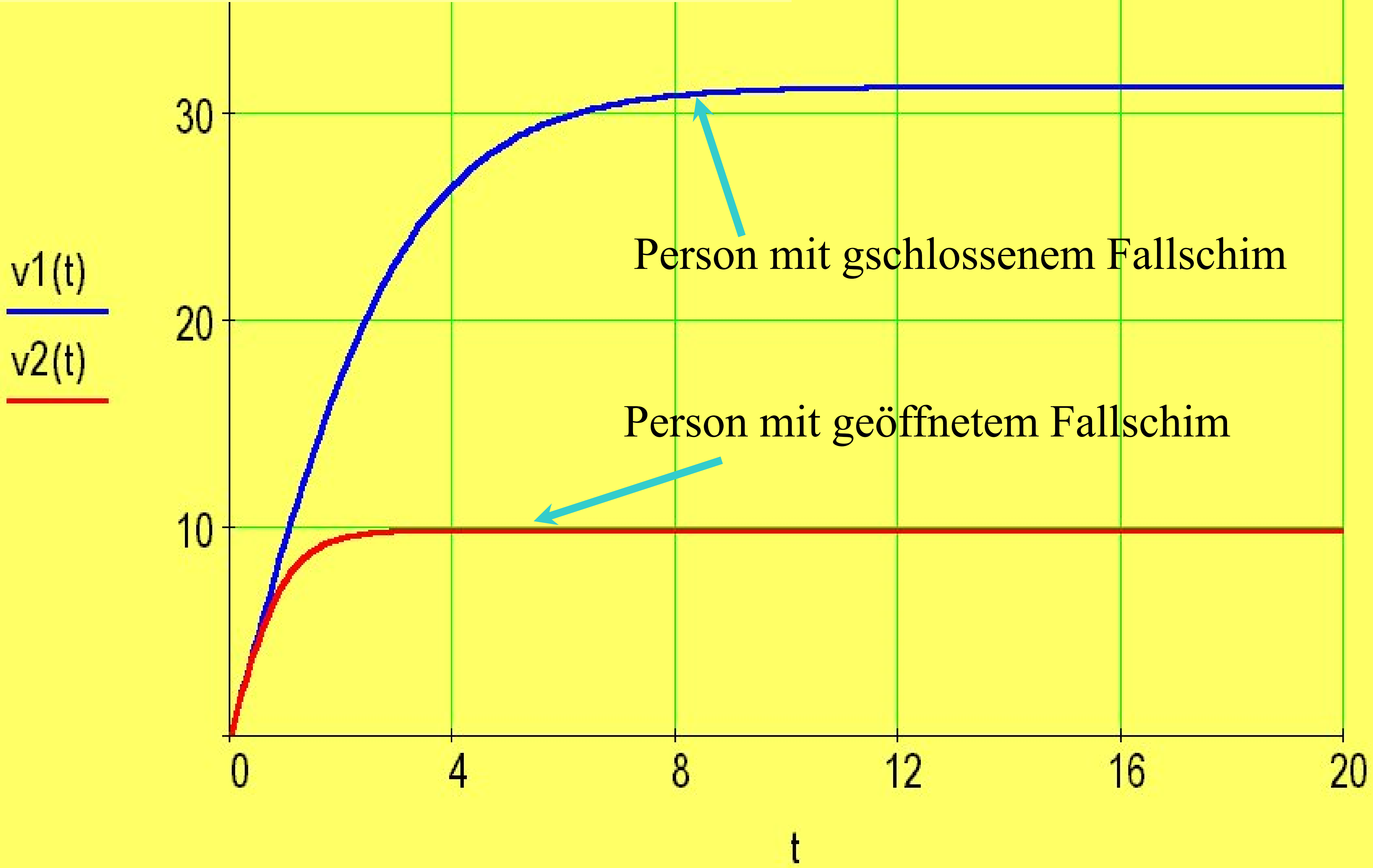
$$\Rightarrow b = \frac{1}{2} c_W \rho A \approx \begin{cases} 1 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}} & \text{geschlossen} \\ 10 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}} & \text{offen} \end{cases}$$

Angenommen James Bond und der andere „Schurke“ wiegen jeweils etwa m = 100 kg, dann ergibt sich für die Endgeschwindigkeit v_∞

$$v_\infty = \left(\frac{mg}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \begin{cases} 31.3 \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = 113 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} & \text{geschl.} \\ 9.9 \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = 35 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} & \text{offen} \end{cases}$$

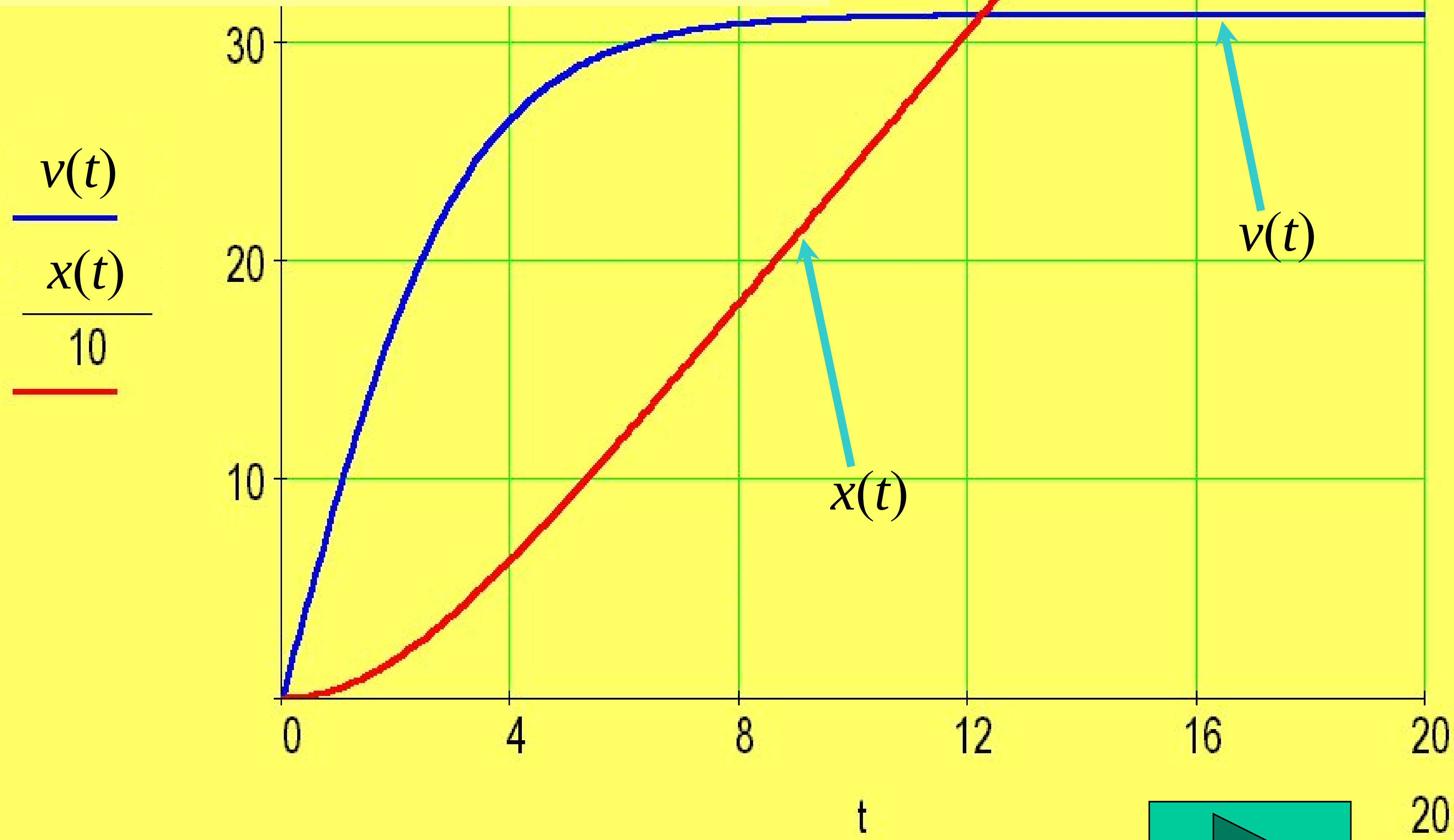
Freier Fall mit Newton-Reibung: $v(t)$ – exakte Rechnung

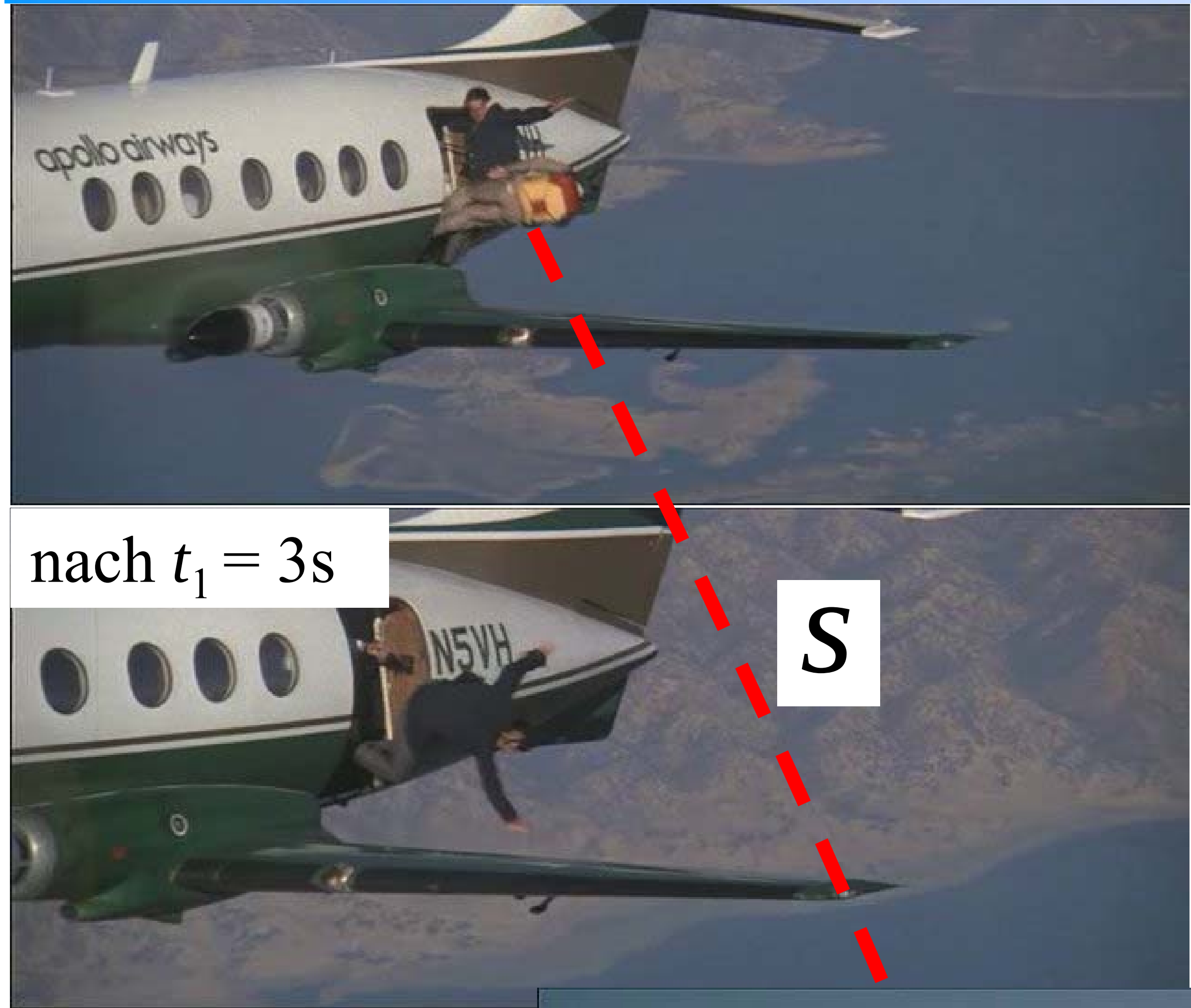
$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^2$$



Freier Fall mit Newton-Reibung: Exakte Rechnung für $v(t)$, $x(t)$ (geschlossener Fallschirm)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$





James Bond wird $t_1 = 3$ Sekunden nach dem „Schurken“ aus dem Flugzeug gestoßen. Er muß also den Höhenunterschied

$$s = v_\infty t_1 = 31.3\frac{\text{m}}{\text{s}}\,3\text{s} = 94\text{m}$$

aufholen. Der Wegunterschied parallel zur Erdoberfläche wird im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Er benötigt dafür $t_2 = 10$ Sekunden. Währenddessen ist der „Schurke" weitere

$$s_1 = v_\infty t_2 = 31.3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}10\mathrm{s} = 313\mathrm{m}$$

gefallen. Deswegen muß James Bond die Gesamtstrecke

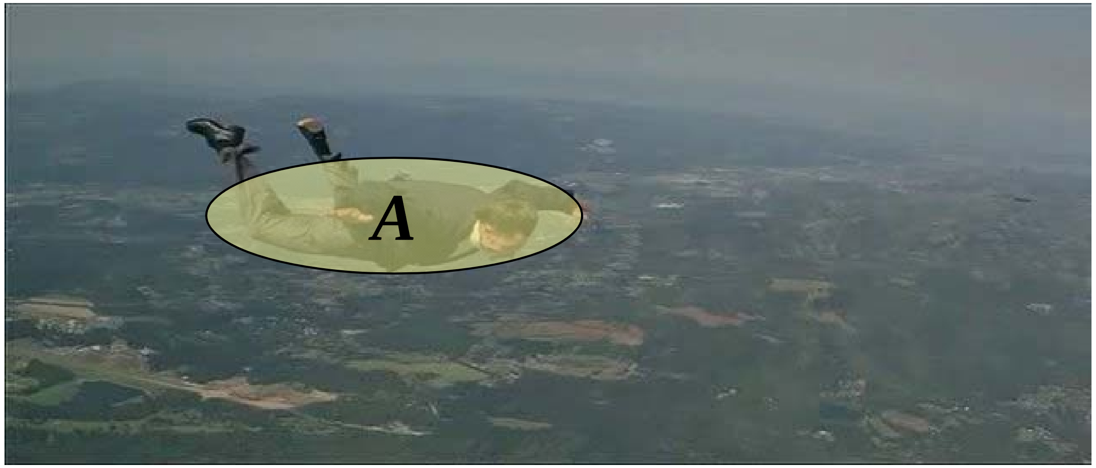
$$s_{\mathrm{JB}} = v_{\infty,\mathrm{JB}} t_2 = s + s_1 = 407\mathrm{m}$$

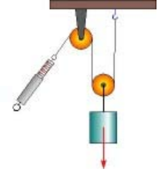
in der Zeit t_2 durchfallen, um den Schurken einzuholen. Er muß daher die größere Geschwindigkeit

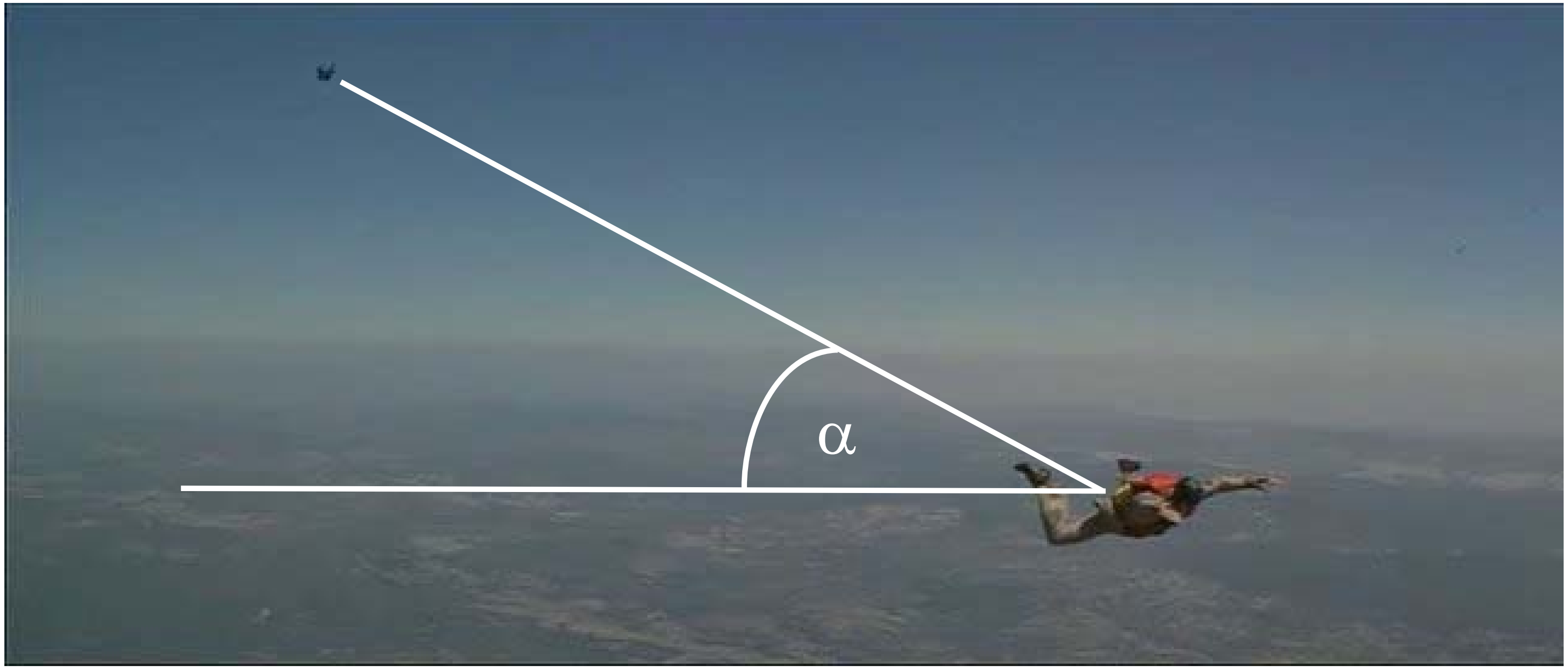
$$v_{\infty,\mathrm{JB}} = \frac{s}{t_2} + v_\infty = 40.7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

erzielen.

Veränderung der Querschnittsfläche







Für die Fallgeschwindigkeit ergab sich:

$$v_\infty = \left(\frac{mg}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2mg}{c_W \rho A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2_{\infty,\mathrm{JB}}}{v^2_\infty} = \frac{m_{\mathrm{JB}} c_W A}{m\, c_{W,\mathrm{JB}} A_{\mathrm{JB}}}$$

Es ist ungefähr: $m \approx m_{\mathrm{JB}},\ c_W \approx c_{W,\mathrm{JB}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2_{\infty,\mathrm{JB}}}{v^2_\infty} \approx \frac{A}{A_{\mathrm{JB}}} = 1.7$$

$$\Rightarrow \quad A_{\mathrm{JB}} = \frac{A}{1.7} = A\cos\alpha \ \ \text{(Projektion)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = 0.588 \ \Rightarrow \ \alpha \approx 53^\circ$$

Wo kommt der „Beisser“ her?

James Bond entdeckt den „Beisser“ etwa $s_2 \approx 50$m über ihm und es dauert etwa $t_3 = 5$ Sekunden bis der „Beisser“ James Bond eingeholt hat. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit von $v_{\infty,\mathrm{Bei}} = 41.3$ m/s für den Beisser falls James Bond mit $v_{\infty,\mathrm{JB}} = 31.3$ m/s fällt.

Es ist jetzt ungefähr: $c_{W,\mathrm{Bei}} \approx c_{W,\mathrm{JB}}$ und $A_{\mathrm{Bei}} \approx A_{\mathrm{JB}}$

Die gleiche Rechnung wie eben ergibt:

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{\infty,\mathrm{Bei}}^2}{v_{\infty,\mathrm{JB}}^2} \approx \frac{m_{\mathrm{Bei}}}{m_{\mathrm{JB}}} \quad \Rightarrow \quad m_{\mathrm{Bei}} \approx m_{\mathrm{JB}} \frac{v_{\infty,\mathrm{Bei}}^2}{v_{\infty,\mathrm{JB}}^2} = 1.74\, m_{\mathrm{JB}}$$

Wenn James Bond 100kg wiegt, dann wiegt der „Beisser“ 174kg ....

Reibungskräfte - Wiederholung

Die Reibungskraft hat im Prinzip eine komplizierte Abhängigkeit von der Geschwindigkeit:

$$\boxed{\vec{F}_\mathrm{R} = \vec{F}(\vec{v})}$$

Tritt eine geschwindigkeitsabhängige Reibung auf, so weist der Bewegungsvorgang – unabhängig von der konkreten Abhängigkeit – folgende Charakteristika auf. Erfolgt die Bewegung aus dem Stand, so

1) läuft sie zu frühen Zeiten in guter Näherung wie ohne Reibung ab.
2) zu späteren Zeiten wächst die Reibung asymptotisch auf einen Wert an, der die externe, bescheunigende Kraft kompensiert .

$\Rightarrow$ Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

$$\boxed{F_\mathrm{r}(v) = b\,v^n}$$

Stokes-Reibung : $n = 1$ für „geringe“...
Newton-Reibung: $n = 2$ für „hohe“ ...
Geschwindigkeiten

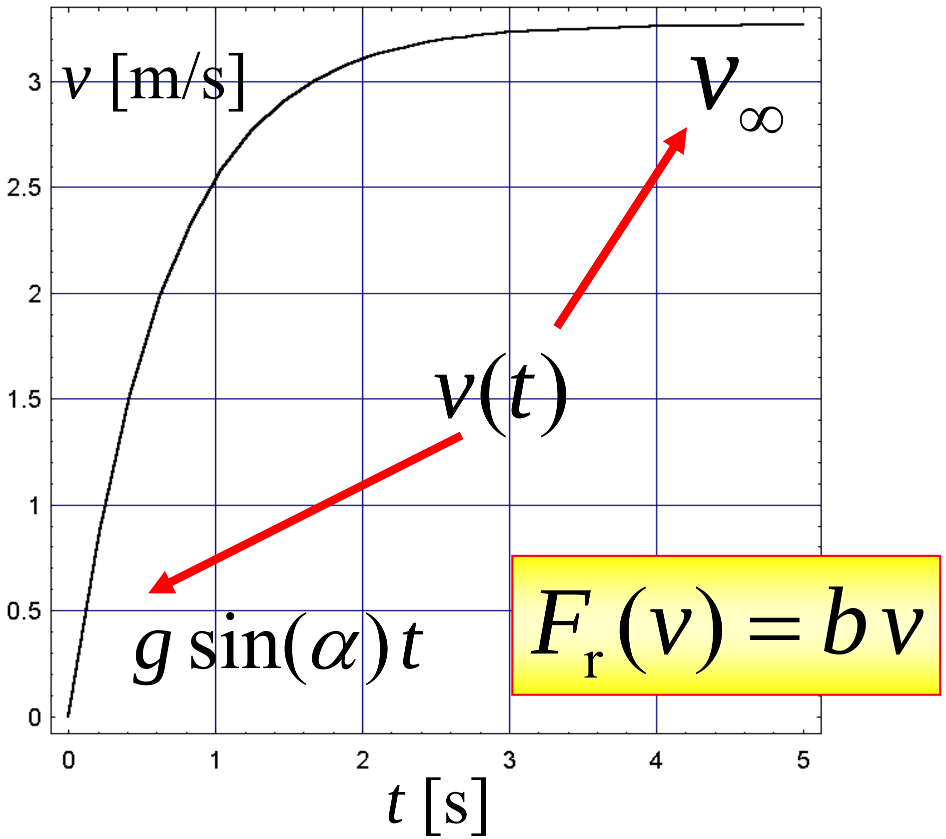
Berechnung der Grenzgeschwindigkeit:

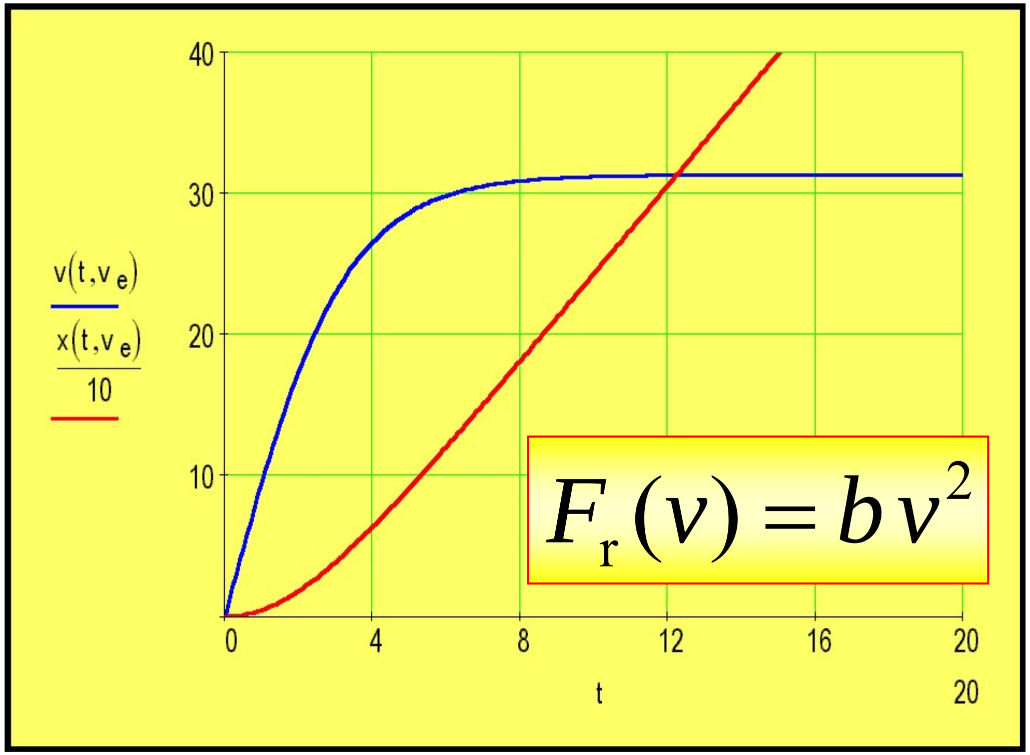
Reibungskraft = äußere Kraft

$$ma = F_{ext} - b\,v^n$$

$$t \to \infty \Rightarrow a \approx 0$$

$$0 = F_{ext} - b\,v_\infty^n \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \left(\frac{F_{ext}}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$





Bemerkung:

Jetzt hängt die Fallbewegung auch von der Masse des Körpers ab!